

**MATHEMATISCHE
ANNALEN**

128. BAND

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81																			

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
HEINRICH BEHNKE RICHARD COURANT
MÜNSTER (WESTF.) NEW YORK
HEINZ HOPF KURT REIDEMEISTER
ZÜRICH MARBURG (LAHN)
FRANZ RELICH BARTEL L. VAN DER WAERDEN
GÖTTINGEN ZÜRICH

128. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1954/55

Unveränderter Nachdruck 1969
Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York

Alle Rechte vorbehalten.

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg.

Printed in Germany.

Inhalt des 128. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Bauer, F. L., Zur Theorie der Spingruppen	228
(Anschrift: München 2 NW, Math. Institut d. Techn. Hochschule, Walter-von-Dyck-Platz 1)	
Bremermann, H. J., Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen	63
(Anschrift: Institute for Applied Mathematics, University, Stanford, Cal., USA)	
Carlitz, L., Some Arithmetic Properties of the OLIVIER Functions	412
(Anschrift: Duke University, Dept. of Mathematics, Durham, N. C., USA)	
Cordes, H. O., Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen. I. Mitteilung	257
Cordes, H. O., Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen. II. Mitteilung	373
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut d. Universität, Bunsenstr. 3—5)	
Doetsch, G., Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten	171
(Anschrift: Freiburg/Br., Riedbergstr. 8)	
Hammersley, J. M., Storage Problems	475
(Anschrift: 6 Kemble Road, Oxford/England)	
Jacobs, K., Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im HILBERTschen Raum	340
(Anschrift: Oberwolfach, Post Wolfach, Lorenzenhof)	
Keller, O.-H., Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Streckenkomplexe	177
(Anschrift: Halle/Saale, Am Kirchtor 28a)	
König, H., Multiplikation von Distributionen. I.	420
(Anschrift: Kiel, Math. Institut d. Universität)	
Kreyszig, E., Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten	479
(Anschrift: Stanford University, Applied Mathematics, Stanford/California, USA)	
Künzi, H. P., Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktionen	471
(Anschrift: Zürich 57/Schweiz, Froburgstr. 285)	
Lenz, H., Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes	363
(Anschrift: München 19, Mettinghstr. 5)	
Meschkowski, H., Die Koeffizienten des BERGMANSchen Orthonormalsystems	200
(Anschrift: Berlin-Dahlem, Thielallee 66)	
Morita, K., Normal Families and Dimension Theory for Metric Spaces	350
(Anschrift: Dept. of Mathematics, Tokyo University of Education, Otsuka, Bunkyo-ku, Tokyo/Japan)	
Naumann, H., Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit den Vergeweben von Herrn R. ARTZY	92
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Math. Seminar der Universität)	
Nef, W., Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt	204
(Anschrift: Köniz, Kanton Bern/Schweiz, Schloßstr. 11)	
Noble, M. E., Coefficient Properties of Fourier Series with a Gap Condition	55
(Anschrift: Dept. of Mathematics, University, Nottingham, England)	
Noble, M. E., <i>Berichtigung</i> zu „Coefficient Properties“	256
Peyerimhoff, A., Über das Anwachsen der C_n -Mittel von LAPLACE-Integralen auf vertikalen Geraden	138
(Anschrift: Gießen/Lahn, Bismarckstr. 24, Math. Institut)	

	Seite
Pinl, M., Integrallose Darstellung isotroper Kurven im sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum	49
(Anschrift: 2 Fuller Road, Ramna, Dacca, Eastern Pakistan)	
Richter, H., Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie V	305
(Anschrift: Haltingen/Baden, Elekraweg 2)	
Siegel, C. L., Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung	144
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut, Bunsenstr. 3—5)	
Thimm, W., Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten . .	1
(Anschrift: Bonn, Luisenstr. 138)	
Tietz, H., Zur Realisierung Riemannscher Flächen	453
(Anschrift: Braunschweig, Gaußstr. 24)	
van der Waerden, B. L., Zur algebraischen Geometrie 17. Lokale Dimension und Satz von ECKMANN	128
van der Waerden, B. L., Zur algebraischen Geometrie 18. Ketten in mehrfachprojektiven Räumen	135
(Anschrift: Zürich/Schweiz, Bionstr. 18)	
Weier, J., Über die wesentlichen Singularitäten einer Abbildungsschar	459
(Anschrift: Fulda, Marienstr. 9)	
Weil, A., Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique	95
(Anschrift: 86, rue Claude-Bernard, Paris 5 ^e , Frankreich)	
Zaubek, O., Über Zusammenhangseigenschaften von Grenzmengen	290
(Anschrift: Wien VII/Österreich, Kaiserstr. 79/16)	

Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

WALTER THIMM in Bonn.

Einleitung.

VON WEIERSTRASS stammt der Satz, daß zwischen $n + 1$ $2n$ -fach periodischen, meromorphen Funktionen von n Variablen eine algebraische Relation besteht. Für diesen Satz, den WEIERSTRASS selbst nicht bewiesen hat, hat POINCARÉ einen Beweis skizziert¹⁾. Die POINCARÉsche Beweisidee kommt darauf hinaus, die durch die Funktionen bestimmte, meromorphe Abbildung des Periodenparallelotops zu untersuchen. POINCARÉ hat jedoch übersehen, daß eine meromorphe Abbildung bestimmte Punkte nicht auf Punkte, sondern auf höherdimensionale algebraische Gebilde abbildet. Seit POINCARÉ sind Beweise des WEIERSTRASSschen Satzes angegeben worden, die auf anderen Gedanken beruhen und die die Eigenschaften der periodischen Funktionen stärker ausnutzen. Derartige Beweise findet man in OSGOODS Lehrbuch²⁾ und im Buche von SIEGEL: "Analytic functions of several complex variables"³⁾. Der WEIERSTRASSsche Satz ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes, der folgendermaßen lautet: Es seien $n + 1$ meromorphe Funktionen auf einer kompakten $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit⁴⁾ gegeben. Unter diesen gebe es n analytisch unabhängige. Dann besteht zwischen den $n + 1$ Funktionen eine algebraische Relation. In Arbeiten von BLUMENTHAL „Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen“⁵⁾ und in dem erwähnten Buche von SIEGEL⁶⁾ finden sich weitere Beispiele für Anwendungen dieses allgemeinen Satzes in der Theorie der automorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Für den allgemeinen Satz hat der Verf. in seiner Dissertation⁷⁾ einen Beweis gegeben, der die POINCARÉsche Beweisidee benutzt. Dieser Beweis soll in einer sehr stark vereinfachten und gekürzten Form noch veröffentlicht werden. Der Grundgedanke in der Neufassung des POINCARÉschen Beweises liegt darin, die Bildpunktmenge derjenigen Punkte genau zu untersuchen, in denen die meromorphe Abbildung unbestimmt wird. Die Lösung dieser Aufgabe ist dem Verf. inzwischen gelungen und soll demnächst veröffentlicht werden.

¹⁾ Acta Math. 26, 43 (1902).

²⁾ Osgood, Lb. II, 2, S. 603.

³⁾ S. 94 und S. 97.

⁴⁾ Vgl. Definition X, Nr. 2.1.

⁵⁾ Math. Ann. 56, 509 (1903); 58, 497 (1904).

⁶⁾ S. 124 ff.

⁷⁾ Vgl. Literaturverzeichnis.

Der angegebene Satz über die kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten legt zwei Verallgemeinerungen nahe:

1. Die Voraussetzungen über die Anzahl und die analytische Unabhängigkeit der meromorphen Funktionen sind wegzulassen, so daß man zu der folgenden Formulierung gelangt: Auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit seien meromorphe Funktionen analytisch abhängig. Dann sind sie algebraisch abhängig.

Diese Verallgemeinerung ist auch deswegen bedeutsam, weil es kompakte, $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten gibt, die keine n analytisch unabhängigen meromorphen Funktionen zulassen. Es werde an die Periodenrelationen bei $2n$ -fach periodischen Funktionen von n Variablen erinnert⁸⁾. Den Ausartungsfall des Verletztseins der Periodenrelationen behandelt SIEGEL ausführlich in seinem Buche⁹⁾ und beweist, daß auch in diesem Falle die meromorphen Funktionen des Periodenparallelotops einen algebraischen Funktionenkörper bilden.

2. Der Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit ist in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen nicht das vollständige Analogon zum Begriff der RIEMANNschen Fläche in der klassischen Funktionentheorie. Um ein solches zu erhalten, muß man den Mannigfaltigkeitscharakter aufgeben und singuläre Stellen zulassen. Man gelangt dadurch zum Begriff des RIEMANNschen Gebietes¹⁰⁾ und zu folgender Verallgemeinerung unseres Satzes: Auf einem kompakten RIEMANNschen Gebiete sind analytisch abhängige meromorphe Funktionen algebraisch abhängig.

In der vorliegenden Arbeit wird die erste Verallgemeinerung des Satzes über die kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Die Beweismethode wurde in früheren Arbeiten des Verf. (vgl. T 1, T 2)⁷⁾ zur Untersuchung von ausgearteten meromorphen Abbildungen der Umgebung eines Unbestimmtheitspunktes entwickelt. Für den vorliegenden Fall der Abbildung einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit bedarf sie wesentlicher Abänderungen, wenn auch ihr Grundgedanke erhalten bleibt. Unabhängig von der Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Satzes scheint dem Verf. auch die Methode zur Behandlung der meromorphen Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten von selbständigem Interesse zu sein. Die Sätze 2¹¹⁾ und 4¹²⁾ über parameterabhängige analytische Mengen verallgemeinern Entwicklungen in der Arbeit T 1⁷⁾. Besonders wichtig sind die Definitionen XIV¹³⁾ über verallgemeinerte kanonische Darstellungen von analytischen Mengen auf komplexen Mannigfaltigkeiten und die anschließenden Sätze 7¹⁴⁾, 8¹⁵⁾ und 9¹⁶⁾. Der Satz 10¹⁷⁾ enthält eine Aussage über die Existenz derartiger Darstellungen.

⁸⁾ SIEGEL, loc. cit., S. 56.

⁹⁾ SIEGEL, loc. cit., S. 100.

¹⁰⁾ BEHNKE-STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNscher Gebiete. Math. Ann. 124, 1 (1951).

¹¹⁾ Nr. 1.18.

¹²⁾ Nr. 1.20.

¹³⁾ Nr. 2.6.

¹⁴⁾ Nr. 2.16.

¹⁵⁾ Nr. 2.17.

¹⁶⁾ Nr. 2.21.

¹⁷⁾ Nr. 2.22.

Der Verf. ist überzeugt davon, daß seine Methoden auch zum Beweise der oben erwähnten zweiten Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Satzes ausreichen, wenngleich einige neue Schwierigkeiten zu erwarten sind. Darüber wird in einer späteren Arbeit berichtet werden.

§ 1. Definitionen und einleitende Betrachtungen.

1.1 Die Begriffe, die hier zu besprechen sind, sind teilweise schon in T I und T 2 geprägt worden. Einige von ihnen bedürfen jedoch einer prägnanteren Fassung und Verallgemeinerung.

„Gebiet“ sei eine offene und zusammenhängende Punktmenge eines topologischen Raumes. „Bereich“ sei die abgeschlossene Hülle eines Gebietes. Die abgeschlossene Hülle einer Punktmenge A werde mit \bar{A} bezeichnet.

Das System der m (komplexen) Variablen x_1, \dots, x_m werde $(x)_m$ genannt. Wenn der Hinweis auf die Dimension m unwesentlich ist, werde dafür x geschrieben.

Das topologische Produkt der Mengen A und B werde mit $\{A, B\}$ bezeichnet.

1.2 *Definition I.* Es sei $M^{(e)}$ eine analytische Mannigfaltigkeit in der Umgebung des Punktes $O: (x)_m = (0)_m$ des $(x)_m$ -Raumes mit den folgenden Eigenschaften:

a) $M^{(e)}$ sei im Punkte O irreduzibel.

b) Es sei i das zu $M^{(e)}$ gehörende Primideal im Ring der in einer Umgebung von O konvergenten Potenzreihen von $(x)_m$. i enthalte kein Element, das allein von $(x)_e$ abhängt, und für jeden Wert von j , $j = 1, \dots, m - e$, sei in i ein Element vorhanden, das regulär in x_{e+j} ist und sonst nur noch von $(x)_e$ abhängt. Diesen Sachverhalt kennzeichnen wir durch die Gleichung:

$$(1) \quad M^{(e)} = K.D. [x_{e+1}, \dots, x_m / (x)_e].$$

Eine im Punkte O irreduzible analytische Mannigfaltigkeit nennen wir „Primkeim in O “.

1.3 Wenn der in Definition I beschriebene Sachverhalt vorliegt, besitzt M eine kanonische Darstellung folgender Art (vgl. BOCHNER-MARTIN, S. 208 bis 212):

a) $H(x_{e+1}/(x)_e) = 0$ in O irreduzible ganz algebroide Gleichung für x_{e+1} .

b)
$$x_{e+j} = \frac{G_j(x_{e+1} | (x)_e)}{H'(x_{e+1} | (x)_e)}, \quad j = 2, \dots, m - e, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial x_{e+1}},$$

vgl. OSOOD, Lb. II 1, S. 106.

1.4 *Definition II.* Es sei $M^{(e)} = K.D. [x_{e+1}, \dots, x_m / (x)_e]$, vgl. Definition I. Das Gebiet X des $(x)_m$ -Raumes habe folgende Eigenschaften:

a) X sei ein Kreiszylindergebiet:

$$(1) \quad X: |x_i| < X_i, X_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Es ist dann: $X = \{X^{(e)}, X^{(m-e)}\}$ mit den Bedeutungen:

$$(2) \quad X^{(e)}: |x_i| < X_i, \quad i = 1, \dots, e \text{ und:}$$

$$(3) \quad X^{(m-e)}: |x_{e+j}| < X_{e+j}, \quad j = 1, \dots, m - e.$$

b) Für $(x)_e \in \bar{X}^{(e)}$ seien die Koeffizienten der Polynome H und G_j in der kanonischen Darstellung, Nr. 1.3, analytisch.

c) Für $(x)_e \in \bar{X}^{(e)}$ sollen die nach Nr. 1.3 berechneten Größen x_{e+j} , $j = 1, \dots, m - \varrho$, den Ungleichungen (3) genügen.

Ein solches Gebiet X heiße K.D.-Gebiet von $M^{(e)}$. Wir gebrauchen auch den Ausdruck: $M^{(e)}$ besitzt in X eine kanonische Darstellung. Es sei ferner:

$$(4) \quad (M^{(e)}) = M^{(e)} \cap X.$$

Jede beliebige Umgebung von O enthält ein K.D.-Gebiet von $M^{(e)}$.

1.5. Man beweist ohne Schwierigkeiten die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Es sei $M^{(e)} = \text{K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$. X sei ein K.D.-Gebiet von $M^{(e)}$. Es sei $(x')_m$ ein Punkt von $(M^{(e)}) = M^{(e)} \cap X$. Es gibt eine Umgebung X' von $(x')_m$, derart, daß alle Punkte von $M^{(e)} \cap X'$ zu endlich vielen Primkeimen $M_j^{(e)}$ in $(x')_m$ gehören und:

$$(1) \quad M_j^{(e)} = \text{K.D.}[y_{e+1}, \dots, y_m/(y)_e], \quad j = 1, \dots, h,$$

mit:

$$(2) \quad y_i = x_i - x'_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

gilt.

Hilfssatz 2. Es sei $M^{(e)} = \text{K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$. Es sei $p(x_e/(x)_{e-1})$ ein im Punkte $(x)_e = (0)_e$ irreduzibles und ausgezeichnetes Pseudopolynom von x_e . Es gibt eine Umgebung X' von O , derart, daß die Punkte von $M^{(e)} \cap X'$, welche der Gleichung:

$$(3) \quad p(x_e/(x)_{e-1}) = 0$$

genügen, auf endlich vielen Primkeimen in O :

$$(4) \quad M_j^{(e-1)} = \text{K.D.}[x_e, x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_{e-1}], \quad j = 1, \dots, h,$$

liegen.

1.6. Bei späteren Untersuchungen spielt eine Verallgemeinerung der kanonischen Darstellung eine Rolle:

Definition III. A. Es sei $0 \leq \varrho < m$. Das Gebiet X sei topologisches Produkt eines Gebietes $X^{(e)}$ des $(x)_e$ -Raumes und eines Gebietes $X^{(m-e)}$ des $\{x_{e+1}, \dots, x_m\}$ -Raumes. Es gelte also:

$$(1) \quad X = \{X^{(e)}, X^{(m-e)}\}.$$

B. Gegeben seien $m - \varrho$ ganz algebroiden Gleichungen:

$$(2) \quad p_j(x_{e+j}/(x)_e) = 0, \quad j = 1, \dots, m - \varrho;$$

p_j sei ein Polynom von x_{e+j} , dessen Koeffizienten in $X^{(e)}$ analytisch sind; der höchste Koeffizient sei 1. Die Diskriminante $d_j(x)_e$ des Polynoms p_j sei $\neq 0$, $j = 1, \dots, m - \varrho$. Es sei:

$$(3) \quad D(x) = \prod_{j=1}^{m-\varrho} d_j(x).$$

Die analytische Mannigfaltigkeit $D = 0$ heiße „Verzweigungsmannigfaltigkeit“ V .

C. Es sei $Q = (x')_e$ ein Punkt aus $X^{(e)} - V$. In Q existieren die Zweige der durch die Gleichungen (2) bestimmten ganz algebroiden Funktionen

$x_{e+j}(x)_e$, die wir mit $x_{e+j}^{(A)}(Q)$ bezeichnen. Weil Q nicht zu V gehört, haben diese Zweige verschiedene Funktionswerte $x_{e+j}^{(A)}$ im Punkte Q .

D. Gegeben sei eine Zuordnung der Zweige, d. h. eine endliche Anzahl von (verschiedenen) Reihen:

$$(4) \quad A_\nu(Q) = (x_{e+1}^{(\nu)}(Q), \dots, x_m^{(\nu)}(Q)), \quad \nu = 1, \dots, N,$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Reihe $A_\nu(Q)$ enthalte von jeder algebroiden Funktion $x_{e+j}(x)_e$ genau einen zu Q gehörenden Zweig.

b) Bei simultaner analytischer Fortsetzung der $m - e$ Zweige von $A_\nu(Q)$ auf einem beliebigen, von Q ausgehenden, geschlossenen Wege in $X(e) - V$ soll eine Reihe $A_{\nu'}(Q)$ entstehen.

c) Jeder Zweig $x_{e+j}^{(A)}(Q)$ soll wenigstens einer Reihe $A_\nu(Q)$ angehören.

Die N Punkte $\Omega_\nu = \{(x')_e, x_{e+1}^{(\nu)}, \dots, x_m^{(\nu)}\}$ sind verschieden. Wir nennen sie Überlagerungspunkte von Q , und Q heiße „regulär“.

E. Es sei Q' ein Punkt von $X(e) - V$. Verbinden wir Q' mit Q durch einen Weg in $X(e) - V$, so können wir die Zweigreihen $A_\nu(Q)$ längs dieses Weges bis zum Punkt Q' analytisch fortsetzen und erhalten in Q' ganz analog gebildete Reihen: $A_\nu(Q')$, $\nu = 1, \dots, N$. Sie ergeben N verschiedene über Q' liegende Punkte.

F. Es sei $(M^{(e)})$ die analytische Menge mit folgenden Punkten:

a) den über Punkten von $X(e) - V$ liegenden Punkten,

b) den über Punkten von $X(e)$ liegenden Häufungspunkten der Punktmenge a).

G. Die Punktmenge $(M^{(e)})$ liege im Gebiet X .

H. Die beschriebene Darstellung von $(M^{(e)})$ nennen wir „verallgemeinerte kanonische Darstellung“, V.K.D., und gebrauchen für sie das Symbol:

$$(5) \quad (M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e].$$

Das Gebiet X nennen wir V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)})$ und sagen auch: $(M^{(e)})$ gestattet in X eine V.K.-Darstellung.

I. Die Reihen $A_\nu(Q)$ erfahren bei analytischer Fortsetzung auf geschlossenen Wegen in $X(e) - V$ Permutationen, die eine Gruppe bilden, die Gruppe $\mathfrak{G}(X^{(e)})$ der analytischen Menge $(M^{(e)})$ bezüglich $X(e)$. Wenn diese Gruppe transitiv ist, nennen wir $(M^{(e)})$ irreduzibel.

1.7. Wir ziehen einige einfache Folgerungen aus den bisherigen Definitionen:

Folgerung 1. Es sei $(M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$. Es sei $P = (x')_m$ ein Punkt von $(M^{(e)})$. Es gibt eine Umgebung X' von P , derart, daß die Punkte von $(M^{(e)}) \cap X'$ zu endlich vielen Primkeimen in P :

$$(1) \quad M_j^{(e)} = \text{K.D.}[y_{e+1}, \dots, y_m/(y)_e], \quad j = 1, \dots, h,$$

mit:

$$(2) \quad y_i = x_i - x'_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

gehören, vgl. Definition I.

Folgerung 2. Es sei $(M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$. $(M^{(e)})$ läßt sich eindeutig in irreduzible Komponenten zerlegen. Diese Zerlegung entspricht eineindeutig der Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}(X^{(e)})$ in die Systeme der Intransitivität. Alle Komponenten haben das V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)})$ zum V.K.D.-Gebiet. Je zwei irreduzible Komponenten von $(M^{(e)})$ haben folgende Eigenschaft: Es gibt keinen Primkeim der einen Komponente, der auf der anderen Komponente liegt.

Folgerung 3. Es sei $M^{(e)} = \text{K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$, vgl. Definition I. X sei ein K.D.-Gebiet von $M^{(e)}$, vgl. Definition III. Dann ist auch $(M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$, und X ist V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)})$. Ferner ist $(M^{(e)})$ irreduzibel im Sinne der Definition III, I.

1.8. Definition IV. Bezüglich der benutzten Bezeichnungen vgl. Definition III, Nr. 1.6. Es sei $(M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e]$; $X = \{X^{(e)}, X^{(m-e)}\}$ sei ein V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)})$. Es sei:

$$(1) \quad D(x)_e = 0$$

die Verzweigungsmannigfaltigkeit von $(M^{(e)})$. Die Funktionen:

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_r), \quad i = 1, \dots, \varrho,$$

seien analytisch im Gebiete $T^{(r)}$. Wir schreiben die Abbildung (2) kurz:

$$(3) \quad (x)_e = \varphi(t)_r.$$

Die Abbildung (2) bilde $T^{(r)}$ in $X^{(e)}$ ab. Die Funktion:

$$(4) \quad D(\varphi_1, \dots, \varphi_e) = D'(t)_r$$

verschwinde nicht identisch. Es sei V' die Nullstellenmenge von D' . Wir definieren: $X' = \{T^{(r)}, X^{(m-e)}\}$. Nun läßt sich in der folgenden Weise eine analytische Menge:

$$(5) \quad (M'^{(r)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(t)_r]$$

mit dem V.K.D.-Gebiet X' gewinnen:

Wir setzen in die linken Seiten der Gleichungen (2), Definition III, die Funktionen (2) ein:

$$(6) \quad p'_j(x_{e+j}/(t)_r) = p_j(x_{e+j}/\varphi_1, \dots, \varphi_e) = 0, \quad j = 1, \dots, m - \varrho.$$

Die Zuordnung der Zweige der durch (6) bestimmten ganz algebraischen Funktionen geschehe folgendermaßen: Es sei $Q' = (t')_r \in T^{(r)} - V'$. Dann liegt der Punkt $Q = \{\varphi_1(t')_r, \dots, \varphi_e(t')_r\}$ in $X^{(e)} - V$. Daher sind in Q Systeme zusammengehöriger Zweige $A_\nu(Q)$, $\nu = 1, \dots, N$, definiert. Wir substituieren in allen Zweigen die Funktionen (2) und erhalten Zweigsysteme:

$$(7) \quad A'_\nu(Q') = (x_{e+1}^{(\nu)}(\varphi_1, \dots, \varphi_e), \dots, x_m^{(\nu)}(\varphi_1, \dots, \varphi_e)), \quad \nu = 1, \dots, N.$$

Durch die Gleichungen (6) und die Zweigzuordnung (7) werde $(M'^{(r)})$ bestimmt.

Die Kurve C' in $T^{(r)} - V'$ werde durch (2) auf die Kurve C in $X^{(e)} - V$ abgebildet. Der durch die Substitution (2) bewirkte Zusammenhang zwischen den Zweigreihen $A_\nu(Q)$ und $A'_\nu(Q')$ bleibt bei analytischer Fortsetzung der Zweigreihe $A_\nu(Q)$ längs C und der Zweigreihe $A'_\nu(Q')$ längs C' erhalten, weil in einem regulären Punkte Q (bzw. Q') verschiedene Zweigsysteme verschiedene Überlagerungspunkte von Q (bzw. Q') bestimmen, vgl. Definition III, D

Den Zusammenhang zwischen $(M^{(e)})$ und $(M^{(r)})$ beschreiben wir durch die Formulierung: $(M^{(r)})$ entsteht aus $(M^{(e)})$ durch die Substitution (2). Hierin sei auch die Beziehung zwischen den V.K.D.-Gebieten X und X' eingeschlossen.

1.9. Folgerung. Es seien $(M^{(e)})$ und $(N^{(e)})$ analytische Mengen mit V.K.-Darstellung. Sie sollen im Punkte $(x')_m$ einen gemeinsamen Primkeim K haben. Die Substitution (3), Definition IV, überführe $(M^{(e)})$ in $(M^{(r)})$ und $(N^{(e)})$ in $(N^{(r)})$. Es sei $(x')_e = \varphi(t')_r$. Dann besitzen $(M^{(r)})$ und $(N^{(r)})$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\{(t')_r, x'_{\sigma+1}, \dots, x'_m\}$. Es wird nämlich K durch die Substitution in eine analytische Menge der Dimension r überführt, die zu $(M^{(r)}) \cap (N^{(r)})$ gehört.

1.10. Definition V. $z = (z)_k$ bedeute ein System von $k (\geq 1)$ Variablen, die wir Parameter nennen. Im $n + k$ dimensionalen $\{(u)_n, (z)_k\}$ -Raum sei eine analytische Mannigfaltigkeit (bzw. analytische Menge) $(M^{(e)})$ gegeben. Es gebe eine lineare Transformation der Variablen $(u - u^0)_n$, die also die Parameter z unberührt läßt:

$$(1) \quad (x)_n = L(u - u^0)_n,$$

derart, daß (vgl. Definitionen I, Nr. 1.2, II, Nr. 1.4, III, Nr. 1.6):

$$(2) \quad (M^{(e)}) = \text{K.D.}[x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z], \quad \varrho = \sigma + k,$$

$$(\text{bzw. } (3) \quad (M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z], \quad \varrho = \sigma + k)$$

gilt. Unter diesen Bedingungen gebrauchen wir die Ausdrucksweise: Die analytische Mannigfaltigkeit (bzw. die analytische Menge) $(M^{(e)}) = (M^{(e)}(z))$ hängt parametrisch von z ab und kennzeichnen diesen Sachverhalt durch zwei Bestimmungsstücke: a) die lineare Transformation (1), b) die Gleichung (2) (bzw. (3)). Wenn $(M^{(e)}(z))$ parametrisch von z abhängt, sei das zugeordnete V.K.D.-Gebiet \mathfrak{U} das topologische Produkt eines Gebietes U des $(u)_n$ -Raumes und eines Gebietes Z des z -Raumes:

$$(4) \quad \mathfrak{U} = \{U, Z\}.$$

Außerdem ist:

$$(5) \quad X = L(U) = \{X^{(\sigma)}, X^{(n-\sigma)}\},$$

wobei $X^{(\sigma)}$ ein Gebiet im $(x)_\sigma$ -Raum und $X^{(n-\sigma)}$ ein solches im $\{x_{\sigma+1}, \dots, x_n\}$ -Raum ist.

1.11. Die Definition der Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten in T I werde — etwas abgeändert — übernommen:

Definition VI. Die Funktion $D((x)_n, (z)_k)$ sei analytisch im Gebiet $\{\mathfrak{U}, Z\}$. Hier sei \mathfrak{U} eine Umgebung des Nullpunktes des $(x)_n$ -Raumes; Z sei ein Gebiet des $(z)_k$ -Raumes. Durch die analytische Gleichung:

$$(1) \quad D(x, z) = 0$$

werde die analytische Menge $V(z)$ bestimmt.

A. $n = 1$. Es gebe einen Kreis $X \subset \mathfrak{U}$ um O in der x -Ebene und ein Gebiet $\mathfrak{B} \subset Z$, derart, daß für $z \in \mathfrak{B}$ die zu X gehörenden Lösungen der Gleichung (1) eine ganz algebraische Gleichung:

$$(2) \quad p(x/z) = 0$$

erfüllen. Dabei sei p ein Polynom von x mit höchstem Koeffizienten 1, dessen weitere Koeffizienten in \mathfrak{Z} analytisch sind. Für $z \in \mathfrak{Z}$ besitze p im Innern von X lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzel auf dem Rande von X . Dann heiße $V(z)$ Schar für $\{X, \mathfrak{Z}\}$.

B. Scharen seien für Dimensionen $\leq n-1$ erklärt. Es gebe Gebiete $X \subset \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Z} \subset Z$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Eine lineare Transformation:

$$(3) \quad (y_n) = L(x)_n$$

überführe X in das Kreiszylindergebiet Y , das topologisches Produkt des in der y_n -Ebene gelegenen Kreises k und des im $(y)_{n-1}$ Raum liegenden Kreiszylindergebietes Y' sei:

$$(4) \quad Y = \{Y', k\}.$$

2. Es gebe im $(y)_{n-1}$ -Raum eine Schar analytischer Mannigfaltigkeiten $m(z)$ für $\{Y', \mathfrak{Z}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für Parameter $z \in \mathfrak{Z}$ genüge jeder Punkt von $V(z)$, der in X liegt und dessen Projektion in den $(y)_{n-1}$ -Raum nicht zu $m(z)$ gehört, der Gleichung:

$$(5) \quad p(y_n/(y)_{n-1}, z) = 0.$$

Dabei sei p ein Polynom von y_n mit höchstem Koeffizienten 1, dessen weitere Koeffizienten in $\{Y', \mathfrak{Z}\}$ analytisch sind.

b) Wenn $\{(y)_{n-1}, z\} \in \{Y' - m(z), \mathfrak{Z}\}$ ist, besitze p im Innern von k lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzel auf dem Rande von k . Genügt $V(z)$ den angegebenen Bedingungen, so heiße $V(z)$ Schar für $\{X, \mathfrak{Z}\}$.

1.12. Folgerung. $V(z)$ sei Schar für $\{X, \mathfrak{Z}\}$. Die analytische Abbildung: $(z)_k = \varphi(t)_r$ [vgl. Definition IV, (3)] bilde das Gebiet \mathfrak{T} in \mathfrak{Z} ab. Dann ist die analytische Menge $V'(t)$, bestimmt durch die Gleichung:

$$(1) \quad D(x, \varphi_1, \dots, \varphi_k) = D'(x, t) = 0$$

Schar für $\{X, \mathfrak{T}\}$.

1.13. Definition VII. Die Funktion $D((x)_n, (z)_k)$ sei analytisch im Gebiet $\{X, Z\}$. Es sei G ein Gebiet in X . Durch die Gleichung

$$(1) \quad D(x, z) = 0$$

werde die analytische Menge $V(z)$ bestimmt.

Es sei \mathfrak{Z} ein Teilgebiet von Z . $V(z)$ heiße G -Schar für \mathfrak{Z} , wenn es für jeden Punkt $x' \in G$ eine Umgebung $U(x') \subset G$ gibt, derart, daß $V(z)$ Schar für $\{U(x'), \mathfrak{Z}\}$ ist, vgl. Definition VI, Nr. 1.11.

$V(z)$ heiße G -Schar im Punkte $z^0 \in Z$, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{Z}(z^0)$ von z^0 gibt, so daß $V(z)$ G -Schar für $\mathfrak{Z}(z^0)$ ist.

Punkte z^0 , in denen $V(z)$ keine G -Schar ist, sollen G -Ausnahmepunkte genannt werden.

1.14. Folgerung. Es sei $V(z)$ G -Schar für \mathfrak{Z} . Die analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)_r$ bilde das Gebiet \mathfrak{T} in \mathfrak{Z} ab (vgl. Nr. 1.8). Dann ist $V'(t)_r = V(\varphi(t)_r)$ G -Schar für \mathfrak{T} .

1.15. Satz 1. Die Funktion $D((x)_n, (z)_k)$ sei analytisch im Gebiet $\{X, Z\}$. $V(z)$ sei die analytische Menge $D = 0$. Es sei A ein (abgeschlossener) Bereich im Innern von X .

a) Es seien $\zeta \in Z$ und $Z(\zeta)$ eine beliebige Umgebung von ζ : $Z(\zeta) \subset Z$ vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset Z(\zeta)$ und dazu ein Gebiet G :

$$(1) \quad A \subset G \subset X,$$

derart, daß $V(z)$ G -Schar für $\mathfrak{B}(z')$ ist (vgl. Definition VII).

b) $k = 1$. Zu jedem Punkte $z^0 \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(z^0)$ und dazu ein Gebiet G [vgl. (1)], derart, daß in $\mathfrak{B}(z^0)$ außer evtl. z^0 kein G -Ausnahmepunkt für $V(z)$ liegt.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n .

I. $n = 1$. 1 a) Es seien ζ und eine Umgebung $Z(\zeta) \subset Z$ beliebig vorgegeben. Im Punkte $z^0 \in Z(\zeta)$ sei $D(x, z^0) \neq 0$.

1 b) $k = 1$. z^0 sei beliebig in Z . Im Falle $D(x, z^0) = 0$ ist z^0 G -Ausnahmepunkt (für jedes Gebiet $G \supset A$). Wir dividieren $D(x, z)$ durch eine solche Potenz von $z - z^0$, daß der Quotient $D'(x, z)$ analytisch in $\{X, Z\}$ und $D'(x, z^0) \neq 0$ ist.

2. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt von A . Auf $D(x, z)$ (bei $k = 1$ auf $D'(x, z)$) wenden wir im Punkte $\{x_0, z^0\}$ den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz bei Auszeichnung der Variablen $x' = x - x_0$ an.

$$(1) \quad D = p_{x_0}(x'/z) \cdot e_{x_0}(x', z).$$

Es werde ein Gebiet $H_{x_0} = \{U(x_0), Z_{x_0}(z^0)\}$ mit den folgenden Eigenschaften bestimmt:

- a) $U(x_0) \subset X$ sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt x_0 .
- b) p_{x_0} und e_{x_0} seien in H_{x_0} analytisch. Es gelte $e_{x_0} \neq 0$ in H_{x_0} .
- c) Für $z' \in Z_{x_0}(z^0)$ sollen die Wurzeln von $p_{x_0}(x'/z')$ im Innern von $U(x_0)$ liegen. Wenn $p_{x_0} = 1$ ist, entfällt diese Bedingung.

3. Der Bereich A wird von endlich vielen Gebieten $U(x^i), i = 1, \dots, h$, überdeckt.

$$(2) \quad A \subset G = \bigcup_{i=1}^h U(x^i) \subset X.$$

$$(3) \quad \mathfrak{B}(z^0) = \bigcap_{i=1}^h Z_{x^i}(z^0).$$

Die Nullstellen von D (bzw. D') in $\{G, \mathfrak{B}(z^0)\}$ verteilen sich auf die Gebiete $\{U(x^i), \mathfrak{B}(z^0)\}, i = 1, \dots, h$. Im i . Gebiet sind sie Nullstellen des in $\{x^i, z^0\}$ ausgezeichneten Pseudopolynoms $p_{x^i}(x - x^i/z)$. Wir dürfen auch annehmen, daß die Diskriminante $d_i(z)$ von p_{x^i} nicht identisch verschwindet, sonst verschaffen wir uns aus p_{x^i} mit algebraischen Mitteln ein solches Polynom.

4. a) Im Punkte $z' \in \mathfrak{B}(z^0) \cap Z(\zeta)$ seien die Funktionen $d_i(z), i = 1, \dots, h$, von 0 verschieden; $\mathfrak{B}(z')$ sei eine Umgebung von z' , in der alle Punkte dieselbe Eigenschaft haben. Ist nun x' ein beliebiger Punkt von G , so gehört er zu einem Gebiet $U(x^i)$; $V(z)$ ist Schar für $\{U(x^i), \mathfrak{B}(z')\}$. Daher ist $V(z)$ G -Schar für $\mathfrak{B}(z')$. Das ist die Behauptung a).

4. b) $k = 1$. Die Funktionen $d_i(z)$ haben in einer Umgebung von z^0 , außer evtl. z^0 , keine weitere Nullstelle. Daraus folgt wie in 4. a) die Behauptung b).

II. Induktionsbeweis. Satz 1 sei für Dimensionen $\leq n - 1$ bewiesen.

1. a) Es seien ζ und eine Umgebung $Z(\zeta) \subset Z$ beliebig vorgegeben. z^0 sei ein Punkt in $Z(\zeta)$ mit $D(x, z^0) \neq 0$.

1. b) $k = 1$. z^0 sei beliebig in Z . Im Falle $D(x, z^0) \equiv 0$ ist z^0 G -Ausnahmepunkt (für jedes Gebiet $G \supset A$). Wir dividieren $D(x, z)$ durch eine Potenz von $z - z^0$, so daß der Quotient $D'(x, z)$ analytisch ist und für $z = z^0$ nicht identisch verschwindet.

2. Es sei x^0 ein beliebiger Punkt von A . Auf $D(x, z)$ [bzw. bei $k = 1$ auf $D'(x, z)$] wenden wir im Punkte $\{x^0, z^0\}$ den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an. Vorher ist evtl. eine lineare Transformation der Variablen x erforderlich.

$$(4) \quad (y)_n = L_{x^0}(x - x^0)_n,$$

$$(5) \quad D \text{ (bzw. } D') = p_{x^0}(y_n/(y)_{n-1}, z) \cdot e_{x^0}(y, z).$$

Es werde ein Gebiet H_{x^0} mit folgenden Eigenschaften bestimmt:

- $H_{x^0} = \{W(x^0), Z_{x^0}(z^0)\}$.
- $W(x^0) \subset X, Z_{x^0}(z^0) \subset Z(\zeta)$.
- p_{x^0}, e_{x^0} seien in H_{x^0} analytisch, $e_{x^0} \neq 0$ in H_{x^0} .
- $Y(x^0) = L_{x^0}(W(x^0))$ sei ein Zylindergebiet im $(y)_n$ -Raum. Es sei $Y(x^0) = \{Y'(x^0), K(x^0)\}$, wobei $Y'(x^0)$ ein Kreiszylindergebiet im $(y)_{n-1}$ -Raum und $K(x^0)$ ein Kreis in der y_n -Ebene sind.
- Für $\{(y)_{n-1}, z\} \in \{Y'(x^0), Z_{x^0}(z^0)\}$ sollen die Wurzeln des Polynoms p_{x^0} im Kreise $K(x^0)$ liegen. Für $p_{x^0} = 1$ entfällt diese Bedingung.

Wir nehmen an, daß die Diskriminante des Polynoms $p_{x^0}: d_{x^0}((y)_{n-1}, z) \neq 0$ sei.

3. Es seien $A(x^0)$ ein Kreiszylinderbereich mit dem Zentrum $(y)_{n-1} = (0)_{n-1}$, der ganz im Innern von $Y'(x^0)$ liege, und:

$$B(x^0) = \{A(x^0), K(x^0)\}, \quad C(x^0) = L_{x^0}^{-1}(B(x^0)).$$

Dann gilt: $C(x^0) \subset W(x^0) \subset X$.

4. Der Bereich A wird von endlich vielen Punktmengen $C(x^0)$ überdeckt.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^h C(x^i) \subset X.$$

Dann sei:

$$Z(z^0) = \bigcap_{i=1}^h Z_{x^i}(z^0).$$

5. Um die Induktionsvoraussetzung auf die analytische Menge $v_i(z)$ mit der Gleichung $d_{xi}((y)_{n-1}, z) = 0$ anzuwenden, setzen wir $A^{(i)} = A(x^i)$, $X^{(i)} = Y'(x^i)$ und nehmen das z -Gebiet $Z(z^0)$.

6. a) Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es in $Z(z^0)$ einen Punkt z'_i mit einer Umgebung $\mathfrak{B}(z'_i)$ und dazu ein Gebiet $G^{(i)}$:

$$(6) \quad A^{(i)} \subset G^{(i)} \subset X^{(i)},$$

derart, daß $v_i(z)$ $G^{(i)}$ -Schar für $\mathfrak{B}(z'_i)$ ist. Da i nur endlich viele Werte hat, können wir z'_i und $\mathfrak{B}(z'_i)$ so wählen, daß diese Aussage mit dem gleichen Punkt und der gleichen Umgebung für $i = 1, \dots, h$ zutrifft.

6. b) $k = 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}^{(i)}(z^0)$ und dazu ein Gebiet $G^{(i)}$ [vgl. (6)], derart, daß in $\mathfrak{B}^{(i)}(z^0)$ — außer evtl. z^0 — kein $G^{(i)}$ -Ausnahmepunkt für $v_i(z)$ liegt. Es sei:

$$\mathfrak{B}(z^0) = \bigcap_{i=1}^h \mathfrak{B}^{(i)}(z^0) \cap Z(z^0).$$

7. Wir setzen:

$$(7) \quad D^{(i)} = \{G^{(i)}, K(x^i)\}, \quad G^{(i)} = L_{x^i}^{-1}(D^{(i)}), \quad G = \bigcup_{i=1}^h G^{(i)}.$$

Dann gilt:

$$(8) \quad A \subset G \subset X.$$

8. Es seien z' und die Umgebung von z' : $\mathfrak{B}(z') \subset \mathfrak{B}(z^0)$, so bestimmt, daß für jedes $i = 1, \dots, h$ $v_i(z)$ $G^{(i)}$ -Schar für $\mathfrak{B}(z')$ ist. Wir behaupten, daß $V(z)$ eine G -Schar für $\mathfrak{B}(z')$ ist. Zum Beweise nehmen wir einen Punkt x' von G . Dann liegt x' in einem Gebiete $G^{(i)}$. Der Punkt kann auch in mehreren Gebieten liegen, dann besteht die folgende Überlegung für jedes von diesen. Es seien nach (4):

$$(y')_n = L_{x^i}(x' - x^i)_n \text{ und } (y')_n = \{(y')_{n-1}, y'_n\}.$$

Nun liegen nach (7) $(y')_{n-1}$ in $G^{(i)}$ und y'_n in $K(x^i)$. Nach 6. a), 6. b) und 8. gibt es eine Umgebung $\Omega'(y')_{n-1}$ von $(y')_{n-1}$, die zu $G^{(i)}$ gehört, derart, daß $v_i(z)$ Schar für $\{\Omega'(y')_{n-1}, \mathfrak{B}(z')\}$ ist. Wir setzen:

$$\Omega(y')_n = \{\Omega'(y')_{n-1}, K(x^i)\} \text{ und } \Psi(x') = L_{x^i}^{-1}(\Omega(y')_n).$$

$\Psi(x')$ ist eine Umgebung von x' und gehört zu $G^{(i)}$ und daher zu G . Wir zeigen: $V(z)$ ist Schar für $\{\Psi(x'), \mathfrak{B}(z')\}$.

9. Da $\{\Psi(x'), \mathfrak{B}(z')\}$ in H_{x^i} liegt, sind die Nullstellen von D in diesem Gebiet Lösungen der Gleichung $p_{xi}(y_n/(y)_{n-1}, z) = 0$. Für $\{(y)_{n-1}, z\} \in \{\Omega'(y')_{n-1}, \mathfrak{B}(z')\} \subset \{Y(x^i), Z_{x^i}(z^0)\}$ liegen die Wurzeln des Polynoms p_{xi} im Kreise $K(x^i)$ [vgl. 2. e)]. Diese Wurzeln sind auch alle verschieden, es sei denn $\{(y)_{n-1}, z\}$ Nullstelle von d_{xi} [vgl. 5.], also $\{(y)_{n-1}, z\} \in v_i(z)$. Es ist jedoch $v_i(z)$ Schar für $\{\Omega'(y')_{n-1}, \mathfrak{B}(z')\}$. Nach Definition VI ist $V(z)$ Schar für $\{\Psi(x'), \mathfrak{B}(z')\}$.

10. Da x' beliebig in G gewählt werden kann, folgt nach Definition VII, Nr. 1.13, unsere Behauptung.

1.16. Definition VIII. Die parametrisch von z abhängige analytische Menge $(M^{(e)}(z))$ gestatte im Gebiet $\{U, Z\}$ eine V.K.-Darstellung (vgl. Definition III, Nr. 1.6 und Definition V, Nr. 1.10).

(1) $(x)_n = L(u - u^0)_n$, $(M^{(e)}(z)) = \text{V.K.D.}[x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z]$, $\varrho = \sigma + k$. Es seien: $X = L(U)$ und $X = \{X^{(e)}, X^{(n-e)}\}$. Die Verzweigungsmannigfaltigkeit $V(z)$ von $(M^{(e)}(z))$ werde durch die Gleichung:

$$(2) \quad D((x)_\sigma, z) = 0$$

gegeben.

a) $\varrho = k$ ($\sigma = 0$). In Z liege keine Nullstelle von $D(z)$.

b) $\varrho > k$ ($\sigma > 0$). $V(z)$ sei eine $X^{(\sigma)}$ -Schar für Z (vgl. Definition VII, Nr. 1.13).

Wenn die V.K.-Darstellung von $(M^{(e)}(z))$ den Bedingungen a) bzw. b) genügt, nennen wir sie *ausgezeichnet*.

1.17. Folgerung 1. Es sei $(M^{(e)}(z))$ eine analytische Menge mit einer ausgezeichneten V.K.-Darstellung im Gebiet $\{U, Z\}$. Es sei Z einfach zusammenhängend. Es sei $\varrho = k$. Nach dem Monodromiesatz ist jeder Zweig $x_j^{(\lambda)}(z)$, $j = 1, \dots, n$, (Definition III, Nr. 1.6), eine eindeutige analytische Funktion in Z . $(M^{(k)}(z))$ besteht aus einer endlichen Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten

(1) $(x)_n = L(u - u^0)_n$, $x_j = x_j^{(\lambda)}(z)$, $j = 1, \dots, n$, $x_j^{(\lambda)}$ analytisch in Z ; $\lambda = 1, \dots, N$.

Bei jeder Spezialisierung $z = z' \in Z$ geht $(M^{(k)}(z))$ in N verschiedene Punkte über. $(M^{(k)}(z))$ ist irreduzibel, wenn $N = 1$ ist.

Folgerung 2. Es sei $(M^{(e)}(z))$ eine analytische Menge mit einer ausgezeichneten V.K.-Darstellung im Gebiet $\{U, Z\}$. Die analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)_r$ bilde das Gebiet T in Z ab. Durch diese Abbildung entstehe aus $(M^{(e)}(z))$ die analytische Menge $(M^{(e+r-k)}(t))$. Diese analytische Menge besitzt eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{U, T\}$.

Beweis. Man beachte, daß wegen der Definitionen VII und VIII für jedes $z' \in Z$ $D((x)_\sigma, z') \neq 0$ gilt, so daß die Definition IV auf die Substitution $(z)_k = \varphi(t)_r$ anwendbar ist. Wegen Nr. 1.14 ist die V.K.-Darstellung von $(M^{(e+r-k)}(t))$ auch ausgezeichnet.

1.18. Satz 2. Die parametrisch von z abhängige analytische Menge $(M^{(e)}(z))$ gestatte im Gebiet $\{U, Z\}$ eine V.K.-Darstellung (vgl. Definition III und Definition V). Es sei B ein (abgeschlossener) Bereich in U .

a) Es seien $\zeta \in Z$ und $Z(\zeta) \subset Z$ eine beliebige Umgebung von ζ . Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset Z(\zeta)$ und dazu ein Gebiet G :

$$(1) \quad B \subset G \subset U,$$

derart, daß $\{G, \mathfrak{B}(z')\}$ V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)}(z))$ ist und die V.K.-Darstellung von $(M^{(e)}(z))$ in diesem Gebiet ausgezeichnet ist (vgl. Definition VIII).

b) $k = 1$. Zu jedem Punkt $z_0 \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(z_0)$ und dazu ein Gebiet G [vgl. (1)], derart, daß jeder Punkt z' von $\mathfrak{B}(z_0)$ — evtl. nur mit Ausnahme von z_0 — eine Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset \mathfrak{B}(z_0)$ besitzt, so daß $\{G, \mathfrak{B}(z')\}$ V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)}(z))$ ist und die V.K.-Darstellung von $(M^{(e)}(z))$ in diesem Gebiet ausgezeichnet ist.

Beweis. 1. Es seien:

$$(2) \quad (x)_n = L(u - u^0)_n, \quad (M^{(e)}(z)) = \text{V.K.D.}[x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z], \quad \sigma = \varrho - k.$$

$$(3) \quad X = L(U), \quad X = \{X^{(\sigma)}, X^{(n-\sigma)}\}.$$

Die Verzweigungsmannigfaltigkeit von $(M^{(e)}(z))$ sei $V(z)$; sie werde durch die Gleichung:

$$(4) \quad D((x)_\sigma, z) = 0$$

bestimmt. Bezüglich der verwendeten Bezeichnungen vgl. Definition III.

2. $\varrho = k$ ($\sigma = 0$). Wir setzen $G = U$.

a) Es werde $\mathfrak{B}(z')$ so gewählt, daß für $z \in \mathfrak{B}(z')$ $D(z) \neq 0$ ist.

b) $k = 1$. $\mathfrak{B}(z_0)$ sei eine Umgebung von z_0 , in der außer z_0 keine Nullstelle von $D(z)$ liegt.

3. $\varrho > k$ ($\sigma > 0$). Es sei $B' = L(B)$; dann gilt:

$$(5) \quad B' \subset X.$$

Die Projektion von B' in den $(x)_\sigma$ -Raum sei $A^{(\sigma)}$, und die Projektion von B' in den $\{x_{\sigma+1}, \dots, x_n\}$ -Raum sei $A^{(n-\sigma)}$. Es gelten:

$$(6) \quad A^{(\sigma)} \subset X^{(\sigma)}, \quad A^{(n-\sigma)} \subset X^{(n-\sigma)}.$$

Die Anwendung von Satz 1 liefert folgendes Ergebnis:

a) Es seien $\zeta \in Z$ und $Z(\zeta) \subset Z$ eine beliebige Umgebung von ζ . Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset Z(\zeta)$ und dazu ein Gebiet $G^{(\sigma)}$:

$$(7) \quad A^{(\sigma)} \subset G^{(\sigma)} \subset X^{(\sigma)},$$

derart, daß $V(z)$ $G^{(\sigma)}$ -Schar für $\mathfrak{B}(z')$ ist.

b) $k = 1$. Zu jedem Punkte $z_0 \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(z_0)$ und dazu ein Gebiet $G^{(\sigma)}$ (vgl. (7)), derart, daß in $\mathfrak{B}(z_0)$ — außer evtl. z_0 — kein $G^{(\sigma)}$ -Ausnahmewert für $V(z)$ liegt. $\mathfrak{B}(z')$ sei so gewählt, daß $V(z)$ $G^{(\sigma)}$ -Schar für $\mathfrak{B}(z')$ ist.

4. Wir setzen: $G' = \{G^{(\sigma)}, X^{(n-\sigma)}\}$. Nun ist $\{G', \mathfrak{B}(z')\}$ V.K.D.-Gebiet für die analytische Menge $M^{(e)}(z)$. Das kann man direkt anhand der Definition III beweisen; es folgt aber auch aus Definition IV mit $\mathfrak{T} = \{G^{(\sigma)}, \mathfrak{B}(z')\}$ und der identischen Abbildung von \mathfrak{T} in $\{X^{(\sigma)}, Z\}$. Es sei $G = L^{-1}(G')$. Dann haben wir (1). Offenbar ist die V.K.-Darstellung von $M^{(e)}(z)$ mit dem V.K.D.-Gebiet $\{G, \mathfrak{B}(z')\}$ ausgezeichnet. Damit ist Satz 2 bewiesen.

1.19. Die Anwendung des Begriffes der Schar beruht auf einem topologischen Satz, der eine Verallgemeinerung eines Satzes der Arbeit T I ist.

Satz 3. Durch die Gleichung:

$$(1) \quad D(x, z) = 0$$

werde eine G -Schar $V(z)$ für \mathfrak{B} bestimmt (vgl. Definition VII, Nr. 1.13). \mathfrak{B} sei einfach zusammenhängend. Es sei C eine Kurve, die in $\{G, \mathfrak{B}\}$ liegt, die punktfremd zu $V(z)$ ist und deren Endpunkte zu $\{G, z'\}$, $z' \in \mathfrak{B}$, gehören. Dann gibt es eine Kurve Γ , die auf $\{G, z'\}$ liegt, derart, daß C in $\{G, \mathfrak{B}\} - V(z)$ unter Festhaltung der Endpunkte auf Γ deformiert werden kann.

Beweis. 1. Der Beweis benutzt den Satz 2 in T I, der folgendermaßen lautet: $V(z)$ sei Schar für $\{X, \mathfrak{B}\}$; es sei \mathfrak{B} einfach zusammenhängend. C sei eine Kurve in $\{X, \mathfrak{B}\} - V(z)$, deren Endpunkte zu $\{X, z'\}$, $z' \in \mathfrak{B}$, gehören. Dann kann C in $\{X, \mathfrak{B}\} - V(z)$ unter Festhaltung der Endpunkte auf eine Kurve $\Gamma \subset \{X, z'\}$ deformiert werden.

2. Es sei $Q = \{x^*, z^*\} \in C$. Nach Definition VII gibt es eine Umgebung $U(x^*) \subset G$ von x^* , so daß $V(z)$ Schar für $\{U(x^*), \mathfrak{B}\}$ ist. Von endlich vielen Gebieten dieser Art wird C überdeckt:

$$(2) \quad C \subset \bigcup_{i=1}^{\Lambda} \{U(x^i), \mathfrak{B}\}.$$

Nun werde C in Teilbögen $c_i = Q_i, Q_{i+1}, i = 0, 1, \dots, h-1$, geteilt, derart, daß c_i in $\{U(x^i), \mathfrak{B}\}$ liegt. Q_0 und Q_h sind die Endpunkte von C . Es sei $Q_i = \{\xi_i, \zeta_i\}, \zeta_0 = \zeta_h = z'$. Die Punkte Q_i seien so gewählt, daß für $i = 0, 1, \dots, h$: $D(\xi_i, z') \neq 0$ ist. Da $D(x, z') \neq 0$ ist, kann das durch eine kleine Deformation von C unter Festhaltung der Endpunkte erreicht werden.

3. Wir betrachten den Teilbogen c_i . Da Q_i auf C , also nicht auf $V(z)$ liegt, gilt $D(\xi_i, \zeta_i) \neq 0$ und daher $D(\xi_i, z) \neq 0$. Wir können in \mathfrak{B} die Punkte ξ_i und z' durch eine Kurve γ_i verbinden, auf der $D(\xi_i, z) \neq 0$ ist. Die Kurve $d_i = \{\xi_i, \gamma_i\}$ liegt in $\{U(x^{i-1}), \mathfrak{B}\}$ und $\{U(x^i), \mathfrak{B}\}$. Sie verbindet die Punkte Q_i und $Q'_i = \{\xi_i, z'\}$ und ist punktfremd zu $V(z)$. In umgekehrter Richtung durchlaufen, werde diese Kurve d_i^{-1} genannt.

4. Wir deformieren C auf folgende Kurve C' :

$$C' = c_0 \cup d_1 \cup \bigcup_{i=1}^{h-1} (d_i^{-1} \cup c_i \cup d_{i+1}) \cup d_h^{-1} \cup c_h.$$

Es seien: $c'_0 = c_0 \cup d_1, c'_h = d_h^{-1} \cup c_h, c'_i = d_i^{-1} \cup c_i \cup d_{i+1}, i = 1, \dots, h-1, c'_i$ verbindet Q'_i und $Q'_{i+1}, Q'_0 = Q_0, Q'_h = Q_h$.

5. Da $V(z)$ Schar für $\{U(x^i), \mathfrak{B}\}$ ist, kann der in 1. zitierte Satz benutzt werden. c'_i kann in $\{U(x^i), \mathfrak{B}\} - V(z)$ unter Festhaltung der Endpunkte Q'_i, Q'_{i+1} auf eine Kurve I'_i deformiert werden, die zu $\{U(x^i), z'\}$ gehört.

Hieraus ergibt sich eine Deformation von C' auf $\Gamma = \bigcup_{i=0}^h I'_i$ mit den verlangten Eigenschaften.

1.20. Satz 4. Die parametrisch von z abhängige analytische Menge $(M^{(e)}(z))$ gestatte im Gebiet $\{U, Z\}$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung (vgl. Definition VIII, Nr. 1.16). Z sei einfach zusammenhängend. Die analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)_r$ bilde das einfach zusammenhängende Gebiet T in Z ab. Durch diese Substitution entstehe aus $(M^{(e)}(z))$ die analytische Menge $(M^{(e+r-k)}(t))$ (vgl. Definition IV, Nr. 1.8). Sie besitzt das V.K.D.-Gebiet $\{U, T\}$ und eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung in diesem Gebiet.

Die Gruppe $\mathfrak{G}(\{X^{(e)}, Z\})$ von $(M^{(e)}(z))$ ist identisch mit der Gruppe $\mathfrak{G}'(\{X^{(e)}, T\})$ von $(M^{(e+r-k)}(t))$. Zur Bedeutung der Bezeichnungen vgl. Definition V, Nr. 1.10 und Definition III, Nr. 1.6.

Beweis. 1. Aus Nr. 1.14 folgt die Aussage über die V.K.-Darstellung von $(M^{(e+r-k)}(t))$. Für $\varrho = k$ folgen die Behauptungen aus Nr. 1.17. Es sei also $\varrho > k$.

2. Sodann beweisen wir die Aussage über die Gruppe zunächst für eine spezielle Substitution, die Spezialisierung $z = z' \in Z$. Die Gruppe von $(M^{(e)}(z'))$ bezüglich $X^{(e)}$ sei $\mathfrak{g}(X^{(e)})$.

a) Jedes Element von $\mathfrak{g}(X^{(e)})$ gehört zu $\mathfrak{G}(\{X^{(e)}, Z\})$. Unmittelbare Folgerung aus $D((x)_{\varrho}, z') \neq 0$ und den Eigenschaften der V.K.-Darstellung (vgl. Definition IV, Nr. 1.8).

b) Jedes Element von $\mathfrak{G}(\{X^{(e)}, Z\})$ gehört zu $\mathfrak{g}(X^{(e)})$. Folgerung aus Satz 3 und bekannten Sätzen über analytische Fortsetzung.

3. Es sei $t' \in T$, $z' = \varphi(t')$. Aus dem soeben Bewiesenen folgen: $g(X^{(\sigma)}) = \mathfrak{G}(\{X^{(\sigma)}, Z\})$ und $g(X^{(\sigma)}) = \mathfrak{G}'(\{X^{(\sigma)}, T\})$ und hieraus die Behauptung.

1.21. Definition IX. Es seien $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ analytische Mengen, die parametrisch von z abhängen. $(M^{(e)}(z))$ habe eine V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{A, Z_1\}$. $(N^{(\sigma)}(z))$ habe eine V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{B, Z_2\}$ (vgl. Definitionen III und V). Es seien D Teilgebiet von $A \cap B$ und \mathfrak{B} Teilgebiet von $Z_1 \cap Z_2$. Unter der folgenden Voraussetzung gebrauchen wir die Ausdrucksweise: $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ befinden sich in $\{D, \mathfrak{B}\}$ „in allgemeiner Lage“ zueinander: Durch Durchschnittsbildung¹⁾ mit $z = z' \in \mathfrak{B}$ entstehen aus $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ analytische Mengen $(M^{(e-k)}(z'))$ bzw. $(N^{(\sigma-k)}(z'))$, die sich in der Umgebung jedes Punktes von D in einer analytischen Mannigfaltigkeit schneiden, deren Dimension kleiner als das Minimum der beiden Zahlen $\varrho - k$ und $\sigma - k$ ist.

1.22. Folgerung 1. Wenn $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ in $\{D, \mathfrak{B}\}$ in allgemeiner Lage zueinander sind, besitzt $(M^{(e)}(z))$ in keinem Punkte von $\{D, \mathfrak{B}\}$ einen Primkeim, der auf $(N^{(\sigma)}(z))$ liegt.

Folgerung 2. Die analytischen Mengen $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ seien in $\{D, \mathfrak{B}\}$ in allgemeiner Lage zueinander. Die analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)$, bilde das Gebiet T in \mathfrak{B} ab. Durch diese Substitution entstehe $(M^{(e+r-k)}(t))$ aus $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma+r-k)}(t))$ aus $(N^{(\sigma)}(z))$ (vgl. Definition IV, Nr. 1.8). Dann befinden sich $(M^{(e+r-k)}(t))$ und $(N^{(\sigma+r-k)}(t))$ in $\{D, T\}$ in allgemeiner Lage zueinander.

1.23. Satz 5. Es seien $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ analytische Mengen, die parametrisch von z abhängen (vgl. Definition V, Nr. 1.10). $(M^{(e)}(z))$ habe eine V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{A, Z_1\}$; $(N^{(\sigma)}(z))$ habe eine V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{B, Z_2\}$. Es seien D Teilgebiet von $A \cap B$ und Z Teilgebiet von $Z_1 \cap Z_2$. Der Durchschnitt $(M^{(e)}(z)) \cap (N^{(\sigma)}(z))$ sei eine analytische Menge, deren Dimension in jedem Punkte von $\{D, Z\}$ kleiner als das Minimum von ϱ und σ ist. H sei ein (abgeschlossener) Bereich in D . Es sei $z^0 \in Z$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Umgebung $Z(z^0)$ von z^0 und ein Gebiet G mit: $H \subset G \subset D$, ferner eine in $Z(z^0)$ analytische Funktion $g(z)$ mit folgender Eigenschaft: Ist z' ein Punkt von $Z(z^0)$, in dem $g(z') \neq 0$ ist, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(z')$ von z' , so daß $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(\sigma)}(z))$ in $\{G, \mathfrak{B}(z')\}$ in allgemeiner Lage zueinander sind.

Beweis. Es sei $\sigma \leq \varrho$. Wegen der Voraussetzung über $(M^{(e)}(z)) \cap (N^{(\sigma)}(z))$ gibt es eine Funktion $\Phi(x, z)$, die in $\{A, Z_1\}$ analytisch ist, auf $(M^{(e)}(z))$ identisch verschwindet und $\neq 0$ ist auf $(N^{(\sigma)}(z)) \cap \{D, Z\}$. Es sei $\mathfrak{P}_0 = \{x^0, z^0\} \in \{H, z^0\}$. Es gibt eine Umgebung von \mathfrak{P}_0 : $H_{x^0} = \{U(x^0), Z_{x^0}(z^0)\} \subset \{D, Z\}$, derart, daß die Punkte von $(N^{(\sigma)}(z))$ in H_{x^0} auf endlich vielen Primkeimen in \mathfrak{P}_0 liegen, (vgl. Folgerung 1, Nr. 1.7). Das Produkt der Normen von Φ bezüglich dieser Primkeime sei $\Psi_{x^0}((x)_{\sigma-k}, z)$ (vgl. Definition V, Nr. 1.10 und Folgerung 1, Nr. 1.7). Ψ_{x^0} ist analytisch in der Umgebung von $\{(x^0)_{\sigma-k}, z^0\}$, genauer in der Projektion von H_{x^0} in den $\{(x)_{\sigma-k}, z\}$ -Raum. Wegen unserer Voraussetzung über Φ ist $\Psi_{x^0} \neq 0$. Alle Punkte von $(M^{(e)}(z)) \cap (N^{(\sigma)}(z))$ in H_{x^0} genügen der

¹⁾ Vgl. Definition V, Nr. 1.10, Folgerung 1, Nr. 1.7 und Hilfssatz 2, Nr. 1.5.

Gleichung $\Psi_{x^i} = 0$. Von endlich vielen Gebieten $U(x^i)$, $i = 1, \dots, h$, wird H überdeckt. Es seien:

$$G = \bigcup_{i=1}^h U(x^i) \text{ und } Z(z^0) = \bigcap_{i=1}^h Z_{xi}(z^0).$$

Dann gilt: $H \subset G \subset D$. Diejenigen Punkte \bar{z} von $Z(z^0)$, für welche die Funktion $\Psi_{xi}((x)_{\sigma-k}, \bar{z})$ identisch in $(x)_{\sigma-k}$ verschwindet, befriedigen eine analytische Gleichung $g_i(z) = 0$, $g_i(z)$ analytisch in $Z(z^0)$. Wir setzen: $g(z) = \prod_{i=1}^h g_i(z)$.

Mit den so bestimmten G , $Z(z^0)$ und $g(z)$ ist die Aussage des Satzes richtig. Es sei nämlich $z' \in Z(z^0)$, $g(z') \neq 0$. Dann werde $\mathfrak{B}(z')$ so gewählt, daß $g(z) \neq 0$ in $\mathfrak{B}(z')$ ist. $(M^{(e)}(z))$ und $(N^{(o)}(z))$ sind in $\{G, \mathfrak{B}(z')\}$ in allgemeiner Lage zueinander wie aus Definition V, Nr. 1.10, Folgerung 1, Nr. 1.7 und Hilfssatz 2, Nr. 1.5 folgt.

1.24. Satz 6. Die parametrisch von z abhängige analytische Menge $(M^{(e)}(z))$ gestatte im Gebiet $\{U, Z\}$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung (vgl. Definition VIII, Nr. 1.16). Je zwei irreduzible Komponenten von $(M^{(e)}(z))^{1)}$ sind in $\{U, Z\}$ in allgemeiner Lage zueinander.

Beweis. Um einen indirekten Beweis zu führen, nehmen wir an, daß die beiden irreduziblen Komponenten $(M_1^{(e)}(z))$ und $(M_2^{(e)}(z))$ in $\{U, Z\}$ nicht in allgemeiner Lage zueinander sind. Dann gibt es ein $z' \in Z$ und einen Punkt $Q \in U$, derart, daß $(M_1^{(e-k)}(z'))$ und $(M_2^{(e-k)}(z'))$ im Punkte Q einen gemeinsamen Primkeim haben. Während also $(M_1^{(e)}(z))$ und $(M_2^{(e)}(z))$ nicht analytisch zusammenhängen (vgl. Nr. 1.7), trifft das für $(M_1^{(e-k)}(z'))$ und $(M_2^{(e-k)}(z'))$ zu. Das steht im Widerspruch zu Satz 4, der verlangen würde, daß die Gruppe $\mathfrak{G}(\{X^{(o)}, Z\})$ von $(M^{(e)}(z))$ übereinstimmt mit der Gruppe $\mathfrak{G}'(\{X^{(o)}, z'\})$ von $(M^{(e-k)}(z'))$.

§ 2. Analytische Mengen auf komplexen Mannigfaltigkeiten.

2.1. Definition X. A. Unter den folgenden Bedingungen heiße der topologische Raum \mathfrak{G} eine $2m$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit:

a) \mathfrak{G} lasse sich in jedem Punkte mit m komplexen (lokalen) Parametern versehen, d. h. zu jedem Punkte \mathfrak{P}_0 von \mathfrak{G} gebe es eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_0)$ und eine topologische Abbildung $T_{\mathfrak{P}_0}$, die $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_0)$ auf eine Umgebung U des Nullpunktes O des Raumes der m komplexen Variablen abbildet, wobei \mathfrak{P}_0 in O übergeht.

b) Die lokale Uniformisierung nach a) habe folgende Eigenschaft: Haben die bei der Parameterdefinition für \mathfrak{P}_1 bzw. \mathfrak{P}_2 abgebildeten Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1)$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2)$ einen nichtleeren Durchschnitt \mathfrak{D} , so sollen für die Punkte \mathfrak{P} von \mathfrak{D} die Parameter $(x^{(1)}(\mathfrak{P}))_m$ aus den Parametern $(x^{(2)}(\mathfrak{P}))_m$ mittels einer analytischen Transformation:

$$(1) \quad x_i^{(1)}(\mathfrak{P}) = \Phi_i(x^{(2)}(\mathfrak{P}))_m, \quad i = 1, \dots, m, \\ \Phi_i \text{ analytisch in } T_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{D}),$$

¹⁾ Vgl. Nr. 1.7.

hervorgehen, deren Funktionaldeterminante

$$(2) \quad \frac{\partial (\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{\partial (x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)})} \neq 0 \text{ in } T_{\mathfrak{P}_0}(\mathfrak{G}) \text{ ist.}$$

B. Die Funktion $f(\mathfrak{P})$ sei in einer Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}_0 \in \mathfrak{G}$ definiert. $f(\mathfrak{P})$ heiße analytisch (meromorph) in \mathfrak{P}_0 , wenn $f(\mathfrak{P})$ eine analytische (meromorphe) Funktion eines Systems zu \mathfrak{P}_0 gehöriger lokaler Parameter ist.

C. Die Punktmenge \mathfrak{M} auf \mathfrak{G} bestimmt in Punkte $\mathfrak{P}_0 \in \mathfrak{M}$ einen analytischen Mengenkeim, wenn es eine Umgebung \mathfrak{V} von \mathfrak{P}_0 gibt, die im Definitionsgebiet eines Systems $(x)_m$ von Ortsuniformisierenden von \mathfrak{P}_0 liegt, derart, daß $T_{\mathfrak{P}_0}(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{M})$ eine analytische Mannigfaltigkeit in der Umgebung des Nullpunktes O darstellt. Wenn diese analytische Mannigfaltigkeit in O irreduzibel ist, nennen wir den analytischen Mengenkeim von \mathfrak{M} in \mathfrak{P}_0 einen Primkeim.

D. Die Punktmenge \mathfrak{M} auf \mathfrak{G} heiße analytisch, wenn sie in jedem Punkte von \mathfrak{G} einen analytischen Mengenkeim bestimmt. Ist \mathfrak{P}_0 ein Punkt von \mathfrak{G} , so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0)$ und endlich viele Primkeime in \mathfrak{P}_0 : $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_0), \dots, \mathfrak{R}_h(\mathfrak{P}_0)$, derart, daß:

$$(3) \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0) = \bigcup_{i=1}^h (\mathfrak{R}_i(\mathfrak{P}_0) \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0))$$

gilt. Natürlich kann $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0)$ auch leer sein. Wir nennen $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{P}_0)$, $i = 1, \dots, h$, die zu \mathfrak{P}_0 gehörigen Primkeime von \mathfrak{M} .

2.2. Definition XI. A. Es sei $I_m(P)$ der Ring der Potenzreihen in den Variablen $x_1 - x_1^0, \dots, x_m - x_m^0$, die in einer Umgebung von $P = x^0$ konvergieren. $\mathfrak{i}(P)$ sei ein Ideal in $I_m(P)$. Dann gibt es eine Basis von $\mathfrak{i}(P)$: (f_1, \dots, f_h) und eine Umgebung X von P , derart, daß: a) die Potenzreihen f_v in X konvergieren, b) die Funktionen f_v in jedem Punkte x' von X die Basis desjenigen Ideals sind, das aus den Funktionen besteht, die auf der analytischen Mannigfaltigkeit:

$$(1) \quad f_v = 0, \quad v = 1, \dots, h,$$

verschwinden und in x' analytisch sind¹⁾. Wir nennen die Basis „kohärent“ in X .

B. Es sei $\mathfrak{i}(P)$ ein Primideal in $I_m(P)$ mit der in X kohärenten Basis f_v , $v = 1, \dots, h$. Es sei x' ein Punkt von X . Das Ideal $\mathfrak{i}'(x') = (f_1, \dots, f_h)$ im Ring $I_m(x')$ sei nicht das Einheitsideal. $\mathfrak{i}'(x')$ bestimmt eindeutig Primideale $\mathfrak{i}'_v(x')$ in $I_m(x')$. Jedes dieser Ideale heiße „direkte analytische Fortsetzung von $\mathfrak{i}(P)$ “. Diese Bezeichnung werde auch auf die den Idealen entsprechenden Primkeime übertragen. $\mathfrak{i}(P)$ und jede direkte analytische Fortsetzung von $\mathfrak{i}(P)$ haben gleiche Dimension.

C. Es sei \mathfrak{G} eine $2m$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 seien Punkte auf \mathfrak{G} . Falls in \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 verschiedene Ortsuniformisierende gegeben sind, sollen ihre Definitionsgebiete einen nichtleeren Durchschnitt haben. Die Ortsuniformisierenden seien in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1): x^{(1)}$ und in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2): x^{(2)}$.

¹⁾ Die Existenz einer solchen Basis und einer solchen Umgebung wird durch einen Satz von H. CARTAN, Thoreme 2, Bulle. in de la Société math. de France, t. 78 (1950) sichergestellt.

Die Parameterpunkte von \mathfrak{P}_1 bzw. \mathfrak{P}_2 seien O_1 bzw. O_2 . Gegeben seien Primideale $i_1(O_1)$ und $i_2(O_2)$ der Ringe $I_m(O_1)$ bzw. $I_m(O_2)$. Diesen entsprechen auf \mathfrak{G} Primkeime $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1)$ bzw. $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{P}_2)$. Es gebe einen Punkt \mathfrak{Q} auf $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2) \cap \mathfrak{R}_2(\mathfrak{P}_2)$, dessen Parameterpunkte $\bar{x}^{(1)}$ bzw. $\bar{x}^{(2)}$ seien, und dazu direkte analytische Fortsetzungen von $i_1(O_1)$ in $\bar{x}^{(1)}: \bar{i}(\bar{x}^{(1)})$ bzw. von $i_2(O_2)$ in $\bar{x}^{(2)}: \bar{i}(\bar{x}^{(2)})$ mit folgender Eigenschaft: Nach Ausführung der umkehrbar analytischen Transformation (1), Nr. 2.1, an den Funktionen der Basis von $\bar{i}(\bar{x}^{(1)})$ entstehe das Primideal $i^*(\bar{x}^{(2)})$ im Ring $I_m(\bar{x}^{(2)})$, und es gelte: $\bar{i}(\bar{x}^{(2)}) = i^*(\bar{x}^{(2)})$. Dann heiße $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1)$ analytische Fortsetzung von $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{P}_2)$.

D. Es seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Punkte der $2m$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} : i und \mathfrak{k} seien Primkeime in \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} . Es gebe endlich viele Punkte auf \mathfrak{G} : $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{h-1}, \mathfrak{P}_h = \mathfrak{B}$ und in diesen Primkeime: $i_0(\mathfrak{P}_0) = i, i_1(\mathfrak{P}_1), \dots, i_{h-1}(\mathfrak{P}_{h-1}), i_h(\mathfrak{P}_h) = \mathfrak{k}$ derart, daß $i_{j+1}(\mathfrak{P}_{j+1})$ analytische Fortsetzung von $i_j(\mathfrak{P}_j)$ ist, $j = 0, \dots, h-1$. Dann heiße i analytische Fortsetzung von \mathfrak{k} , und $i, i_1(\mathfrak{P}_1), \dots, i_{h-1}(\mathfrak{P}_{h-1}), \mathfrak{k}$ heiße eine i und \mathfrak{k} verbindende Kette von Primkeimen. Eine analytische Menge \mathfrak{M} auf \mathfrak{G} heiße (analytisch) zusammenhängend, wenn zwei beliebige Primkeime von \mathfrak{M} durch eine Kette von Primkeimen von \mathfrak{M} verbindbar sind. Wegen B haben alle Primkeime einer zusammenhängenden analytischen Menge die gleiche Dimension, die auch Dimension von \mathfrak{M} genannt werde.

E. Es sei \mathfrak{M} eine analytische Menge auf der $2m$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} . Wir definieren einen Raum $\tilde{\mathfrak{M}}$, dessen Punkte die Primkeime von \mathfrak{M} sind. Dieser Raum wird topologisch durch die folgende Umgebungsdefinition: Es seien $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ ein Primkeim im Punkte $\mathfrak{P} \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ eine Umgebung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{G} , derart, daß fr die Punkte von $\mathfrak{R}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ direkte analytische Fortsetzungen von $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ definiert sind (vgl. B und C). Ferner sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ eine beliebige Umgebung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{G} , die zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ gehre. Die Menge der direkten Fortsetzungen von $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ in Punkten von $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ sei eine Umgebung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{M} . Wir nennen $\tilde{\mathfrak{M}}$ den berlagerungsraum von \mathfrak{M} . Da jeder topologische Raum eindeutig in zusammenhängende Komponenten zerfällt, erhalten wir den Satz:

Jede analytische Menge läßt sich eindeutig in analytisch zusammenhängende Komponenten zerlegen.

F. Es sei \mathfrak{M} eine analytische Menge auf der $2m$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} . Wenn der berlagerungsraum $\tilde{\mathfrak{M}}$ von \mathfrak{M} zusammenhängend ist, nennen wir \mathfrak{M} irreduzibel. Wenn $\tilde{\mathfrak{M}}$ kompakt ist, nennen wir \mathfrak{M} kompakt.

2.3. *Folgerung.* Es sei:

$$(M^{(e)}) = \text{V.K.D.}[x_{e+1}, \dots, x_m/(x)_e] \text{ (vgl. Definition III).}$$

$(M^{(e)})$ sei irreduzibel im Sinne der Definition III, I. Dann ist $(M^{(e)})$ irreduzibel im Sinne der Definition XI, F (d. h. die berlagerungsmenge von $(M^{(e)})$ ist zusammenhängend).

2.4. *Definition XII.* Es sei \mathfrak{G} eine $2m$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Wir gebrauchen den Ausdruck: „Die analytische Menge \mathfrak{M} auf \mathfrak{G}

wird durch ein System von analytischen Gleichungen auf \mathfrak{G} bestimmt“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

\mathfrak{P} sei ein beliebiger Punkt von \mathfrak{G} . Es gebe eine Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P})$ von \mathfrak{P} mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{V}(\mathfrak{P})$ liege im Definitionsgebiet eines Systems zu \mathfrak{P} gehöriger lokaler Uniformisierender. Es ist dann $V = T_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}))$ eine Umgebung des Nullpunktes im $(x)_m$ -Raum. Es gebe ein System von analytischen Gleichungen:

$$(1) \quad F_j(x)_m = 0, \quad j = 1, \dots, h, \quad F_j \text{ analytisch in } V,$$

derart, daß $T_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}))$ aus den Lösungen dieses Systems besteht. Wenn \mathfrak{P} nicht auf \mathfrak{M} liegt, sei $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{M}$ leer.

b) Überschneiden sich die Umgebungen $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1)$ und $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2)$ und sind die Ortsuniformisierenden $(x^{(1)})_m$ bzw. $(x^{(2)})_m$, so besteht in $T_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2))$ nach Definition X, Nr. 2.1, eine umkehrbar analytische Transformation:

$$(2) \quad (x^{(1)})_m = \Phi(x^{(2)})_m.$$

Die Gleichungen für \mathfrak{M} in $T_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1))$ seien:

$$(3) \quad F_j^{(1)}(x^{(1)})_m = 0, \quad j = 1, \dots, h,$$

und in $T_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2))$:

$$(4) \quad F_j^{(2)}(x^{(2)})_m = 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Falls z. B. $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1)$ leer ist, setze man: $F_j^{(1)} = 1$, $j = 1, \dots, h$. Mit diesen Bezeichnungen und Festsetzungen gelte in $T_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2))$

$$(5) \quad F_j^{(2)}(x^{(2)})_m = F_j^{(1)}(\Phi(x^{(2)})_m) \cdot E_j(x^{(2)})_m, \quad j = 1, \dots, h.$$

Die Funktionen $E_j(x^{(2)})_m$ seien in $T_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2))$ analytisch und $\neq 0$.

2.5. Bei den folgenden Untersuchungen handelt es sich vor allem darum, die Abhängigkeit analytischer Mengen auf komplexen Mannigfaltigkeiten von Parametern zu untersuchen. Dazu legen wir eine komplexe Mannigfaltigkeit mit Eigenschaften zugrunde, die in der nächsten Definition genau angegeben werden.

Definition XIII. Es sei $(z)_k$ ein System von k komplexen Parametern. Z sei ein (endliches) Gebiet des $(z)_k$ -Raumes. \mathfrak{R} sei eine $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Unter der folgenden Voraussetzung nennen wir die $2m = 2n + 2k$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} topologisches Produkt von \mathfrak{R} und Z und schreiben:

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \{\mathfrak{R}, Z\}:$$

Ist $\mathfrak{P}_0 = \{P_0, z^0\}$ ein Punkt von \mathfrak{G} , $P_0 \in \mathfrak{R}$, $z^0 \in Z$, so habe die topologische Abbildung $T_{\mathfrak{P}_0}$ (vgl. Definition X A) folgende Gestalt:

$$(2) \quad T_{\mathfrak{P}_0}(u)_n = T_{P_0}(P), \quad \zeta_j = z_j - z_j^0, \quad j = 1, \dots, k;$$

dabei sei T_{P_0} eine zur Einführung der Ortsuniformisierenden in der Umgebung von P_0 auf \mathfrak{R} geeignete topologische Abbildung.

2.6. Es folgt jetzt eine Übertragung der Begriffe in den Definitionen III, Nr. 1.6 und V, Nr. 1.10, auf $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten.

Definition XIV. § 1. Wir definieren: A) kanonische Darstellungen von analytischen Mengen, B) verallgemeinerte kanonische Darstellungen von analytischen Mengen.

Es sei die $2m = 2n + 2k$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{S} topologisches Produkt der $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} und des (endlichen) Gebietes Z des $(z)_k$ -Raumes (vgl. Definition XIII). \mathfrak{M} sei eine analytische Menge auf \mathfrak{S} (vgl. Definition X D). Es seien \mathfrak{S} Teilgebiet von \mathfrak{R} und \mathfrak{Z} Teilgebiet von Z . Es gebe abzählbar unendlich viele Gebiete G_1, \dots, G_μ, \dots auf \mathfrak{R} , derart, daß:

$$(1) \quad \mathfrak{S} = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} G_\mu$$

ist, und folgende weitere Bedingungen gelten:

a) Die abgeschlossene Hülle \overline{G}_μ von G_μ liege im Definitionsgebiet $U_\mu = U(P_\mu)$ eines Systems zu P_μ gehörender lokaler Uniformisierender $(u^{(\mu)})_n$, die durch die topologische Abbildung T_μ eingeführt werden. Es seien:

$$\mathfrak{U}_\mu = T_\mu(U_\mu), \quad \mathfrak{S}_\mu = T_\mu(G_\mu); \quad \text{es gilt: } \overline{\mathfrak{U}}_\mu \subset \mathfrak{U}_\mu.$$

b) Es gebe endlich viele analytische Mengen:

$$(\mathfrak{M}_{\mu i}(z)), \quad i = 1, \dots, N_\mu, \quad N_\mu \geq 0,$$

mit:

$$(2) \quad \{G_\mu, \mathfrak{Z}\} \cap \mathfrak{M} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\mu} (\mathfrak{M}_{\mu i}(z)) \subset \{U_\mu, \mathfrak{Z}\} \cap \mathfrak{M}.$$

Es seien:

$$(M_{\mu i}(z)) = T'_\mu(\mathfrak{M}_{\mu i}(z)), \quad i = 1, \dots, N_\mu,$$

wobei T'_μ diejenige topologische Abbildung sei, die auf U_μ mit T_μ und auf Z mit der Identität übereinstimmt.

c) Nun unterscheiden wir die anfangs erwähnten Fälle A und B:

A. Es seien:

$$(3) \quad (x)_n = L^{(i)}(u^{(\mu)})_n \text{ eine lineare Transformation der } u^{(\mu)},$$

$$(4) \quad (M_{\mu i}(z)) = \text{K.D. } [x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z] \text{ (vgl. Definition V, Nr. 1.10).}$$

Es seien $\{\mathfrak{U}_{\mu i}, \mathfrak{Z}\}$ ein K.D.-Gebiet von $(M_{\mu i}(z))$ (vgl. Definition II, Nr. 1.4) und:

$$(5) \quad \overline{\mathfrak{U}}_\mu \subset \mathfrak{U}_{\mu i} \subset \mathfrak{U}_\mu, \quad i = 1, \dots, N_\mu,$$

$$(6) \quad (M_{\mu i}(z)) = M_{\mu i}(z) \cap \{\mathfrak{U}_{\mu i}, \mathfrak{Z}\}.$$

Die analytischen Mannigfaltigkeiten $M_{\mu i}(z)$ seien isoliert, d. h. für keinen Wert von i gebe es ein $i' \neq i$, so daß $M_{\mu i}(z)$ Teilmenge von $M_{\mu i'}(z)$ ist.

B. Mit (3) gelte:

$$(7) \quad (M_{\mu i}(z)) = \text{V.K.D. } [x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z] \text{ (vgl. Definition V, Nr. 1.10).}$$

$(M_{\mu i}(z))$ sei irreduzibel (vgl. Definition III, Nr. 1.6). Es sei $\{\mathfrak{U}_{\mu i}, \mathfrak{Z}\}$ ein V.K.D.-Gebiet von $(M_{\mu i}(z))$; es gelte (5), (6). Die analytischen Mengen $(M_{\mu i}(z))$ seien isoliert im folgenden Sinne: Es gebe ein Gebiet \mathfrak{V}_μ mit:

$$(8) \quad \overline{\mathfrak{U}}_\mu \subset \mathfrak{V}_\mu \subset \mathfrak{U}_{\mu i}, \quad i = 1, \dots, N_\mu,$$

und folgender Eigenschaft: Für keinen Wert von i gebe es ein $i' \neq i$ und einen Punkt $Q \in \{\mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}\}$, derart, daß $(M_{\mu i}(z))$ in Q einen Primkeim hat, der Teilmenge eines Primkeimes von $(M_{\mu i'}(z))$ in Q ist.

d) Unter den angegebenen Voraussetzungen (für $\mu = 1, 2, \dots$) gebrauchen wir folgende Ausdrucksweise: Die analytische Menge:

$$(9) \quad (\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}(z)) = \mathfrak{M} \cap \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$$

hängt in $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$ parametrisch von z ab. Sie gestattet: im Fall A eine kanonische Darstellung (K.D.) mit dem K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$, im Fall B eine verallgemeinerte kanonische Darstellung (V.K.D.) mit dem V.K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$. Mit Formeln schreiben wir diese Sachverhalte:

$$(10) \quad (\mathfrak{M}(z)) = \text{K.D. } \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\},$$

$$(11) \quad (\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}.$$

§ 2. Die K.- (bzw. V.K.)-Darstellung von $(\mathfrak{M}(z))$ heiße „vollständig“ auf \mathfrak{R} , wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ ist.

§ 3. Die V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}(z))$ heiße „ausgezeichnet“, wenn die V.K.-Darstellung jeder analytischen Menge $(M_{\mu i}(z))$ ausgezeichnet ist (vgl. Definition VIII, Nr. 1.16).

§ 4. Es gelte (11). Die analytische Menge $(\mathfrak{M}(z))$ befinde sich in $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$ in „allgemeiner Lage“, wenn es ein Gebiet \mathfrak{B}'_μ mit:

$$(12) \quad \mathfrak{S}_\mu \subset \mathfrak{B}'_\mu \subset \mathfrak{U}_{\mu i}, \quad i = 1, \dots, N_\mu,$$

gibt, so daß irgendzwei analytische Mengen $(M_{\mu i}(z))$ und $(M_{\mu j}(z))$, $i, j = 1, \dots, N_\mu$, in $\{\mathfrak{B}'_\mu, \mathfrak{B}\}$ in allgemeiner Lage zueinander sind (vgl. Definition IX, Nr. 1.21). Diese Bedingung gelte für alle μ .

§ 5. Es gelte (11). Es sei Z' ein Gebiet in \mathfrak{B} . Die Gebietseinteilung (1) von \mathfrak{S} habe folgende Eigenschaft: Sind $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\mu j}(z))$ analytische Mengen, die zu G_μ bzw. G_ν gehören, und haben sie einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte $Q \in \{G_\mu \cap G_\nu, Z'\}$, so gibt es für jedes $z' \in Z'$ einen Punkt $Q' = \{P', z'\}$ mit $P' \in G_\mu \cap G_\nu$, in dem sie einen gemeinsamen Primkeim besitzen. Unter dieser Voraussetzung nennen wir die Gebietseinteilung von \mathfrak{S} „normiert für das Gebiet Z' “.

§ 6. Die V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}(z))$ heiße „kompakt“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Sie sei vollständig auf \mathfrak{R} (vgl. § 2).

b) Es sei \mathfrak{R} kompakt. Dann genügen endlich viele Gebiete G_μ zur Darstellung von $(\mathfrak{M}(z))$.

Wie man leicht unter Benutzung von Definition III, F, Nr. 1.6, beweisen kann, gilt für kompakte V.K.-Darstellungen: Es sei \mathfrak{R} ein beliebiges Kompaktum in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{B}\}$. Dann ist $(\mathfrak{M}(z)) \cap \mathfrak{R}$ kompakt (vgl. Definition XI, Nr. 2.2.).

2.7. Die Folgerungen aus Definition XIV formulieren wir als Hilfssätze unter Verwendung der Bezeichnungen in Definition XIV. Zunächst kommen Hilfssätze über Spezialisierungen.

Hilfssatz 1. Aus $(\mathfrak{M}(z)) = \text{K.D. } \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$ folgt $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$. Der Beweis ergibt sich aus Folgerung 3, Nr. 1.7. Zur Begründung der Isoliertheits-

eigenschaft, die bei V.K.-Darstellungen anders als bei K.-Darstellungen formuliert ist, werde an den folgenden Satz erinnert¹⁾:

Satz. Es sei $K(P)$ ein Primkeim im Punkte P . $M(P)$ sei ein analytischer Mengenkeim in P . X sei eine Umgebung von P , in der $K(P)$ und alle Primkeime von $M(P)$ kanonische Darstellungen besitzen. Es sei $P' \in X \cap K(P) \cap M(P)$. $K(P)$ besitze in P' einen Primkeim $K'(P')$, der zu $M(P)$ gehöre. Dann ist $K(P)$ Teilmenge von $M(P)$.

2.8. Hilfssatz 2. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$. Es sei $(z)_k = \varphi(t)_r$ eine analytische Abbildung des Gebietes T in \mathfrak{Z} . Diese Substitution sei auf alle analytischen Mengen $(M'_{\mu i}(z))$ anwendbar und überführe sie in analytische Mengen $(M'_{\mu i}(t))$ (vgl. Definition IV, Nr. 1.8). Diese Abbildung erhalte die Isoliertheitseigenschaft, d. h. die analytischen Mengen $(M'_{\mu i}(t))$, $i = 1, \dots, N_{\mu}$, seien im Sinne der Definition XIV, § 1 B, in $\{\mathfrak{B}_{\mu}, T\}$ [vgl. loc. cit. (8)] isoliert. Dann erhalten wir durch die Substitution aus $(\mathfrak{M}(z))$ eine analytische Menge:

$$(1) \quad (\mathfrak{M}'(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, T\}.$$

Man beachte, daß $(M'_{\mu i}(t))$ nicht irreduzibel zu sein braucht. Um eine Darstellung von $(\mathfrak{M}'(t))$ mit irreduziblen Mengen gemäß Definition XIV, § 1 B, zu erhalten, sind diese Mengen in die irreduziblen Komponenten zu zerlegen. Die Komponenten eines $(M'_{\mu i}(t))$ erfüllen nach Folgerung 2, Nr. 1.7, die Isoliertheitseigenschaft; zwischen den Komponenten verschiedener $(M'_{\mu i}(t))$ besteht diese laut Voraussetzung.

2.9. Folgerung 1. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$. Es sei Z ein Teilgebiet von \mathfrak{Z} und $(z)_k = \varphi(z)_k$ die identische Abbildung von Z in \mathfrak{Z} . Diese Abbildung erhält die Isoliertheitseigenschaft (vgl. Nr. 2.8). Es ist also:

$$(1) \quad (\mathfrak{M}'(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}.$$

Folgerung 2. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$. Die analytische Menge $(\mathfrak{M}(z))$ befinde sich in $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$ in allgemeiner Lage (vgl. Definition XIV, § 4). Dann erhält jede analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)_r$ von T in \mathfrak{Z} die Isoliertheitseigenschaft. Der Beweis ist eine Folge der Folgerungen 1 und 2 in Nr. 1.22.

2.10. Hilfssatz 3. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei ausgezeichnet (vgl. Definition XIV, § 3). \mathfrak{Z} sei einfach zusammenhängend. Es sei $(z)_k = \varphi(t)_r$ eine analytische Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes T in \mathfrak{Z} . Diese Abbildung erhalte die Isoliertheitseigenschaft (vgl. Nr. 2.8). Dann ist die V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}'(t))$ ausgezeichnet. Die Mengen $(M'_{\mu i}(t))$ sind irreduzibel. Der Beweis folgt aus Satz 4, Nr. 1.20.

2.11. Hilfssatz 4. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei ausgezeichnet (Definition XIV, § 3). \mathfrak{Z} sei einfach zusammenhängend. $(\mathfrak{M}(z))$ befinde sich in $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\}$ in allgemeiner Lage (Definition XIV, § 4). Es sei $(z)_k = \varphi(t)_r$ eine analytische Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes T in \mathfrak{Z} . Diese Substitution überführe $(\mathfrak{M}(z))$ in $(\mathfrak{M}'(t))$. Dann ist $(\mathfrak{M}'(t))$ in $\{\mathfrak{E}, T\}$ in allgemeiner Lage. Zum Beweise vgl. Folgerung 2, Nr. 1.22, Nr. 2.9 und Hilfssatz 3.

¹⁾ H. KNESER: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. 1950, S. 386, § 2, IV.

2.12. Hilfssatz 5. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}\}$. Jede analytische Menge $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$, die $\{G_{\mu} \cap G_r, \mathfrak{Z}\}$ schneidet, besitzt eine oder mehrere analytische Fortsetzungen $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{Q} = \{Q, z'\}$ ein Punkt von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z)) \cap \{G_{\mu} \cap G_r, \mathfrak{Z}\}$, der durch die topologische Abbildung T_{μ}' (vgl. Definition XIV, § 1) auf den Punkt \mathfrak{Q}' von $(M_{\mu i}(z))$ abgebildet werde. Diese analytische Menge habe in \mathfrak{Q}' die Primkeime K_{α} . Da $\mathfrak{Q} \in (\mathfrak{M}(z)) \cap \{G_{\mu} \cap G_r, \mathfrak{Z}\}$ ist (vgl. Formel (2) in Definition XIV), also $\mathfrak{Q} \in (\mathfrak{M}(z)) \cap \{G_r, \mathfrak{Z}\}$ gilt, folgt aus derselben Formel, daß \mathfrak{Q} zu wenigstens einem $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$ gehört. Es sei $\mathfrak{Q} \in (\mathfrak{M}_{rj}(z))$, $r = 1, \dots, R$. \mathfrak{Q} werde durch T_r' auf den Punkt \mathfrak{Q}'' abgebildet. Die Primkeime von $(M_{rj}(z))$ in \mathfrak{Q}'' seien $L_{\beta}^{(r)}$. Nun beachte man, daß für Punkte von $G_{\mu} \cap G_r$ die Ortsuniformisierenden $u^{(\mu)}$ und $u^{(r)}$ durch eine umkehrbar analytische Transformation zusammenhängen. Diese transformiert die Primkeime $L_{\beta}^{(r)}$ in Primkeime $L_{\beta}^{(r)}$ des Punktes \mathfrak{Q}' . Da alle Punkte von $(\mathfrak{M}(z))$ in der Umgebung von \mathfrak{Q} auf den Mengen $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$ liegen, muß jeder Primkeim K_{α} zu einem Primkeim $L_{\beta}^{(r)}$ gehören. Er muß sogar mit einem solchen identisch sein; denn wäre K_{α} echter Teil von $L_{\beta}^{(r)}$, so wäre also die Dimension von $L_{\beta}^{(r)}$ größer als die Dimension von K_{α} . Nach genau demselben Schluß muß $L_{\beta}^{(r)}$ zu einem Primkeim K' gehören, den eine analytische Menge $(M_{\mu i'}(z))$, $i' \neq i$, in \mathfrak{Q}' hat. Dann wäre K_{α} echter Teil von K' . Das ist ein Widerspruch zu der Isoliertheitseigenschaft in Definition XIV § 1 B. Ist also $K_{\alpha} = L_{\beta}^{(r)}$, so ist $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$ analytische Fortsetzung von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$.

2.13. Hilfssatz 6. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei ausgezeichnet und befinde sich in $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}\}$ in allgemeiner Lage (vgl. Definition XIV, §§ 3,4). Die analytische Abbildung $(z)_t = \varphi(t)_r$ überführe $(\mathfrak{M}(z))$ in $(\mathfrak{M}'(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, T\}$. Es seien \mathfrak{Z} und T einfach zusammenhängend. Nach Nr. 2.10 sind die analytischen Mengen in der V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}'(t))$ die Mengen $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$, die durch die Substitution aus den $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ entstehen. $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$ besitze im Punkte $\mathfrak{Q}' = \{Q, t'\} \in \{G_{\mu} \cap G_r, T\}$ einen Primkeim, der Teilmenge von $(\mathfrak{M}'_{rj}(t))$ sei. Dann haben $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\mathfrak{Q} = \{Q, z' = \varphi(t')\}$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t')) = (\mathfrak{M}_{\mu i}(z'))$ im Punkte $Q \in G_{\mu} \cap G_r$ einen Primkeim \mathfrak{k} besitzt, der auf $(\mathfrak{M}'_{rj}(t')) = (\mathfrak{M}_{rj}(z'))$ liegt. Unter den Primkeimen von $(\mathfrak{M}_{rj}(z))$ in \mathfrak{Q} befindet sich ein Primkeim \mathfrak{R} mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{R}$. Nach Hilfssatz 5 ist \mathfrak{R} Primkeim einer analytischen Menge $(\mathfrak{M}_{\mu s}(z))$ in \mathfrak{Q} . Dann ist \mathfrak{k} im Durchschnitt von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z'))$ und $(\mathfrak{M}_{\mu s}(z'))$ enthalten. Die Dimension von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ sei ϱ . Da diese analytische Menge parametrisch von z abhängt, ist nach Hilfssatz 2, Nr. 1.5, die Dimension von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z'))$ $\varrho - k$. Der Durchschnitt von $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z'))$ und $(\mathfrak{M}_{\mu s}(z'))$ hat daher in der Umgebung von $Q \in G_{\mu}$ die Dimension $\geq \varrho - k$. Wegen der Voraussetzung über die allgemeine Lage folgt jetzt $i = s$ und daraus die Behauptung.

2.14. Hilfssatz 7. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei ausgezeichnet und befinde sich in \mathfrak{Z} in allgemeiner Lage; die Gebiets-einteilung von \mathfrak{S} sei normiert für das Gebiet $Z \subset \mathfrak{Z}$ (vgl. Definition XIV, §§ 3,

4, 5). Die analytische Abbildung $(z)_k = \varphi(t)$, bilde T in Z ab. Es seien T und \mathfrak{Z} einfach zusammenhängend. Die Substitution überführe $(\mathfrak{M}(z))$ in die analytische Menge $(\mathfrak{M}'(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, T\}$. Diese V.K.-Darstellung ist ausgezeichnet und $(\mathfrak{M}'(t))$ befindet sich in $\{\mathfrak{S}, T\}$ in allgemeiner Lage; die Gebietseinteilung von \mathfrak{S} ist normiert für das Gebiet T .

Beweis. 1. Nehmen wir an, daß die analytischen Mengen $(\mathfrak{M}'_{\mu_i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu_j}(t))$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\mathfrak{Q}' = \{Q, t'\} \in \{G_\mu \cap G_\nu, T\}$ haben. Nach Hilfssatz 6 haben daher $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\mathfrak{Q} = \{Q, z' = \varphi(t')\}$, $z' \in Z$.

2. Es seien \bar{t} ein beliebiger Punkt von T und $\bar{z} = \varphi(\bar{t}) \in Z$. Nach Definition XIV, § 5, gibt es einen Punkt $Q_1 \in G_\mu \cap G_\nu$, derart, daß $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$ im Punkte $\{Q_1, \bar{z}\}$ einen gemeinsamen Primkeim besitzen. Aus Nr. 1.9 folgt, daß $(\mathfrak{M}'_{\mu_i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu_j}(t))$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\{Q_1, \bar{t}\}$ haben. Das ist die Behauptung.

2.15. Hilfssatz 8. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei vollständig in \mathfrak{R} (vgl. Definition XIV, § 2). Es sei K Primkeim von $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ im Punkte $\mathfrak{Q} = \{Q, z'\}$. Es liege Q nicht in G_μ . Dann gibt es endlich viele analytische Mengen $(\mathfrak{M}_{\mu_\alpha i_\alpha}(z))$, $\alpha = 1, \dots, h$, mit folgenden Eigenschaften:

- $(\mathfrak{M}_{\mu_1 i_1}(z)) = (\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$.
- K ist Primkeim von $(\mathfrak{M}_{\mu_h i_h}(z))$ und Q gehört zu G_{μ_h} .
- $(\mathfrak{M}_{\mu_\alpha i_\alpha}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\mu_{\alpha+1} i_{\alpha+1}}(z))$ haben einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte $\mathfrak{Q}_\alpha = \{Q_\alpha, z^\alpha\}$, wobei Q_α in $G_{\mu_\alpha} \cap G_{\mu_{\alpha+1}}$ liegt, $\alpha = 1, \dots, h-1$.

Beweis. Da jeder Punkt von $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ nach Formel (2), Definition XIV, zu $(\mathfrak{M}(z))$ gehört, folgt die Behauptung aus dem analytischen Zusammenhang von $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ (vgl. Nr. 2.3) und der vorausgesetzten Vollständigkeit der V.K.-Darstellung. Die letztere bewirkt nämlich, daß ein Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$ im Punkte $\mathfrak{P} = \{P, \bar{z}\}$ stets Primkeim einer analytischen Menge $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$ ist, für die P im Gebiet G_ν liegt.

2.16. Satz 7. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$. Diese Darstellung sei vollständig in \mathfrak{R} (vgl. Definition XIV, §§ 1, 2). Die analytischen Komponenten von $(\mathfrak{M}(z))$ seien $(\mathfrak{M}^\alpha(z))$. Sie hängen in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ parametrisch von z ab; es gilt:

$$(1) \quad (\mathfrak{M}^\alpha(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

Die V.K.-Darstellung jeder analytischen Menge $(\mathfrak{M}^\alpha(z))$ ist vollständig in \mathfrak{R} . Für keinen Wert von α gibt es ein $\beta \neq \alpha$, derart, daß $(\mathfrak{M}^\alpha(z))$ einen Primkeim hat, der auf $(\mathfrak{M}^\beta(z))$ liegt.

Beweis. Die Zerlegung von $(\mathfrak{M}(z))$ in die analytischen Komponenten kann nach Hilfssatz 8 folgendermaßen erfolgen:

1. Es sei $D_{\mu\nu} = G_\mu \cap G_\nu$ leer. Dann werde keine Verbindung zwischen analytischen Mengen $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$ hergestellt.

2. Es sei $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ punktfremd zu $\{D_{\mu\nu}, \mathfrak{Z}\}$. Dann werde $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ mit keinem $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$ verknüpft.

3. Es sei $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z)) \cap \{D_{\mu\nu}, \mathfrak{Z}\}$ nicht leer. Nach Hilfssatz 5 besitzt $(\mathfrak{M}_{\mu_i}(z))$ eine oder mehrere analytische Fortsetzungen $(\mathfrak{M}_{\nu_j}(z))$; mit diesen werde es zusammengeheftet.

Die beschriebene Zusammenheftung werde für alle Werte von μ, ν und alle möglichen Kombinationen von Mengen $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z)), (\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ vorgenommen. Es entstehen so Reihen zusammengehefteter analytischer Mengen:

$$(2) \quad (\mathfrak{M}_{\mu_{\alpha} i_{\alpha}}(z)), (\mathfrak{M}_{\nu_{\alpha} j_{\alpha}}(z)), \dots, \alpha = 1, 2, \dots$$

Wir setzen:

$$(3) \quad (\mathfrak{M}^{\alpha}(z)) = (\mathfrak{M}_{\mu_{\alpha} i_{\alpha}}(z)) \cup (\mathfrak{M}_{\nu_{\alpha} j_{\alpha}}(z)) \cup \dots, \alpha = 1, 2, \dots$$

und zeigen, daß diese $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ die analytischen Komponenten von $(\mathfrak{M}(z))$ sind.

a) Die analytischen Mengen $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ sind zusammenhängend. Folgerung aus Definition XI, Nr. 2.2 und Nr. 2.3.

b) $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ und $(\mathfrak{M}^{\beta}(z))$, $\beta \neq \alpha$, hängen nicht analytisch zusammen.

Diese Behauptung werde indirekt bewiesen. Es gebe einen Punkt $\Omega = \{Q, z'\} \in \{\mathfrak{R}, \mathfrak{B}\}$ und in diesem Punkte einen Primkeim $t \subset (\mathfrak{M}_{\mu i}(z)) \subset (\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$, der auf einem Primkeim $\mathfrak{R} \subset (\mathfrak{M}_{\nu j}(z)) \subset (\mathfrak{M}^{\beta}(z))$ liege. Nach Hilfssatz 8 dürfen wir annehmen, daß $Q \in G_{\mu} \cap G_{\nu}$ ist. Nach Hilfssatz 5 ist dann \mathfrak{R} Primkeim eines $(\mathfrak{M}_{\mu s}(z))$ in $\{Q, z'\}$. Wegen der Isoliertheitsbedingung muß dann $s = i$ sein. $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ müßte dann auch in $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ liegen, was nicht möglich ist.

2.17. Satz 8. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{R}, \mathfrak{B}\}$. \mathfrak{B} sei einfach zusammenhängend. Diese V.K.-Darstellung sei:

a) vollständig in \mathfrak{R} ,

b) ausgezeichnet,

c) $(\mathfrak{M}(z))$ befinde sich in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{B}\}$ in allgemeiner Lage,

d) die Gebietseinteilung sei normiert für das Gebiet \mathfrak{B} (vgl. Definition XIV,

Nr. 2.6, §§ 1 B, 2, 3, 4, 5).

Die analytischen Komponenten von $(\mathfrak{M}(z))$ seien $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$, $\alpha = 1, 2, \dots$

I.

Die analytischen Mengen $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ besitzen die Eigenschaften a), b), c) und d).

II.

Es sei:

$$(1) \quad (z)_k = \varphi(t)_r$$

eine analytische Abbildung des einfach zusammenhängenden Gebietes T in \mathfrak{B} . Diese Transformation bilde $(\mathfrak{M}(z))$ auf $(\mathfrak{M}'(t))$ ab. Es gilt:

$$(2) \quad (\mathfrak{M}'(t)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{R}, T\}.$$

Diese V.K.-Darstellung besitzt die Eigenschaften a), b), c) und d). Die analytischen Komponenten von $(\mathfrak{M}'(t))$ seien $(\mathfrak{M}'_{\alpha}(t))$, $\alpha = 1, 2, \dots$. Für diese gilt:

$$(3) \quad (\mathfrak{M}'_{\alpha}(t)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{R}, T\}$$

mit den Eigenschaften a), b), c) und d).

III.

Die Substitution (1) stellt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Mengen $(\mathfrak{M}_{\alpha}(z))$ und $(\mathfrak{M}'_{\alpha}(t))$ her. Bei richtiger Verteilung der Indizes

entsteht $(\mathfrak{M}'_i(t))$ aus $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ durch die Substitution (1). Für keinen Wert von α gibt es ein $\beta \neq \alpha$ derart, daß $(\mathfrak{M}'_{\alpha}(t))$ einen Primkeim besitzt, der auf $(\mathfrak{M}_{\beta}(t))$ liegt.

Beweis. I. Wir wenden das Verfahren in Nr. 2.16 zur Komponentenzerlegung von $(\mathfrak{M}(z))$ an. Danach folgen die Eigenschaften a), b), c), d) für die $(\mathfrak{M}^{\alpha}(z))$ aus den entsprechenden Eigenschaften von $(\mathfrak{M}(z))$.

II. Die Formel (2) und die Eigenschaften a), b), c) und d) für $(\mathfrak{M}'(t))$ folgen aus den Hilfssätzen 2, 3, 4 und 7. Die Gebietseinteilung von \mathfrak{R} für die V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}'(t))$ ist dieselbe wie bei $(\mathfrak{M}(z))$. Die zugehörigen analytischen Mengen sind die Mengen $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$, die sich aus $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ mittels der Substitution (1) ergeben. Die Zerlegung von $(\mathfrak{M}'(t))$ in die analytischen Komponenten kann nach dem Verfahren in Nr. 2.16 erfolgen. So ergeben sich (3) und die Eigenschaften a), b), c) und d) für die Komponenten $(\mathfrak{M}'_{\alpha}(t))$.

III. Wir zeigen: Wenn die Zerlegungen von $(\mathfrak{M}(z))$ und $(\mathfrak{M}'(t))$ nach dem Verfahren in Nr. 2.16 erfolgen, so sind $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ dann und nur dann zusammenzuheften, wenn $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu j}(t))$ zusammenzuheften sind.

a) $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ sind zusammenzuheften, wenn sie einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte $\{Q, z\} \in \{G_{\mu} \cap G_{\nu}, \mathfrak{B}\}$ besitzen. Es seien t' ein beliebiger Punkt aus T und $z' = \varphi(t') \in \mathfrak{B}$. Wegen Eigenschaft d) gibt es einen Punkt $\{Q', z'\} \in \{G_{\mu} \cap G_{\nu}, \mathfrak{B}\}$, in dem $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim haben. Aus Nr. 1.9 folgt, daß $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu j}(t))$ im Punkte $\{Q', t'\} \in \{G_{\mu} \cap G_{\nu}, T\}$ einen gemeinsamen Primkeim haben. Es sind also $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu j}(t))$ zusammenzuheften.

b) Es seien $(\mathfrak{M}'_{\mu i}(t))$ und $(\mathfrak{M}'_{\nu j}(t))$ zusammenzuheften. Dann haben sie einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\{Q, t'\} \in \{G_{\mu} \cap G_{\nu}, T\}$. Aus Hilfssatz 6 folgt, daß $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim im Punkte $\{Q, z' = \varphi(t')\} \in \{G_{\mu} \cap G_{\nu}, \mathfrak{B}\}$ haben. Aus der bewiesenen Behauptung folgt die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den analytischen Komponenten von $(\mathfrak{M}(z))$ und $(\mathfrak{M}'(t))$, die durch die Substitution (1) hergestellt wird. Die letzte Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus Hilfssatz 6.

2.18. Es folgt nun eine zweite Gruppe von Hilfssätzen.

Hilfssatz 9. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}\}$. Die Anzahl der Gebiete G_{μ} sei endlich.

a) Es seien ζ mit der Umgebung $Z(\zeta) \subset \mathfrak{B}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset Z(\zeta)$, derart, daß $(\mathfrak{M}'(z)) = (\mathfrak{M}(z)) \cap \{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}(z')\}$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}(z')\}$ besitzt (vgl. Definition XIV, § 1 B, § 3).

b) $k = 1$. Zu jedem Punkt $z^0 \in \mathfrak{B}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(z^0)$, derart, daß jeder Punkt z' von $\mathfrak{B}(z^0)$ — evtl. nur mit Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $\mathfrak{B}(z') \subset \mathfrak{B}(z^0)$ besitzt, so daß $(\mathfrak{M}'(z))$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{B}(z')\}$ hat.

Beweis. Auf jede analytische Menge $(M_{\mu i}(z))$ wenden wir den Satz 2, Nr. 1.18 an, wobei $B = \overline{\mathfrak{U}}_{\mu i}$, $U = \mathfrak{U}_{\mu i}$, $Z = \mathfrak{B}$ gesetzt werde. Es gibt ein Gebiet $\mathfrak{B}(z')$ und für jede analytische Menge $(M_{\mu i}(z))$ ein Gebiet $\mathfrak{U}'_{\mu i}$ mit der Eigenschaft:

$$\overline{\mathfrak{U}}_{\mu i} \subset \mathfrak{U}'_{\mu i} \subset \mathfrak{U}_{\mu i}$$

derart, daß $(M'_{\mu i}(z)) = (M_{\mu i}(z)) \cap \{U'_{\mu i}, \mathfrak{G}(z')\}$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{U'_{\mu i}, \mathfrak{G}(z')\}$ hat. Im Fall a) liegt $\mathfrak{G}(z')$ in $Z(\zeta)$; im Fall b) gibt es eine Umgebung $\mathfrak{G}(z^0)$ von z^0 , derart, daß $\mathfrak{G}(z')$ als Umgebung jedes Punktes z' von $\mathfrak{G}(z^0)$ — evtl. jedoch mit Ausnahme von z^0 — gewählt werden kann. Zu beachten ist noch, daß die analytischen Mengen $(M'_{\mu i}(z))$ in die irreduziblen Komponenten zu zerlegen sind, um eine Darstellung gemäß Definition XIV, § 1 B, zu erhalten. Die Isoliertheitseigenschaft (vgl. loc. cit.) folgt für verschiedene Komponenten desselben $(M'_{\mu i}(z))$ aus Nr. 1.7 und für Komponenten verschiedener $(M'_{\mu i}(z))$ aus der entsprechenden Eigenschaft der $(M_{\mu i}(z))$.

2.19. Hilfssatz 10. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}\}$. Die Anzahl der Gebiete G_{μ} sei endlich.

a) Es seien ζ mit der Umgebung $Z(\zeta) \subset \mathfrak{G}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{G}(z')$, derart, daß $(\mathfrak{M}'(z')) = (\mathfrak{M}(z)) \cap \{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(z')\}$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(z')\}$ besitzt und in $\{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(z')\}$ in allgemeiner Lage ist (vgl. Definition XIV, §§ 1 B, 3, 4).

b) $k = 1$. Zu jedem Punkt $z^0 \in \mathfrak{G}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{G}(z^0)$, derart, daß jeder Punkt z' von $\mathfrak{G}(z^0)$ — evtl. mit Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $\mathfrak{G}(z')$ besitzt, derart, daß $(\mathfrak{M}'(z'))$ eine ausgezeichnete V.K.-Darstellung mit dem V.K.D.-Gebiet $\{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(z')\}$ besitzt und in $\{\mathfrak{G}, \mathfrak{G}(z')\}$ in allgemeiner Lage ist.

Beweis. Man wende Satz 5, Nr. 1.23, auf alle Paare von analytischen Mengen $(M_{\mu i}(z))$, $(M_{\mu j}(z))$, $i, j = 1, \dots, N_{\mu}$, an, wobei $H = \overline{G}_{\mu}$, $D = \mathfrak{G}_{\mu}$ gesetzt werde. Benutzen wir noch Hilfssatz 9, so folgt unter Verwendung von Satz 6, Nr. 1.24, die Behauptung.

2.20. Hilfssatz 11. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei a) vollständig in \mathfrak{R} , b) kompakt (vgl. Definition XIV, §§ 1, 2, 6). Es sei z' ein beliebiger Punkt aus \mathfrak{Z} . Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{G}(z')$ von z' und eine Überdeckung von \mathfrak{R} mit Gebieten \underline{G}_{μ} :

$$(1) \quad \mathfrak{R} = \bigcup_{\mu=1}^h \underline{G}_{\mu},$$

$$(2) \quad \underline{G}_{\mu} \subset G_{\mu},$$

derart, daß die Gebieteinteilung (1) von \mathfrak{R} normiert für das Gebiet $\mathfrak{G}(z')$ ist (vgl. Definition XIV, § 5).

Beweis. 1. Es sei Z ein (abgeschlossener) Bereich in \mathfrak{Z} , der z' als inneren Punkt enthält. Nach Voraussetzung b) ist $(\mathfrak{M}(z)) \cap \{\mathfrak{R}, Z\}$ kompakt.

2. Wir gehen von der ursprünglichen Überdeckung von \mathfrak{R} mit den Gebieten G_{μ} aus und werden sie so abändern, daß die verlangte Eigenschaft vorliegt. Es seien $D_{\mu\nu} = G_{\mu} \cap G_{\nu}$ und $E_{\mu\nu} = \{\overline{D}_{\mu\nu}, Z\} \cap (\mathfrak{M}(z))$. Die Menge $E_{\mu\nu}$ ist abgeschlossen. Unter Benutzung der Bezeichnungen in Definition XIV setzen wir:

$$(2) \quad \mathfrak{G}_{\mu} = T_{\mu}(G_{\mu}), \quad \mathfrak{D}_{\mu\nu} = T_{\mu}(D_{\mu\nu}), \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu} = T'_{\mu}(E_{\mu\nu}),$$

$$(3) \quad \mathfrak{G}_{\nu} = T_{\nu}(G_{\nu}), \quad \mathfrak{D}_{\nu\mu} = T_{\nu}(D_{\mu\nu}), \quad \mathfrak{E}_{\nu\mu} = T'_{\nu}(E_{\mu\nu}).$$

Es gelten:

$$(4) \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu} \subset \{\bar{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}, Z\}$$

und wegen (5) in Definition XIV und $Z \subset \mathfrak{Z}$:

$$(5) \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu} \subset \{\mathfrak{U}_{\mu i}, \mathfrak{Z}\} \quad \text{für alle } i.$$

3. Mit $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$ werde die Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ bezeichnet, in denen $(M_{\mu i}(z))$ und $T_{\mu}'(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim haben. $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$ ist abgeschlossen. Es sei nämlich Q_λ eine Folge von Punkten von $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$ mit dem Grenzpunkt $Q \in \mathfrak{E}_{\mu\nu}$. Die Primkeime von $(M_{\mu i}(z))$ in Q seien K_1, \dots, K_r . Der Punkt $Q' = T_{\mu}' T_{\mu}^{\prime -1}(Q)$ liegt in $\{\mathfrak{U}_{\nu j}, \mathfrak{Z}\}$. Die Primkeime von $(M_{\nu j}(z))$ in Q' seien $L_1', \dots, L_{s'}'$. Transformieren wir diese mit der umkehrbar analytischen Abbildung $T_{\mu}' T_{\mu}^{\prime -1}$, so entstehen Primkeime L_1, \dots, L_s in Q . Es sei $U(Q)$ eine Umgebung von Q , in der alle Primkeime K_α und L_β kanonische Darstellungen haben. Wenn λ groß genug ist, liegt Q_λ in $U(Q)$. In Q_λ haben $(M_{\mu i}(z))$ und $T_{\mu}'(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim K , der also Primkeim eines K_α und eines L_β sein wird. Nach dem in Nr. 2.7 zitierten Satze folgt hieraus $K_\alpha = L_\beta$, d. h., Q ist Punkt von $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$.

4. Aus (4) folgt:

$$(6) \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)} \subset \{\bar{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}, Z\}.$$

Es sei:

$$(7) \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}(z^*) = \mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)} \cap \{\bar{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}, z^*\} \quad \text{für } z^* \in Z.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

5. Fall I. Es existiere ein Punkt $Q_{\mu\nu}^{(ij)} = \{P_{\mu\nu}^{(ij)}, z'\}$ in $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$, derart, daß $P_{\mu\nu}^{(ij)}$ in $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$ liegt. Dabei sei z' der vorgegebene Punkt von \mathfrak{Z} (vgl. die Formulierung des Satzes). Dann gibt es eine Umgebung von $Q_{\mu\nu}^{(ij)}: U(Q_{\mu\nu}^{(ij)}) = \{U(P_{\mu\nu}^{(ij)}), \mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}\}$, deren abgeschlossene Hülle in $\{\mathfrak{D}_{\mu\nu}, Z\}$ liegt, derart, daß für alle $\bar{z} \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$ ein Punkt $\bar{Q} = \{\bar{P}, \bar{z}\}$ in $U(Q_{\mu\nu}^{(ij)})$ existiert, der zu $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}$ gehört.

Zum Beweise bemerken wir, daß nach Definition V, Nr. 1.10, und Folgerung 1, Nr. 1.7, der gemeinsame Primkeim K von $(M_{\mu i}(z))$ und $T_{\mu}'(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ in $Q_{\mu\nu}^{(ij)}$ eine kanonische Darstellung besitzt, die parametrisch von z abhängt. Daher können wir die Umgebungen $U(P_{\mu\nu}^{(ij)})$ und $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$ so wählen, daß K für alle $z \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$ Punkte in $U(P_{\mu\nu}^{(ij)})$ hat und daß außerdem $\bar{U}(Q_{\mu\nu}^{(ij)})$ in $\{\mathfrak{D}_{\mu\nu}, Z\}$ liegt. Die Behauptung folgt jetzt daraus, daß jeder Primkeim von K in einem beliebigen Punkte von $\bar{U}(Q_{\mu\nu}^{(ij)})$ gemeinsamer Primkeim von $(M_{\mu i}(z))$ und $T_{\mu}'(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ ist. Wir markieren uns die Umgebung $U(P_{\mu\nu}^{(ij)})$ im Gebiet \mathfrak{S}_{μ} und außerdem $U(P_{\nu\mu}^{(ji)}) = T_{\nu}' T_{\nu}^{\prime -1}(U(P_{\mu\nu}^{(ij)}))$ in \mathfrak{S}_{ν} .

6. Die Konstruktion und die Markierung der Umgebungen $U(P_{\mu\nu}^{(ij)})$ werde für alle möglichen Kombinationen der Werte μ, ν, i, j , für welche der Fall I vorliegt, durchgeführt. Alle diese Umgebungen liegen einschließlich Rand im Innern derjenigen Gebiete \mathfrak{S}_{μ} , für welche sie konstruiert sind.

7. Fall II. Es sei $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}(z')$ leer. Dann gibt es wegen 3. eine Umgebung $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$ von z' , derart, daß auch die Mengen $\mathfrak{E}_{\mu\nu}^{(ij)}(z)$ leer sind, wenn $z \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$ ist.

8. Fall III. Außer den Fällen I und II besteht nur noch folgende Möglichkeit: Es sei $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)}(z') = \{F_{\mu\nu}^{(ij)}, z'\}$. Alle Punkte von $F_{\mu\nu}^{(ij)}$ liegen auf dem Rande von $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$. Diesen Fall werden wir durch eine Abänderung der Gebiete ausschließen. Die Menge der Randpunkte von $D_{\mu\nu}$, die zugleich Randpunkte von G_{μ} sind, sei B_{μ}' , und die Menge der Randpunkte von $D_{\mu\nu}$, die zugleich Randpunkte von G_{ν} sind, sei B_{ν}' . Alle Randpunkte von $D_{\mu\nu}$ gehören zu B_{μ} oder zu B_{ν} . Es seien:

$$(8) \quad T_{\mu}(B_{\mu}) = \mathfrak{B}_{\mu}, \quad T_{\mu}(B_{\nu}) = \mathfrak{B}_{\nu}', \quad T_{\nu}(B_{\mu}) = \mathfrak{B}_{\mu}', \quad T_{\nu}(B_{\nu}) = \mathfrak{B}_{\nu}.$$

Alle Punkte von \mathfrak{B}_{μ} bzw. \mathfrak{B}_{ν} sind Randpunkte von \mathfrak{G}_{μ} bzw. \mathfrak{G}_{ν} . Alle Randpunkte von $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$ liegen in \mathfrak{B}_{μ} oder \mathfrak{B}_{ν}' . Es seien:

$$B_{\mu\nu}^{(ij)} = F_{\mu\nu}^{(ij)} \cap \mathfrak{B}_{\mu}, \quad B_{\nu\mu}^{(ij)} = F_{\mu\nu}^{(ij)} \cap \mathfrak{B}_{\nu}'.$$

Entsprechend werden für das Gebiet \mathfrak{G}_{ν} definiert:

$$F_{\nu\mu}^{(ji)} = T_{\nu} T_{\mu}^{-1}(F_{\mu\nu}^{(ij)}), \quad B_{\nu\mu}^{(ji)} = F_{\nu\mu}^{(ji)} \cap \mathfrak{B}_{\nu}', \quad B_{\mu\nu}^{(ji)} = F_{\nu\mu}^{(ji)} \cap \mathfrak{B}_{\mu}.$$

Zwischen diesen Mengen bestehen folgende Relationen:

$$(9) \quad B_{\nu\mu}^{(ji)} = T_{\nu} T_{\mu}^{-1}(B_{\mu\nu}^{(ij)}), \quad B_{\mu\nu}^{(ji)} = T_{\nu} T_{\mu}^{-1}(B_{\nu\mu}^{(ij)}).$$

Außerdem gelten wegen unserer Annahme über $F_{\mu\nu}^{(ij)}$:

$$(10) \quad F_{\mu\nu}^{(ij)} = B_{\mu\nu}^{(ij)} \cup B_{\nu\mu}^{(ij)} \quad \text{und} \quad F_{\nu\mu}^{(ji)} = B_{\nu\mu}^{(ji)} \cup B_{\mu\nu}^{(ji)}.$$

9. Es sei \mathfrak{P} ein beliebiger Punkt von $B_{\mu\nu}^{(ij)}$. Der Punkt $P = T_{\mu}^{-1}(\mathfrak{P})$ liegt im Gebiet U_{μ} , das durch die topologische Abbildung T_{μ} mit Ortsuniformisierenden versehen wird. Da $P \in \mathfrak{R}$ ist und die Gebiete G_{λ} ganz \mathfrak{R} überdecken, liegt P in einem Gebiet G_{λ} . Wir bestimmen eine Umgebung $U(P)$ von P , die in $U_{\mu} \cap G_{\lambda}$ enthalten ist. Es sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}) = T_{\mu}(U(P))$; es gilt $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{U}_{\mu} = T_{\mu}(U_{\mu})$. Wir wählen jetzt einen Bereich $V(\mathfrak{P})$, die abgeschlossene Hülle einer Umgebung von \mathfrak{P} , mit folgenden Eigenschaften:

$$a) \quad V(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{P}),$$

b) $V(\mathfrak{P})$ sei punktfremd zu den abgeschlossenen Hüllen aller im Gebiet \mathfrak{G}_{μ} nach den Vorschriften in 5., 6. markierten Umgebungen $U(P_{\mu}^{(rs)})$.

Die Wahl von $V(\mathfrak{P})$ ist möglich, weil alle $U(P_{\mu\nu}^{(rs)})$ einschließlich Rand in \mathfrak{G}_{μ} liegen und \mathfrak{P} ein Randpunkt von \mathfrak{G}_{μ} ist. Jedem Punkte $\mathfrak{P} \in B_{\mu\nu}^{(ij)}$ werde ein solcher Bereich $V(\mathfrak{P})$ zugeordnet. Von diesen genügen endlich viele zur Überdeckung von $B_{\mu\nu}^{(ij)}$. Ihre Vereinigungsmenge sei $V_{\mu\nu}^{(ij)}$. Ferner werde gesetzt:

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)} = \mathfrak{G}_{\mu} - \mathfrak{G}_{\mu} \cap V_{\mu\nu}^{(ij)}.$$

Auf dem Rande von $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)}$ liegen keine Punkte von $B_{\mu\nu}^{(ij)}$, denn diese sind ja innere Punkte von $V_{\mu\nu}^{(ij)}$.

10. Kommt der Fall III für mehrere Wertsysteme ν, i, j vor, so konstruieren wir für jedes das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)}$ und bilden den Durchschnitt $\underline{\mathfrak{G}}_{\mu}$ aller dieser Gebiete. $\underline{\mathfrak{G}}_{\mu}$ hat die Eigenschaft, daß für jedes Wertsystem ν, i, j , welches den Fall III realisiert, der Rand von $\underline{\mathfrak{G}}_{\mu}$ frei von Punkten von $B_{\mu\nu}^{(ij)}$ ist.

11. Die Konstruktion der Gebiete \mathfrak{G}_μ werde nacheinander für alle Gebiete \mathfrak{G}_μ ausgeführt. Setzen wir noch $\underline{G}_\mu = T_\mu^{-1}(\mathfrak{G}_\mu)$, so haben wir eine Überdeckung von \mathfrak{R} mit den verlangten Eigenschaften, wie wir nun beweisen wollen.

a) Daß tatsächlich noch eine Überdeckung von \mathfrak{R} vorliegt, ergibt sich aus den Konstruktionsvorschriften der $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)}$ (vgl. in 9. die Bedingung a) für $V(\mathfrak{P})$).

b) Entsprechend den Definitionen in 2. bis 8. werden für das System \underline{G}_μ die dort für die Überdeckung G_μ angegebenen Punktmengen konstruiert und zum Unterschied von diesen durch Unterstreichen gekennzeichnet. Es gelten dann: $\underline{G}_\mu \subset G_\mu$, $\underline{G}_\nu \subset G_\nu$, also $\underline{D}_{\mu\nu} \subset D_{\mu\nu}$ und für die abgeschlossenen Hüllen: $\underline{\overline{D}}_{\mu\nu} \subset \overline{D}_{\mu\nu}$. Hieraus ergeben sich $\underline{E}_{\mu\nu} \subset E_{\mu\nu}$ und

$$(11) \quad \underline{\mathfrak{G}}_{\mu\nu}^{(ij)}(z) \subset \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(ij)}(z) \text{ und speziell für } z = z':$$

$$(12) \quad \underline{F}_{\mu\nu}^{(ij)} \subset F_{\mu\nu}^{(ij)}.$$

c) Wenn ein Wertsystem μ, ν, i, j bei der Überdeckung G_λ den Fall I ergibt, so tut es das auch bei der Überdeckung \underline{G}_λ , denn es liegen $U(P_{\mu\nu}^{(ij)})$ in $\underline{\mathfrak{G}}_\mu$ und $U(P_{\nu\mu}^{(ji)})$ in $\underline{\mathfrak{G}}_\nu$ (vgl. 5 und die Bedingung b) für $V(\mathfrak{P})$ in 9). Daraus ergibt sich: $U(P_{\mu\nu}^{(ij)}) \subset \underline{\mathfrak{G}}_{\mu\nu}$.

d) Wenn ein Wertsystem μ, ν, i, j bei der Überdeckung G_λ den Fall II realisiert, so auch bei der Überdeckung \underline{G}_λ , wie aus (11) folgt.

e) Jetzt ergebe ein Wertsystem μ, ν, i, j bei der Überdeckung G_λ den Fall III. Aus (7) folgt:

$$(13) \quad \underline{F}_{\mu\nu}^{(ij)} \subset \underline{\mathfrak{G}}_{\mu\nu}.$$

Es seien \mathfrak{P} ein Punkt von $\underline{F}_{\mu\nu}^{(ij)}$ und $P = T_\mu^{-1}(\mathfrak{P})$. Aus (13) folgt

$$(14) \quad P \in \underline{\overline{D}}_{\mu\nu} \subset \underline{\overline{G}}_\mu \cap \underline{\overline{G}}_\nu.$$

Wegen (12) und (10) bestehen die Möglichkeiten:

$$\alpha) \mathfrak{P} \in B_{\mu\nu}^{(ij)}, \quad \beta) \mathfrak{P} \in B_{\nu\mu}^{(ji)}.$$

Nach Konstruktion von $\underline{\mathfrak{G}}_\mu$ ist im Fall α) \mathfrak{P} äußerer Punkt von $\underline{\mathfrak{G}}_\mu$ und daher P äußerer Punkt von \underline{G}_μ . Das widerspricht (14). Im Fall β) ist der Punkt $\mathfrak{Q} = T_\nu T_\mu^{-1}(\mathfrak{P})$ wegen (9) in $B_{\nu\mu}^{(ji)}$. Nach Konstruktion von $\underline{\mathfrak{G}}_\nu$ ist dann \mathfrak{Q} äußerer Punkt von $\underline{\mathfrak{G}}_\nu$. Es ist also P äußerer Punkt von \underline{G}_ν . Auch diese Feststellung widerspricht (14). Daher ist die Menge $\underline{F}_{\mu\nu}^{(ij)}$ leer. Nach Abänderung der Gebiete wird also aus Fall III der Fall II.

12. Bei der Überdeckung G_λ treten nur die Fälle I und II auf. Wir konstruieren für alle möglichen Wertsysteme μ, ν, i, j die Umgebungen von z' : $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}^{(ij)}$. Es sei $\mathfrak{Z}(z')$ der Durchschnitt dieser endlich vielen Umgebungen. Mit $\mathfrak{Z}(z')$ und der Überdeckung G_λ gilt Hilfssatz 11. Haben nämlich $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ im Punkte $Q \in \{\underline{G}_\mu \cap \underline{G}_\nu, \mathfrak{Z}(z')\}$ einen gemeinsamen Primkeim, so realisiert das Wertsystem μ, ν, i, j den Fall I. Nach 5. gibt es für jedes $\bar{z} \in \mathfrak{Z}(z')$ einen Punkt $\{\bar{Q}, \bar{z}\}$ mit $\bar{Q} \in \underline{G}_\mu \cap \underline{G}_\nu$, in dem $(\mathfrak{M}_{\mu i}(z))$ und $(\mathfrak{M}_{\nu j}(z))$ einen gemeinsamen Primkeim haben. Das ist die Behauptung.

2.21. Wir fassen die Ergebnisse der Hilfssätze 10 und 11 zusammen:

Satz 9. Es sei $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$. Diese V.K.-Darstellung sei: 1) vollständig, 2) kompakt (vgl. Definition XIV, §§ 1 B, 2, 6).

a) Es seien ζ mit der Umgebung $Z(\zeta) \subset \mathfrak{G}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{G}(z') \subset Z(\zeta)$ und eine Gebiets-einteilung von \mathfrak{R} , derart, daß $(\mathfrak{M}'(z)) = (\mathfrak{M}(z)) \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{G}(z')\}$ eine V.K.-Darstellung mit den folgenden Eigenschaften hat: 3) Die V.K.-Darstellung ist ausgezeichnet. 4) $(\mathfrak{M}'(z))$ ist in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{G}(z')\}$ in allgemeiner Lage. 5) Die Gebietseinteilung ist normiert für $\mathfrak{G}(z')$ (vgl. Definition XIV, §§ 3, 4, 5).

b) $k = 1$. Zu jedem Punkte $z^0 \in \mathfrak{G}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{G}(z^0)$, derart, daß jeder Punkt z' von $\mathfrak{G}(z^0)$ — eventuell mit Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $\mathfrak{G}(z')$ besitzt, für welche mit einer geeigneten Gebietseinteilung von \mathfrak{R} die Aussage in a) zutrifft, d. h. die Eigenschaften 3), 4), 5) vorhanden sind.

Beweis. Man beachte, daß die zur Normierung vorzunehmende Abänderung der Gebietseinteilung an den Eigenschaften 3), 4) nichts verdirbt (vgl. Formel (2) in Nr. 2.20).

2.22. Satz 10. Die $2n + 2$ k -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} sei topologisches Produkt der $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} und des Gebietes Z des $(z)_k$ -Raumes.

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \{\mathfrak{R}, Z\} \text{ (vgl. Definition XIII, Nr. 2.5).}$$

\mathfrak{R} sei zusammenhängend.

Die analytische Menge \mathfrak{M} auf \mathfrak{G} werde durch ein System von h analytischen Gleichungen bestimmt (vgl. Definition XII, Nr. 2.4). Es sei A ein (abgeschlossener) Bereich in \mathfrak{R} .

a) Es seien ζ mit der Umgebung $Z(\zeta) \subset Z$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $z' \in Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{G}(z') \subset Z(\zeta)$ und dazu ein Gebiet G :

$$(2) \quad A \subset G \subset \mathfrak{R},$$

derart, daß:

$$(3) \quad (\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}(z)) = \text{K.D.}\{G, \mathfrak{G}(z')\}$$

gilt (vgl. Definition XIV, § 1 A).

b) $k = 1$. Zu jedem $z' \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{G}(z')$ und dazu ein Gebiet G [vgl. (2)], derart, daß: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ ist und

$$(4) \quad (\mathfrak{M}_1) = (\mathfrak{M}_1(z)) = \text{K.D.}\{G, \mathfrak{G}(z')\}$$

gilt, während $\mathfrak{M}_2 \cap \{G, \mathfrak{G}(z')\}$ nur Punkte enthält, in denen $z = z'$ ist. Wir nennen \mathfrak{M}_2 eine „feste“ Lösungsmannigfaltigkeit des analytischen Gleichungssystems.

Beweis. Wir nehmen vollständige Induktion nach h , der Anzahl der Gleichungen, vor.

I. $h = 1$. 1a) Es sei $\mathfrak{P}_1 = \{P_1, z_1\}$ ein Punkt von \mathfrak{G} . In der Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1) = \{V(P_1), V(z_1)\}$ von \mathfrak{P}_1 sei \mathfrak{M} durch die analytische Gleichung $F_1 = 0$ definiert (vgl. Definition XII). Es gelte $F_1(P, z_1) = 0$ für $P \in V(P_1)$. Ist $\mathfrak{P}_2 = \{P_2, z_1\}$ ein anderer Punkt von \mathfrak{G} (mit den gleichen z -Koordinaten), und wird \mathfrak{M} in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2) = \{V(P_2), V(z_1)\}$ durch die Gleichung $F_2(P, z) = 0$ bestimmt, so gilt für $P \in V(P_2)$: $F_2(P, z_1) = 0$.

Diese Behauptung ergibt sich aus dem (vorausgesetzten) Zusammenhang von \Re und der Formel (5) in Nr. 2.4. Genau so folgt für den Spezialfall:

1b) $k = 1$. Mit den Bezeichnungen in 1a) gelte in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1)$:

$$F_1(P, z) = (z - z_1)^\alpha F'_1(P, z), \quad \alpha \geq 0 \text{ ganz},$$

wobei F'_1 in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_1)$ analytisch und $F'_1(P, z_1) \neq 0$ ist. Dann gilt in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2)$:

$$F_2(P, z) = (z - z_1)^\alpha F'_2(P, z)$$

mit demselben Exponenten α , $F'_2(P, z)$ analytisch in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_2)$, $F'_2(P, z_1) \neq 0$.

2a) Wir wählen den Punkt z' in $Z(\zeta)$ so aus, daß $z = z'$ nicht zu \Re gehört [vgl. 1a)].

2b) $k = 1$. Es sei z' ein beliebiger Punkt aus Z . Wenn $z = z'$ zu \Re gehört [vgl. 1a)], notieren wir $z = z'$ als „feste“ Lösungsmannigfaltigkeit. Nach 1b) gibt es jetzt einen Exponenten $\alpha > 0$ mit folgender Eigenschaft: Wird \Re in der Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0)$ des Punktes \mathfrak{P}_0 durch die Gleichung $F(P, z) = 0$ bestimmt, so ist $F'(P, z) = F(P, z)/(z - z')^\alpha$ in $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0)$ analytisch und für $z = z'$ nicht identisch 0. Wir definieren sodann in jeder Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}_0)$ eine analytische Menge \mathfrak{M}_1 durch die Gleichung: $F'(P, z) = 0$. Wie man sofort erkennt, wird \mathfrak{M}_1 im Sinne der Definition XII durch eine analytische Gleichung auf \mathfrak{G} bestimmt.

3. Es seien P ein beliebiger Punkt von A und $(u)_n$ ein System von Ortsuniformisierenden in P , welche durch die topologische Abbildung T_P eingeführt werden (vgl. Definition XIII, Nr. 2.5). In der Umgebung $\mathfrak{V}(\mathfrak{P}) = \{V(P), V(z')\}$ des Punktes $\mathfrak{P} = \{P, z'\}$ auf \mathfrak{G} werde \Re (bzw. im Falle $k = 1$: \mathfrak{M}_1) durch die Gleichung:

$$(5) \quad F(u, z) = 0$$

bestimmt. Es sei $U = T_P(V(P))$. Da $F(u, z') \neq 0$ ist, können wir auf F im Punkte $\{O, z'\}$ den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz so anwenden, daß die eventuell nötige lineare Variablentransformation die Parameter z unberührt läßt:

$$(6) \quad (v)_n = L_P(u)_n, \quad F = p_P(v_n/(v)_{n-1}, z) \cdot e_P((v)_n, z).$$

Wir wählen eine Umgebung H des Punktes $\{O, z'\}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $H = \{W, Z_P(z')\}$,

b) $W \subset U, Z_P(z') \subset Z(\zeta)$,

c) p_P, e_P seien analytisch in H , $e_P \neq 0$ in H .

Die Lösungen der Gleichung (5) in H sind Nullstellen von p_P . Wir zerlegen das Polynom p_P in die im Punkte $\{O, z'\}$ irreduziblen Faktoren. Jeder Faktor bestimmt eine im Punkte $\{O, z'\}$ irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von z abhängt. Wir ordnen ihr ein K.D.-Gebiet zu, das in H liegt (vgl. Definition II, Nr. 1.4). Darauf bestimmen wir eine Umgebung $\{\mathfrak{G}_P, \mathfrak{Z}_P(z')\}$ des Punktes $\{O, z'\}$, deren abgeschlossene Hülle im Innern aller dieser K.D.-Gebiete enthalten ist. Es sei $G_P = T_P^{-1}(\mathfrak{G}_P)$.

4. Endlich viele Gebiete $G(P_v)$, $v = 1, \dots, r$, überdecken A . Mit

$$\mathfrak{Z}(z') = \bigcap_{v=1}^r \mathfrak{Z}_{P_v}(z'),$$

den Gebieten $G_p = G(P_p)$ und den zugehörigen analytischen Mannigfaltigkeiten mit ihren K.D.-Gebieten gilt Satz 10 (im Falle $h = 1$).

II. Induktionsbeweis. 1. Der Satz 10 sei für Gleichungszahlen $\leq h - 1$ bewiesen. Auf das System der $h - 1$ ersten Gleichungen wenden wir die Induktionsvoraussetzung an. Es gelte also für seine Lösungsmenge $\mathfrak{M}^{(h-1)}$ (bzw. im Falle $k = 1$: $\mathfrak{M}_1^{(h-1)}$):

$$(7) \quad (\mathfrak{M}^{(h-1)}) \text{ bzw. } (\mathfrak{M}_1^{(h-1)}) = \text{K.D. } \{G^{(h-1)}, \mathfrak{S}^{(h-1)}\},$$

$$(8) \quad A \subset G^{(h-1)} \subset \mathfrak{R}.$$

Es sei gemäß Definition XIV: $G^{(h-1)} = \bigcup_{\lambda} G_{\lambda}^{(h-1)}$. In jedem Gebiet $G_{\lambda}^{(h-1)}$ bestimmen wir einen Bereich B_{λ} , so daß noch:

$$(9) \quad A \subset \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}, \quad G_{\lambda}^{(h-1)} \supset B_{\lambda}.$$

S sei ein Bereich in $\mathfrak{S}^{(h-1)}$; falls $k = 1$ ist, enthalte S den vorgegebenen Punkt z' im Innern. Wir dürfen annehmen, daß $\{B_{\lambda}, S\}$ zu einem Gebiet $\mathfrak{B}_{\lambda} = \{V_{\lambda}, Z_{\lambda}\}$ auf \mathfrak{G} gehört, in dem nach Definition XII die analytische Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(h)}$ durch ein System von h analytischen Gleichungen:

$$(10) \quad F_j(P, z) = 0, \quad j = 1, \dots, h,$$

gegeben wird. Mit den Bezeichnungen in Definition XIV setzen wir:

$$(11) \quad \mathfrak{B}_{\lambda} = T_{\lambda}(B_{\lambda}), \quad W_{\lambda} = T_{\lambda}(V_{\lambda}).$$

Es seien (\mathfrak{M}_i) , $i = 1, \dots, N_{\lambda}$, die zu $G_{\lambda}^{(h-1)}$ gehörigen Teilmannigfaltigkeiten von $(\mathfrak{M}^{(h-1)})$ (bzw. $(\mathfrak{M}_1^{(h-1)})$). Sie lösen die $h - 1$ ersten Gleichungen von (10). Falls $N_{\lambda} = 0$ ist, besitzen die Gleichungen (10) keine Lösung in $\{B_{\lambda}, S\}$ (außer evtl. im Falle $k = 1$ Lösungen mit $z = z'$, die zu einer festen Lösungsmenge von $(\mathfrak{M}^{(h-1)})$ gehören). Wir setzen von jetzt an $N_{\lambda} > 0$ voraus. Ist $\{\mathfrak{U}_{\lambda}, \mathfrak{S}^{(h-1)}\}$ das K.D.-Gebiet von (\mathfrak{M}_{λ}) , so gelten nach Definition XIV und Definition V:

$$(12) \quad \mathfrak{B}_{\lambda} \subset \mathfrak{G}_{\lambda}^{(h-1)} \subset \mathfrak{U}_{\lambda} \subset W_{\lambda},$$

$$(13) \quad (M_{\lambda i}) = T'_{\lambda}(\mathfrak{M}_{\lambda i}), \quad i = 1, \dots, N_{\lambda},$$

$$(14) \quad (x)_n = L(u)_n, \quad (M_{\lambda i}) = \text{K.D. } [x_{\sigma+1}, \dots, x_n / (x)_{\sigma}, z],$$

$$(15) \quad X = L(\mathfrak{U}_{\lambda i}), \quad X = \{X^{(\sigma)}, X^{(n-\sigma)}\},$$

$X^{(\sigma)}$ Gebiet im $(x)_{\sigma}$ -Raum, $X^{(n-\sigma)}$ Gebiet im $\{x_{\sigma+1}, \dots, x_n\}$ -Raum (vgl. Definition V).

2. Wir ziehen die h -Gleichung heran:

$$(16) \quad F_h(x, z) = 0,$$

und suchen die Lösungen von (16) auf $(M_{\lambda i}) \cap \{\mathfrak{B}_{\lambda}, S\} = D_{\lambda i}$.

3. 1. Fall. F_h verschwindet identisch auf $(M_{\lambda i})$. Dann ist $(M_{\lambda i})$ Lösungsmenge von (10).

4. 2. Fall. $F_h \not\equiv 0$ auf $(M_{\lambda i})$. Die Norm $N_{\lambda i}((x)_{\sigma}, z)$ von F_h bezüglich $M_{\lambda i}$ ist analytisch in $\{X^{(\sigma)}, \mathfrak{S}^{(h-1)}\}$. Die Lösungen von (16) auf $D_{\lambda i}$ sind Nullstellen von $N_{\lambda i}$.

5. Diese Normfunktion werde für jede analytische Mannigfaltigkeit in der K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}^{(h-1)})$ (bzw. $(\mathfrak{M}_1^{(h-1)})$) gebildet.

6a) Wir wählen z' in S so aus, daß keine Normfunktion für $z = z'$ identisch verschwindet.

6b) $k = 1$. Falls N_M für $z = z'$ identisch 0 ist, erhalten wir aus D_M mittels $z = z'$ endlich viele Lösungsmannigfaltigkeiten von (10), die als „feste“ Lösungsmannigfaltigkeiten zu bezeichnen sind. Wir dividieren dann N_M durch eine passende Potenz von $z - z'$, so daß der Quotient N'_M analytisch und $\neq 0$ ist für $z = z'$.

7. Es seien $P = u^0$ ein beliebiger Punkt von \mathfrak{B}_λ und $Q = \{P, z'\}$. Es gelte

$$(17) \quad Q \in (M_{M_r}), \quad r = 1, \dots, R_P.$$

$\Omega^*(Q)$ sei eine Umgebung von Q , die punktfremd zu den (M_{M_i}) mit $i \neq r$, $r = 1, \dots, R_P$ ist. Nach Hilfssatz 1, Nr. 1.5 zerfällt M_{M_r} in Q (eventuell) in mehrere irreduzible Bestandteile \mathfrak{N}_α , die in Q kanonische Darstellungen mit den gleichen Variablen wie M_{M_r} in (14) besitzen:

$$(18) \quad (y)_n = L(u - u^0)_n, \quad (\mathfrak{N}_\alpha) = \text{K.D.} [y_{\sigma+1}, \dots, y_n / (y)_\sigma, z].$$

Es seien $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{S}\}$ ein K.D.-Gebiet von (\mathfrak{N}_α) und:

$$(19) \quad Y = L(\mathfrak{T}), \quad Y = \{Y^{(\sigma)}, Y^{(n-\sigma)}\} \quad (\text{vgl. Definition V}).$$

Dann ist $z' \in \mathfrak{S}$. Es sei Q' der Punkt $\{(y)_\sigma = (0)_\sigma, z'\}$. Wir unterscheiden drei Fälle:

A) $N_M = 0$ (vgl. 3.). Dann werde \mathfrak{N}_α das Gebiet $\Omega_\alpha = \{\mathfrak{T}, \mathfrak{S}\}$ zugeordnet.

B) N_M (bzw. bei $k = 1$: N'_M) $\neq 0$ in Q' . Dann sei $\{Y_1^{(\sigma)}, \mathfrak{S}_1\}$ eine Umgebung von Q' , in deren abgeschlossener Hülle N_M (bzw. N'_M) $\neq 0$ ist. Wir setzen $Y' = \{Y_1^{(\sigma)}, Y^{(n-\sigma)}\}$ [vgl. (19)] und ordnen \mathfrak{N}_α das Gebiet $\Omega_\alpha = \{L^{-1}(Y'), \mathfrak{S}_1\}$ zu.

C) N_M (bzw. bei $k = 1$: N'_M) = 0 in Q' . Auf N_M (bzw. N'_M) wenden wir im Punkte Q' den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz an. Vorher ist evtl. eine lineare Transformation der Variablen nötig, die im vorliegenden Fall so bestimmt werden kann, daß sie nur die Variablen $(y)_\sigma$ und nicht die Parameter z berührt, weil nämlich N_M (bzw. N'_M) für $z = z'$ nicht identisch verschwindet. Wir wollen jedoch für die neuen Variablen keine neuen Bezeichnungen einführen. Die Nullstellen von N_M (bzw. N'_M) in der Umgebung von Q' werden durch eine ganz algebroide Gleichung in y_σ :

$$(20) \quad p(y_\sigma / (y)_{\sigma-1}, z) = 0$$

bestimmt. Wir zerlegen p in die in Q' irreduziblen Faktoren. Auf jeden Faktor und \mathfrak{N}_α wenden wir den Hilfssatz 2, Nr. 1.5 an und erhalten das Ergebnis: Für die Lösungen von (20) auf \mathfrak{N}_α gibt es endlich viele, im Punkte Q irreduzible, analytische Mannigfaltigkeiten: Ω_j^α , die K.-Darstellungen:

$$(21) \quad (y)_n = L(u - u^0)_n, \quad (\Omega_j^\alpha) = \text{K.D.} [y_\sigma, \dots, y_n / (y)_{\sigma-1}, z]$$

besitzen. Es sei $\Omega_\alpha = \{\mathfrak{U}^\alpha, \mathfrak{S}^\alpha\}$ K.D.-Gebiet aller Ω_j^α , derart, daß die Lösungen von (20) auf $\mathfrak{N}_\alpha \cap \Omega_\alpha$ auf den Mannigfaltigkeiten Ω_j^α liegen. Zu beachten ist nun, daß nicht alle Ω_j^α -Lösungen von (16) auf \mathfrak{N}_α zu sein brauchen. Diejenigen, die es nicht sind, lassen wir fort, so daß die übrigen alle Lösungen von (16) auf $\mathfrak{N}_\alpha \cap \Omega_\alpha$ enthalten (vgl. OSGOOD, Lb. II, 1, S. 99 u. 101). Wir ordnen \mathfrak{N}_α das Gebiet Ω_α zu.

8. Die Konstruktion der Gebiete Ω_α werde für alle \mathfrak{R}_α und für jede Mannigfaltigkeit (M_{λ_r}) , $r = 1, \dots, R_P$, ausgeführt. Wir bestimmen Umgebungen $U(P)$ von P und $\mathfrak{B}_P(z')$ von z' , derart, daß:

a) $\{\overline{U(P)}, \mathfrak{B}_P(z')\} \subset \Omega^*(Q)$ (vgl. 7.),

b) $\{\overline{U(P)}, \mathfrak{B}_P(z')\}$ in allen Gebieten Ω_α liegt, die in 7. bestimmt sind.

Endlich viele Gebiete $U_{\lambda_r} = U(P_r)$, $r = 1, \dots, m_\lambda$, überdecken \mathfrak{B}_λ . Es sei:

$$(22) \quad \mathfrak{B}_\lambda(z') = \bigcap_{r=1}^{m_\lambda} \mathfrak{B}_{P_r}(z').$$

Für jeden Wert von λ werde so eine Umgebung von $z' : \mathfrak{B}_\lambda(z')$ bestimmt. Im Durchschnitt aller dieser Umgebungen sei die Umgebung von $z' : \mathfrak{B}(z') = \mathfrak{B}(z')$ enthalten.

9. Ist jetzt Ω_j^α wie in 7. eine Lösungsmannigfaltigkeit von (10), so werde ihr das K.D.Gebiet: $\{\mathfrak{U}^\alpha, \mathfrak{B}(z')\}$ (vgl. 7.) zugeordnet. Mit $\mathfrak{B}(z')$, den Gebieten $G_{\lambda_r}^{(h)} = T^{-1}(U_{\lambda_r})$, den zugehörigen Mannigfaltigkeiten Ω_j^α mit ihren K.D.-Gebieten und mit:

$$(23) \quad G = G^{(h)} = \bigcup_{\lambda, r} G_{\lambda_r}^{(h)}, \quad A \subset G \text{ [vgl. (9) und 8.]}$$

gilt Satz 10. Im Falle $k = 1$ können außer den in 7. beschriebenen Lösungsmannigfaltigkeiten noch endlich viele feste Lösungsmannigfaltigkeiten vorkommen (vgl. 6b).

§ 3. Die Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung.

3.1. Wir stellen einen bekannten Satz an den Anfang:

Hilfssatz 1. Wenn die Potenzreihen p und q in der Umgebung von O konvergieren und in O teilerfremd sind, gibt es eine Umgebung $U(O)$, derart, daß die direkten analytischen Fortsetzungen von p und q in jedem Punkte von $U(O)$ teilerfremd sind.

Zum Beweise vgl. SIEGEL, *Analytic functions of several complex variables*, S. 9.

3.2 *Definition XV.* Es sei \mathfrak{R} eine $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit (vgl. Definition X, Nr. 2.1).

A. Unter den folgenden Bedingungen heiße die Funktion $f(P)$ meromorph auf \mathfrak{R} :

a) Zu jedem Punkte $Q \in \mathfrak{R}$ gebe es eine Umgebung $U(Q)$ von Q , in der $f(P)$ eine meromorphe Funktion der Ortsuniformisierenden $(u)_n$ von $U(Q)$ ist.

$$(1) \quad z = p(u)/q(u); \quad p(u), q(u) \text{ analytisch in } \mathfrak{U} = T(U(Q)).$$

Hierbei ist T die topologische Abbildung, welche die Ortsuniformisierenden einführt.

a') Die Umgebung $U(Q)$ und die Darstellung (1) können so gewählt werden, daß p und q in allen Punkten von \mathfrak{U} teilerfremd sind (vgl. Hilfssatz 1, Nr. 3.1).

b) Sind P_1 und P_2 Punkte von \mathfrak{R} , derart, daß die ihnen nach a) zugeordneten Umgebungen $U(P_1)$ und $U(P_2)$ einander schneiden, so besteht im Durchschnitt $D = U(P_1) \cap U(P_2)$ nach Definition X zwischen den lokalen

Parametern $u^{(1)}$ von $U(P_1)$ und $u^{(2)}$ von $U(P_2)$ eine umkehrbar eindeutige analytische Transformation: $u^{(1)} = \Phi(u^{(2)})$. Die Darstellungen von f in $U(P_1)$ bzw. $U(P_2)$ seien: $f = p_1(u^{(1)})/q_1(u^{(1)})$ bzw. $f = p_2(u^{(2)})/q_2(u^{(2)})$. Dann gelte in $T_2(D)$:

$$(2) \quad p_1(\Phi(u^{(2)})) q_2(u^{(2)}) \equiv p_2(u^{(2)}) q_1(\Phi(u^{(2)})).$$

b') Wählen wir $U(P_1)$ und $U(P_2)$ wie in a') angegeben, so gelten in D :

$$(3) \quad p_1(\Phi(u^{(2)})) = e(u^{(2)}) \cdot p_2(u^{(2)}), \quad q_1(\Phi(u^{(2)})) = e(u^{(2)}) \cdot q_2(u^{(2)}),$$

wobei $e(u^{(2)})$ in $T_2(D)$ analytisch und $\neq 0$ ist.

B. Es sei ein System von k Funktionen:

$$(4) \quad z_j = f_j(P), \quad j = 1, \dots, k,$$

gegeben, die auf \mathfrak{R} meromorph sind. Die durch diese Funktionen bewirkte Abbildung von \mathfrak{R} in den k -dimensionalen Raum der Funktionentheorie werde „meromorphe Abbildung A_k von \mathfrak{R} “ genannt. Wir definieren auf $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ [Z ein beliebiges (endliches) Gebiet des $(z)_k$ -Raumes] ein Gleichungssystem gemäß Definition XII, Nr. 2.4. Sind P ein Punkt von \mathfrak{R} , $(u)_n$ ein System von Ortsuniformisierenden von P , $U(P)$ eine Umgebung von P , die für alle Funktionen f_j die Eigenschaft a') hat, so setzen wir in $T(U(P))$ die Gleichungen:

$$(5) \quad q_j(u) z_j - p_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

p_j, q_j analytisch und teilerfremd in $T(U(P))$. Wegen (3) bestehen die Relationen (5) von Definition XII. Durch das Gleichungssystem (5) wird eine analytische Menge auf \mathfrak{R} bestimmt; wir bezeichnen sie als „analytische Menge der meromorphen Abbildung A_k “.

C. Der Punkt P von \mathfrak{R} heiße Unbestimmtheitspunkt der meromorphen Abbildung A_k , wenn eine Abbildungsfunktion f_j in der Umgebung von P eine Darstellung durch Ortsuniformisierende [wie in a)]:

$$(6) \quad f_j(u) = p_j(u)/q_j(u)$$

mit der Eigenschaft a') hat und wenn:

$$(7) \quad p_j(O) = q_j(O) = 0 \quad (O = \text{Parameterpunkt von } P)$$

gelten. Sind P ein Punkt von \mathfrak{R} , (u) ein System von Ortsuniformisierenden von P , $U(P)$ eine Umgebung von P , die für alle Funktionen f_j die Eigenschaft a') hat, so setzen wir in $T(U(P))$ die Gleichungen:

$$(8) \quad p_j(u) = 0, \quad q_j(u) = 0.$$

Für jeden Wert von j , $j = 1, \dots, k$, ist das ein Gleichungssystem auf \mathfrak{R} gemäß Definition XII. Die Relationen (5) in Definition XII sind wegen (3) erfüllt. Die Gleichungen (8) bestimmen auf \mathfrak{R} eine analytische Menge \mathfrak{N}_j , die als Menge der Unbestimmtheitspunkte von z_j zu bezeichnen ist. Die Menge der Unbestimmtheitspunkte von A_k auf \mathfrak{R} ist die Vereinigungsmenge:

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{j=1}^k \mathfrak{N}_j.$$

3.3. Hilfssatz 2. Es sei A_k eine meromorphe Abbildung der 2 n -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} . M sei eine analytisch zusammenhängende analytische Menge auf $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ (Z ein beliebiges Gebiet im $(z)_k$ -Raum). M besitze im Punkte P einen Primkeim $K(P)$, der aus Unbestimmtheitspunkten von A_k besteht. Dann sind alle Punkte von M Unbestimmtheitspunkte von A_k .

Beweis. Bestehen die Gleichungen (8), Nr. 3.2, auf $K(P)$, so bleiben diese Relationen wegen (3), Nr. 3.2, bei analytischer Fortsetzung von $K(P)$ erhalten.

3.4. Definition XVI. A. Es sei \mathfrak{R} eine 2 n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit; A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . \mathfrak{M} sei die analytische Menge von A_k (vgl. die Definition XV, Nr. 3.2). \mathfrak{Z} sei ein Gebiet des $(z)_k$ -Raumes. Es gelte auf $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$:

$$(1) \quad (\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\} = (\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\},$$

(vgl. Definition XIV, Nr. 2.6). Diese V.K.-Darstellung ist vollständig auf \mathfrak{R} . Wenn \mathfrak{R} kompakt ist, ist sie auch kompakt (vgl. Definition XIV, §§ 2 und 6). Zerlegen wir $(\mathfrak{M}(z))$ nach Satz 7, Nr. 2.16, in die analytisch zusammenhängenden Komponenten, so besitzt keine von diesen einen Primkeim, der auf einer anderen Komponente liegt. Jede Komponente von $(\mathfrak{M}(z))$, die nicht zu der Menge der Unbestimmtheitspunkte von A_k (vgl. Definition XV C) gehört, heiße „Fasermannigfaltigkeit“ des Gebietes \mathfrak{Z} .

B. Ein Punkt z' des $(z)_k$ -Raumes heiße „regulär“ für die Abbildung A_k , wenn er eine einfach zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{Z}(z')$ mit folgenden Eigenschaften hat:

$$a) \quad (\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{Z}(z') = (\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}(z')\}.$$

b) Es gebe wenigstens eine Fasermannigfaltigkeit des Gebietes $\mathfrak{Z}(z')$.

c) Ist $(\mathfrak{M}_*(z))$ eine Fasermannigfaltigkeit des Gebietes $\mathfrak{Z}(z')$, so gelte:

$$(\mathfrak{M}_*(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}(z')\}.$$

Diese V.K.-Darstellung habe folgende Eigenschaften (vgl. Definition XIV, §§ 3, 4, 5).

1. Sie sei ausgezeichnet.

2. $(\mathfrak{M}_*(z))$ befinde sich in $\mathfrak{Z}(z')$ in allgemeiner Lage.

3. Die Gebietseinteilung von \mathfrak{R} sei normiert für das Gebiet $\mathfrak{Z}(z')$.

Außerdem gelte:

4. Bei jeder Spezialisierung $z = z^* \in \mathfrak{Z}(z')$ entstehe aus $(\mathfrak{M}_*(z))$ die analytische Menge $(\mathfrak{M}_*(z^*))$, die nicht aus Unbestimmtheitspunkten von A_k besteht.

Man beachte, daß die Bedingung c) für alle Fasermannigfaltigkeiten des Gebietes $\mathfrak{Z}(z')$ erfüllt sein muß. Die Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes z' seien die Fasermannigfaltigkeiten des Gebietes $\mathfrak{Z}(z')$ (vgl. A).

3.5. Folgerung 1. Der Punkt z' sei regulär für die meromorphe Abbildung A_k von \mathfrak{R} . Dann gibt es eine Umgebung von z' , die lauter reguläre Punkte von A_k enthält.

Beweis. Die in Definition XVI B vorkommende Umgebung $\mathfrak{G}(z')$ besteht aus regulären Punkten von A_k . Ist nämlich $\bar{z} \in \mathfrak{G}(z')$, so ordnen wir \bar{z} eine einfach zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{G}(\bar{z}) \subset \mathfrak{G}(z')$ zu; diese erfüllt die Bedingungen a), b), c), wie aus Satz 8, Nr. 2.17, folgt, den man auf die identische Abbildung von $\mathfrak{G}(\bar{z})$ in $\mathfrak{G}(z')$ anwende.

Folgerung 2. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es sei Z ein Gebiet des z -Raumes mit einer Fasermannigfaltigkeit. Es sei ζ mit der Umgebung $Z(\zeta) \subset Z$ beliebig vorgegeben. $Z(\zeta)$ enthält einen regulären Punkt von A_k .

Beweis. Nach Definition XVI A gilt für die analytische Menge \mathfrak{M} von A_k : $(\mathfrak{M}(z)) = \mathfrak{M} \cap \{\mathfrak{R}, Z\} = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, Z\}$, wobei diese V.K.-Darstellung vollständig in \mathfrak{R} und kompakt ist. Nach Satz 9, Nr. 2.21, gibt es ein Gebiet \mathfrak{G} in Z , derart, daß die V.K.-Darstellung von $(\mathfrak{M}'(z)) = \mathfrak{M} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{G}\} = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, \mathfrak{G}\}$ die Bedingungen 1., 2. und 3. in Definition XVI B erfüllt. Wir zerlegen $(\mathfrak{M}'(z))$ in die analytischen Komponenten (vgl. Satz 7, Nr. 2.16). Diejenigen unter diesen analytischen Mengen, die nicht aus Unbestimmtheitspunkten von A_k bestehen, seien $(\mathfrak{M}'_\alpha(z))$. Es gibt wenigstens eine solche, weil zum Gebiet Z nach Voraussetzung eine Fasermannigfaltigkeit gehört. Wir wählen einen Punkt $z' \in \mathfrak{G}$ so aus, daß die nach Satz 8, Nr. 2.17 (angewandt auf die Substitution $z = z'$), analytisch zusammenhängenden Mengen $(\mathfrak{M}'_\alpha(z'))$ nicht aus Unbestimmtheitspunkten von A_k bestehen. Dieser Punkt z' ist ein regulärer Punkt von A_k .

3.6. Die Sätze 1, Nr. 1.15, 2, Nr. 1.18, 9, Nr. 2.21 und 10, Nr. 2.22 lassen die Sonderrolle des Spezialfalles $k = 1$ erkennen. Der Kern der vom Verf. entwickelten Methode der meromorphen Abbildungen besteht darin, dieses Ergebnis auszunutzen. Das geschieht folgendermaßen:

Es sei z' ein beliebiger (endlicher) Punkt des z -Raumes. Durch diesen Punkt legen wir ein Büschel von analytischen Ebenen hindurch:

$$(E) \quad z_j = z'_j + t \zeta_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Abgekürzt schreiben wir diese Transformation:

$$(1) \quad z = z' + t \zeta.$$

Dabei sei t die Koordinate auf der Ebene; ζ_j sind Konstanten, welche die Lage der Ebene festlegen.

3.7. *Definition XVII. A.* Es sei \mathfrak{R} eine $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . In das zu A_k gehörige Gleichungssystem (5), Nr. 3.2, setzen wir die Parameterdarstellung (E), Nr. 3.6, ein:

$$(1) \quad q_j(u) (z'_j + t \zeta_j) - p_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Um auch den unendlich fernen Punkt der t -Ebene zu erfassen, setzen wir $t = 1/t'$ in das System (1) ein und erhalten nach Multiplikation mit t' :

$$(2) \quad (q_j(u) z'_j - p_j(u)) t' + q_j(u) \zeta_j = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Die Systeme (1) und (2) bestimmen analytische Mengen \mathfrak{B} auf $\{\mathfrak{R}, T\}$, T ein beliebiges Gebiet auf der t -Ebene (vgl. Definition XII, Nr. 2.4).

B. Es sei T ein Gebiet der t - (oder t')-Ebene. Es sei $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}_2$. Auf \mathfrak{W}_2 sei t konstant, d. h. also \mathfrak{W}_2 sei eine feste Lösungsmenge des Systems (1) [bzw. (2)]¹⁾ im Sinne der Definition in Satz 10, Nr. 2.22. Für \mathfrak{W}_1 gelte:

$$(3) \quad (\mathfrak{W}_1) = \mathfrak{W}_1 \cap \{\mathfrak{R}, T\} = (\mathfrak{W}_1(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T\},$$

(vgl. Definition XIV, Nr. 2.6). Diese V.K.-Darstellung ist vollständig auf \mathfrak{R} ; wenn \mathfrak{R} kompakt ist, ist sie auch kompakt (vgl. Definition XIV, §§ 2 und 6). Jede analytisch zusammenhängende Komponente von (\mathfrak{W}_1) , die nicht zur Menge der Unbestimmtheitspunkte von A_k gehört (Definition XV, Nr. 3.2), heiße Fasermannigfaltigkeit des Gebietes T .

C. Ein Punkt t^* der t -Ebene heiße „regulär“ für die Abbildung A_k , wenn er eine einfach zusammenhängende Umgebung $T(t^*)$ mit folgenden Eigenschaften hat: Ist $(\mathfrak{W}_a(t))$ eine Fasermannigfaltigkeit des Gebietes $T(t^*)$, so gelte:

$$(\mathfrak{W}_a(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T(t^*)\}.$$

Diese V.K.-Darstellung habe folgende Eigenschaften (vgl. Definition XIV, §§ 3, 4, 5).

1. Sie sei ausgezeichnet.
2. $(\mathfrak{W}_a(t))$ befinde sich in $\{\mathfrak{R}, T(t^*)\}$ in allgemeiner Lage.
3. Die Gebieteinteilung von \mathfrak{R} sei normiert für das Gebiet $T(t^*)$.
4. Bei jeder Spezialisierung $t = \bar{t} \in T(t^*)$ entstehe aus $(\mathfrak{W}_a(t))$ eine (wegen Satz 8) analytisch zusammenhängende Menge $(\mathfrak{W}_a(\bar{t}))$, die nicht aus Unbestimmtheitspunkten von A_k besteht. Diese Eigenschaften sollen alle Fasermannigfaltigkeiten von $T(t^*)$ besitzen. Unter den Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes t^* verstehen wir die Fasermannigfaltigkeiten eines Gebietes $T(t^*)$ mit den erklärten Eigenschaften.

D. Jeder Punkt der t -Ebene, der nicht regulär für A_k ist, heiße „singulär“.

Bemerkung. Man beachte, daß zum Unterschied zu Definition XVI die Existenz einer Fasermannigfaltigkeit für einen regulären Punkt nicht gefordert wird.

3.8. *Folgerung.* Der Punkt t^* sei regulär für die meromorphe Abbildung A_k von \mathfrak{R} . Dann gibt es eine Umgebung von t^* , die lauter reguläre Punkte von A_k enthält. Beweis wie in Nr. 3.5.

3.9. *Hilfssatz 3.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Um jeden Punkt \bar{t} der Ebene gibt es eine Umgebung $T(\bar{t})$, in der — evtl. mit Ausnahme von \bar{t} — nur reguläre Punkte von A_k liegen.

Beweis. 1. Es sei T_1 eine Umgebung von \bar{t} . Auf das analytische Gleichungssystem (1), Nr. 3.7 [bzw. bei $\bar{t} = \infty$: auf das System (2)], wende man Satz 10 für $k = 1$ mit $A = \mathfrak{R}$ an. Es gibt eine Umgebung $T_1(\bar{t}) \subset T_1$ von \bar{t} , so daß $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}_2$ ist, auf \mathfrak{W}_2 $t = \bar{t}$ gilt und für \mathfrak{W}_1 :

$$(1) \quad (\mathfrak{W}_1) = \mathfrak{W}_1 \cap \{\mathfrak{R}, T_1(\bar{t})\} = (\mathfrak{W}_1(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T_1(\bar{t})\}$$

¹⁾ Diesen Zusatz lassen wir im folgenden weg.

ist. Die analytische Menge (\mathfrak{M}_1) ist vollständig auf \mathfrak{R} und kompakt (vgl. Definition XIV, §§ 2 und 6).

2. Wir zerlegen $(\mathfrak{M}_1(t))$ in die analytischen Komponenten (vgl. Satz 7, Nr. 2.16). Diejenigen unter diesen, die nicht aus lauter Unbestimmtheitspunkten von A_k bestehen, seien: $(\mathfrak{M}^\alpha(t))$, $\alpha = 1, \dots, A$. Es kann auch $A = 0$ sein. Dann gelten nach Satz 7:

$$(2) \quad (\mathfrak{M}^\alpha(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T_1(\bar{t})\}, \quad \alpha = 1, \dots, A.$$

Diese V.K.-Darstellungen sind vollständig und kompakt.

3. Die Anwendung von Satz 9, Nr. 2.21, auf die analytischen Mengen $(\mathfrak{M}^\alpha(t))$ liefert das Ergebnis: Es gibt eine Umgebung $T_2(\bar{t}) \subset T_1(\bar{t})$ von \bar{t} , derart, daß jeder Punkt t^* von $T_2(\bar{t})$ — evtl. mit Ausnahme von \bar{t} — eine einfach zusammenhängende Umgebung $T(t^*)$ mit folgenden Eigenschaften hat:

- $(\mathfrak{M}_\alpha(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T(t^*)\}$;
- diese V.K.-Darstellung ist vollständig und kompakt,
- sie ist ausgezeichnet,
- $(\mathfrak{M}_\alpha'(t))$ ist in $\{\mathfrak{R}, T(t^*)\}$ in allgemeiner Lage,
- die Gebietseinteilung von \mathfrak{R} ist normiert für das Gebiet $T(t^*)$.

Diese Bedingungen sollen zugleich für alle α gelten.

4. Wir müssen noch Bedingung 4. in Definition XVII C erfüllen. Es sei $(\mathfrak{M}_{\mu i}(t))$ eine zum Gebiet G_μ gehörende analytische Menge, die im Sinne von Definition XIV Baustein einer der analytischen Mengen $(\mathfrak{M}^\alpha(t))$ ist. Da $(\mathfrak{M}^\alpha(t))$ und also auch $(\mathfrak{M}_{\mu i}(t))$ nicht aus lauter Unbestimmtheitspunkten von A_k bestehen, verschwinden auf $(W_{\mu i}(t))$ für keinen Wert von j , $j = 1, \dots, k$, gleichzeitig $p_j(u^{(\mu)})$ und $q_j(u^{(\mu)})$ ($u^{(\mu)}$ Ortsuniformisierende von G_μ) identisch. Es sei etwa $p_j(u^{(\mu)}) \not\equiv 0$ auf $(W_{\mu i}(t))$. Dann ist die Norm von p_j bezüglich $(W_{\mu i}(t)) \not\equiv 0$. Daher gibt es eine Umgebung $T_{\mu i}^{(j)}(\bar{t})$ von \bar{t} , so daß diese Norm außer evtl. für $t = \bar{t}$ bei keiner weiteren Spezialisierung $t = t^* \in T_{\mu i}^{(j)}(\bar{t})$ identisch null wird. Für diese t^* verschwindet dann p_j auf keinem Primkeim von $(W_{\mu i}(t^*))$ identisch. Es sei $T_3(\bar{t})$ der Durchschnitt aller Gebiete $T_{\mu i}^{(j)}(\bar{t})$, gebildet für die analytischen Mengen $(\mathfrak{M}_{\mu i}(t))$, die an den Mengen $(\mathfrak{M}^\alpha(t))$ beteiligt sind, und für alle j , $j = 1, \dots, k$.

5. Wir setzen $T(\bar{t}) = T_2(\bar{t}) \cap T_3(\bar{t})$. Für t^* aus $T(\bar{t})$ ist auch Bedingung 4. in Definition XVII C erfüllt.

3.10. Der obige Beweis liefert ein weiteres Ergebnis, das nach einer Ergänzung der Definition XVII formuliert werde.

Ergänzung zu Definition XVII, Nr. 3.7.

E. Es werden die Bezeichnungen von Definition XVII verwendet. Es sei t^* ein singulärer Punkt der Abbildung A_k . $T(t^*)$ sei eine Umgebung von t^* , die außer t^* nur reguläre Punkte von A_k enthält (vgl. Hilfssatz 3). Wir nennen die Fasermannigfaltigkeiten des Gebietes $T(t^*)$ (vgl. Definition XVII B) Fasermannigfaltigkeiten des singulären Punktes t^* .

3.11. *Hilfssatz 4.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Es sei t^* ein singulärer Punkt auf (E).

a) t^* besitzt eine Fasermannigfaltigkeit.

b) Es sei $(\mathfrak{W}(t))$ eine Fasermannigfaltigkeit von t^* , und zwar gelte:

$$(1) \quad (\mathfrak{W}(t)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, T(t^*)\},$$

wobei nach der in Nr. 3.10 formulierten Ergänzung zu Definition XVII $T(t^*) - t^*$ nur reguläre Punkte von A_k enthalte. Für jeden Punkt $\bar{t} \in T(t^*) - t^*$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{T}(\bar{t})$, derart, daß die analytischen Komponenten von:

$$(2) \quad (\mathfrak{W}'(t)) = \mathfrak{W}(t) \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{T}(\bar{t})\}$$

Fasermannigfaltigkeiten von \bar{t} sind.

Beweis. Man schließe wie in Nr. 3.9 und beachte, daß die dort A genannte Zahl im vorliegenden Fall $\neq 0$ ist, wie trivialerweise aus Definition XVII C folgt (vgl. die Bemerkung in Nr. 3.7).

3.12. Durch Anwendung des HEINE-BORELSchen Überdeckungssatzes auf die Ebene (E) ergibt sich folgender Satz:

Hilfssatz 5. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte 2 n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Es gibt auf (E) nur endlich viele singuläre Punkte.

3.13. *Hilfssatz 6.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte 2 n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Es seien t_1 und t_2 reguläre Punkte von A_k , so daß die ihnen gemäß Definition XVII C zugeordneten Umgebungen $T(t_1)$ und $T(t_2)$ einen nichtleeren Durchschnitt $D(t_1, t_2)$ haben. Es sei $D(t_1, t_2)$ einfach zusammenhängend. Die Fasermannigfaltigkeiten von t_1 seien $(\mathfrak{W}_1^\alpha(t))$, $\alpha = 1, \dots, N_1$, $N_1 \geq 0$. Die Fasermannigfaltigkeiten von t_2 seien $(\mathfrak{W}_2^\beta(t))$, $\beta = 1, \dots, N_2$, $N_2 \geq 0$. Dann ist $N_1 = N_2$ und bei geeigneter Verteilung der Indizes gilt:

$$(1) \quad (\mathfrak{W}_1^\alpha(t)) \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\} = (\mathfrak{W}_2^\alpha(t)) \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\}, \quad \alpha = 1, \dots, N_1 = N_2.$$

Beweis. 1. Die Anwendung von Satz 8, Nr. 2.17, auf die identische Abbildung von $D(t_1, t_2)$ in $T(t_1)$ liefert folgendes Ergebnis: Die analytischen Mengen $(\mathfrak{W}_1^\alpha(t)) \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\}$ sind zusammenhängend; keine von ihnen besitzt einen Primkeim, der auf einer anderen Menge der Reihe liegt, und keine liegt in der Menge der Unbestimmtheitspunkte von A_k . Es sind daher diese Mengen die Fasermannigfaltigkeiten des Gebietes $D(t_1, t_2)$.

2. Aus dem gleichen Grunde sind auch die analytischen Mengen $(\mathfrak{W}_2^\beta(t)) \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\}$ die Fasermannigfaltigkeiten von $D(t_1, t_2)$. Daraus folgt (1).

3.14. *Hilfssatz 7.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte 2 n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. 3.6). Es seien t_1 und t_2 reguläre Punkte von A_k . γ sei eine Kurve, die t_1 mit t_2 verbindet und nur reguläre Punkte von A_k enthält. Dann kann jede Fasermannigfaltigkeit des Punktes t_1 eindeutig längs γ analytisch fortgesetzt werden. Durch dieses Verfahren wird eine Fasermannigfaltigkeit des regulären Punktes t_2 erhalten. Die singulären Punkte von A_k spielen bei diesen Fortsetzungen die Rolle von Verzweigungspunkten, d. h. setzen wir eine Fasermannigfaltigkeit des regulären Punktes t_1

auf einem geschlossenen Wege analytisch fort, der einen singulären Punkt umkreist, so kommen wir in t_1 evtl. mit einer von der Ausgangsmenge verschiedenen Fasermannigfaltigkeit an.

Beweis. Unmittelbare Folgerung aus Hilfssatz 6. Die Hilfssätze 7 und 4 zeigen, daß die Fasermannigfaltigkeiten der Punkte einer Ebene (E) wie die Zweige einer algebraischen Funktion zusammenhängen.

3.15. Hilfssatz 8. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es sei z' ein regulärer Punkt von A_k (vgl. Definition XVI B, Nr. 3.4). (E) sei eine Ebene durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Der Punkt $t = 0$ ist regulärer Punkt von A_k auf (E) (vgl. Definition XVII C, Nr. 3.7). Die Fasermannigfaltigkeiten von $t = 0$ werden aus den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes z' durch Einsetzen der Parameterdarstellung von (E) [vgl. Nr. 3.6 (1)] erhalten.

Beweis. Wir bestimmen eine einfachzusammenhängende Umgebung $T(0)$ des Punktes $t = 0$ auf (E) so, daß für $t \in T(0)$ der Punkt $z = z' + t\zeta$ in $\mathfrak{Z}(z')$ liegt. (Zur Definition von $\mathfrak{Z}(z')$ vgl. Definition XVI B.) Dann wenden wir auf $\mathfrak{M}(z) = \mathfrak{M} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}(z')\}$ und die Abbildung (1), Nr. 3.6, den Satz 8, Nr. 2.17, an. Aus diesem Satz und den Definitionen XVI B und XVII C folgt, daß jede Fasermannigfaltigkeit von z' durch die Substitution in eine Fasermannigfaltigkeit von $t = 0$ auf (E) überführt wird, und auch, daß jede Fasermannigfaltigkeit von $t = 0$ so erhalten wird.

3.16. Definition XVIII. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es gebe ein Gebiet des z -Raumes mit Fasermannigfaltigkeit (vgl. Definition XVI A, Nr. 3.4). Es sei z' ein regulärer Punkt von A_k (vgl. Definition XVI B und Folgerung 2, Nr. 3.5). Durch den Punkt z' legen wir ein Büschel von analytischen Ebenen hindurch. Den Punkten der Ebenen dieses Büschels werden Fasermannigfaltigkeiten zugeordnet (vgl. Definition XVII, Nr. 3.7 und 3.10). Die Menge aller Fasermannigfaltigkeiten werde „Fasergesamtheit“ \mathfrak{F} der meromorphen Abbildung A_k genannt. Die Zahl der Fasermannigfaltigkeiten des Punktes z' heiße „Faseranzahl“ f von \mathfrak{F} .

3.17. Folgerung 1. Wenn die meromorphe Abbildung A_k der kompakten komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} für irgendein Gebiet des z -Raumes eine Fasermannigfaltigkeit besitzt, so ist die Faseranzahl $f \geq 1$.

Folgerung 2. Es sei (E) eine Ebene des Büschels durch den Punkt z' (vgl. Nr. 3.6). Die Anzahl der Fasermannigfaltigkeiten von A_k ist in allen regulären Punkten von (E) gleich groß, und zwar gleich der Faseranzahl f .

Beweis. Man beachte die Hilfssätze 8, Nr. 3.15, und 7, Nr. 3.14.

§ 4. Funktionen auf der Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung.

4.1. Wir übernehmen einige Definitionen und Ergebnisse aus der Arbeit T 2.

Definition IXX. A. z bedeute ein System von k komplexen Parametern. $M^{(e)}(z)$ sei eine im Punkte $\{O, z^0\}$ irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von z abhängt (vgl. Definition V, Nr. 1.10). Es gelte:

$$(1) \quad (x)_n = L(u)_n, (M^{(e)}(z)) = \text{K.D.}[x_{\sigma+1}, \dots, x_n | (x)_\sigma z], \quad \varrho = \sigma + k.$$

Die Funktion $w = p(u)/q(u)$ sei meromorph im Punkte O . Wir gebrauchen den Ausdruck: w ist nicht vollständig unbestimmt auf $(M^{(e)}(z))$, wenn nicht gleichzeitig $p(u)$ und $q(u)$ auf $(M^{(e)}(z))$ identisch verschwinden.

B. Die Funktion w heiße „endlich mehrdeutig“ auf $(M^{(e)}(z))$ in den beiden folgenden Fällen:

1. $q = 0$ auf $(M^{(e)}(z))$, $p \not\equiv 0$ auf $(M^{(e)}(z))$; in diesem Falle schreiben wir: $w = \infty$ auf $(M^{(e)}(z))$.

2. w genügt auf $(M^{(e)}(z))$ einer algebroiden Gleichung:

$$(2) \quad c_0(z) w^r + c_1(z) w^{r-1} + \dots + c_r(z) = 0, \quad r \geq 1,$$

wobei die Koeffizienten $c_r(z)$ in z^0 analytisch sind.

C. Die Funktion w heiße „eindeutig“ auf $(M^{(e)}(z))$:

1. wenn $w = \infty$ auf $(M^{(e)}(z))$ ist,

2. wenn die Werte von w auf $(M^{(e)}(z))$ durch eine in z^0 meromorphe Funktion: $w = a(z)/b(z)$ ($a(z)$, $b(z)$ analytisch in z^0) bestimmt werden.

D. Es sei \mathfrak{R} eine $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. \mathfrak{S} sei ein Teilgebiet von \mathfrak{R} . Z sei ein Gebiet im z -Raum. Für die analytische Menge $(\mathfrak{M}(z))$ auf $\{\mathfrak{R}, Z\}$ gelte:

$$(3) \quad (\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{S}, Z\}$$

(vgl. Definition XIV, § 1 B, Nr. 2.6). Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} (vgl. Definition XV, Nr. 3.2).

a) Die Funktion w heiße endlich mehrdeutig auf $(\mathfrak{M}(z))$, wenn sie auf jedem Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$ endlich mehrdeutig ist.

b) Die Funktion w heiße eindeutig auf $(\mathfrak{M}(z))$, wenn sie auf jedem Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$ eindeutig ist.

E. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_* sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Dieser Abbildung entspreche eine Fasergesamtheit \mathfrak{F} (vgl. Definition XVIII, Nr. 3.16). Wenn w auf allen zu \mathfrak{F} gehörenden Fasermannigfaltigkeiten endlich mehrdeutig ist, nennen wir w eine meromorphe Funktion auf der Fasergesamtheit \mathfrak{F} .

4.2. *Hilfssatz 1.* Es sei $(M^{(e)}(z))$ eine im Punkte $\{O, z^0\}$ irreduzible analytische Mannigfaltigkeit, die parametrisch von z hänge. Die Funktion w sei meromorph im Punkte O . Es gebe einen Primkeim von $(M^{(e)}(z))$ in einem Punkte $\{P, z'\}$ der Umgebung von $\{O, z^0\}$, auf dem die Funktion w endlich mehrdeutig ist. Dann ist w endlich mehrdeutig auf $(M^{(e)}(z))$.

Beweis. Vgl. T 2, Hilfssatz 3.

Folgerung. Es sei \mathfrak{R} eine $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. \mathfrak{S} sei ein Teilgebiet von \mathfrak{R} . Für die analytische Menge $(\mathfrak{M}(z))$ auf $\{\mathfrak{R}, Z\}$ gelte: $(\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D. } \{\mathfrak{S}, Z\}$; $(\mathfrak{M}(z))$ sei analytisch zusammenhängend. Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} . Es gebe einen Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$, auf dem w endlich mehrdeutig ist. Dann ist w auf $(\mathfrak{M}(z))$ endlich mehrdeutig.

4.3. *Hilfssatz 2.* Es sei $(M^{(e)}(z))$ eine irreduzible analytische Menge mit verallgemeinerter kanonischer Darstellung, die parametrisch von z hängt:

$$(x)_n = L(u - u^0), (M^{(e)}(z)) = \text{V.K.D. } [x_{\sigma+1}, \dots, x_n/(x)_\sigma, z], \quad \varrho = \sigma + k.$$

Es sei $\mathfrak{U} = \{U, Z\}$ V.K.D.-Gebiet von $(M^{(e)}(z))$; Z sei einfach zusammenhängend. Die Funktion w sei meromorph in U . Es gebe einen Primkeim von $(M^{(e)}(z))$, auf dem w endlich mehrdeutig ist.

A) Dann ist entweder $w \equiv \infty$ auf $(M^{(e)}(z))$, oder es besteht eine Gleichung (1)

$$p(w/z) = w^r + c_1(z)w^{r-1} + \dots + c_r(z) = 0,$$

wobei die Funktionen $c_\nu(z)$ in Z meromorph sind.

B) Wenn die V.K.-Darstellung von $(M^{(e)}(z))$ ausgezeichnet ist, ist w in Z eine meromorphe Funktion von z .

Beweis. A. Die Behauptung A. wird mit den Schlüssen des Beweises von Hilfssatz 3 in der Arbeit T 2 bewiesen, also unter Verwendung von einfachen Überlegungen über analytische Fortsetzung.

B. Die V.K.-Darstellung von $(M^{(e)}(z))$ sei ausgezeichnet. Wir dürfen voraussetzen, daß die Diskriminante des Polynoms p [vgl. (1)] nicht identisch verschwindet; andernfalls kann aus p durch rationale Rechenoperationen ein Polynom mit dieser Eigenschaft gewonnen werden. Dann muß gezeigt werden, daß der Grad r von p gleich 1 ist. Wir führen einen indirekten Beweis. Es werde $r > 1$ vorausgesetzt. Es sei $Q = \{x', z'\}$ ein regulärer Punkt von $(M^{(e)}(z))$ (vgl. Definition III, Nr. 1.6), in dem die Diskriminante von $p \neq 0$ ist. Die Gleichung $p(w/z') = 0$ bestimmt r verschiedene Werte w_ν , $\nu = 1, \dots, r$. Durch die Spezialisierung $z = z'$ entsteht aus $(M^{(e)}(z))$ nach Satz 4, Nr. 1.20, die irreduzible analytische Menge $(M^{(e)}(z'))$. Wenn daher w auf einem Primkeim von $(M^{(e)}(z'))$ konstant ist, so ist w auf $(M^{(e)}(z'))$ konstant. Daraus folgt die Gleichheit aller w_ν , also $r = 1$.

4.4. *Hilfssatz 3.* A) Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Z sei ein Gebiet des z -Raumes. Für die analytische Menge $(\mathfrak{M}(z))$ auf $\{\mathfrak{R}, Z\}$ gelte:

$$(1) \quad (\mathfrak{M}(z)) = \text{V.K.D.}\{\mathfrak{R}, Z\}.$$

Diese V.K.-Darstellung sei vollständig (vgl. Definition XIV, §§ 1 B, 2).

Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} und endlich mehrdeutig auf $(\mathfrak{M}(z))$. Auf keiner analytisch zusammenhängenden Komponente von $(\mathfrak{M}(z))$ gelte $w \equiv \infty$. Dann genügt w auf $(\mathfrak{M}(z))$ einer algebroiden Gleichung (1), Nr. 4.3, wobei die Funktionen $c_\nu(z)$, $\nu = 1, \dots, r$, meromorph in Z sind.

B. Außer den Voraussetzungen in A. sollen die folgenden bestehen: Z sei einfach zusammenhängend. Die V.K.-Darstellung (1) sei ausgezeichnet. $(\mathfrak{M}(z))$ sei analytisch zusammenhängend. Dann ist w eindeutig auf $(\mathfrak{M}(z))$, und die Werte von w auf $(\mathfrak{M}(z))$ werden durch eine in Z meromorphe Funktion gegeben.

Beweis. A. Auf der analytischen Menge $(M_{\mu i}(z))$ (vgl. Definition XIV) erfüllt w nach Hilfssatz 2 A. eine algebroidale Gleichung $p_{\mu i}(w/z) = 0$, deren Koeffizienten in Z meromorph sind. Wir bilden das Produkt aller Polynome $p_{\mu i}$, gebildet für die endlich vielen $(M_{\mu i}(z))$ und bezeichnen es mit $p(w/z)$. w genügt auf $(\mathfrak{M}(z))$ der algebroiden Gleichung $p(w/z) = 0$.

B. Nach Hilfssatz 2 B. ist w auf $(M_{\mu i}(z))$ eine meromorphe Funktion $w_{\mu i}(z)$, $z \in Z$. Nehmen wir an, daß die analytischen Mengen $(M_{\mu i}(z))$ und $(M_{\nu j}(z))$ im Punkte $\{Q, z'\}$ den gemeinsamen Primkeim $K(z)$ haben. Dann

ist w auf $K(z)$ eindeutig und wird durch eine in z' meromorphe Funktion $w = w'(z)$ gegeben. In der Umgebung von z' gelten daher: $w = w_{\mu i}(z) = w'(z) = w_{r j}(z)$. Daraus folgt $w_{\mu i}(z) = w_{r j}(z)$ in Z . Aus dem analytischen Zusammenhang von $(\mathfrak{M}(z))$ ergibt sich die Behauptung.

4.5. Hilfssatz 4. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es gebe ein Gebiet des z -Raumes mit Fasermannigfaltigkeit. Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} und eindeutig, jedoch nicht $= \infty$ auf den Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes z' von A_k . Dann kann eine Fasergesamtheit \mathfrak{F} von A_k so bestimmt werden, daß w auf \mathfrak{F} meromorph ist (vgl. Definition IXX E, Nr. 4.1).

Beweis. 1. Die Fasermannigfaltigkeiten von z' seien $(\mathfrak{M}_\alpha(z))$, $\alpha = 1, \dots, f$. Die Werte von w auf $(\mathfrak{M}_\alpha(z))$ werden nach Hilfssatz 3 B durch eine in z' meromorphe Funktion $w = w_\alpha(z)$ gegeben. Wir dürfen voraussetzen, daß jede Funktion $w_\alpha(z)$ in z' analytisch ist, sonst werde ein regulärer Punkt in der Umgebung von z' als Zentrum des Ebenenbüschels gewählt, welcher diese Eigenschaft besitzt.

2. Es sei (E) eine feste Ebene durch z' mit der Parameterdarstellung (1), Nr. 3.6. Aus Hilfssatz 8, Nr. 3.15, folgt, daß die Funktion w auf den Fasermannigfaltigkeiten des Punktes $t = 0$ auf (E) eindeutig ist; denn wir erhalten die Werte von w auf einer solchen Fasermannigfaltigkeit durch Einsetzen der Parameterdarstellung von (E) in eine der in z' analytischen Funktionen $w_\alpha(z)$. Aus Hilfssatz 7, Nr. 3.14, ergibt sich die Eindeutigkeit von w auf den Fasermannigfaltigkeiten der regulären Punkte von (E) . Hilfssatz 4, Nr. 3.11, zeigt, daß w auf den Fasermannigfaltigkeiten der singulären Punkte von A_k auf (E) endlich mehrdeutig ist. Es ist also w nach Definition IXX auf der Fasergesamtheit \mathfrak{F} meromorph.

4.6. Hauptsatz I. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit (vgl. Definition X, Nr. 2.1). Es sei A_k eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} (vgl. Definition XV, Nr. 3.2). Es gebe ein Gebiet des z -Raumes mit Fasermannigfaltigkeit (vgl. Definition XVI A, Nr. 3.4). Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} (vgl. Definition XV). w sei eindeutig auf den Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes z' von A_k (vgl. Definition XVI B, Nr. 3.4, und Definition IXX D, Nr. 4.1).

Dann ist w eine algebraische Funktion von z_1, z_2, \dots, z_k . Die algebraische Gleichung zwischen w und $(z)_k$ kann so gewählt werden, daß ihr Grad in w höchstens gleich der Faseranzahl f von A_k — also unabhängig von w — ist.

Beweis. Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der des Hauptsatzes I in der Arbeit T 2 und beruht auf Hilfssatz 4, Nr. 4.5.

§ 5. Die Existenz einer Fasermannigfaltigkeit.

5.1. Hilfssatz 1. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es gebe einen Punkt $P \in \mathfrak{R}$ mit einer Umgebung $U(P)$, in der folgende Bedingung gilt: Es sei $(u)_n$ ein System von Ortsuniformisierenden für $U(P)$. Der Rang der Funktionalmatrix

$$(1) \quad \left(\frac{\partial z_j}{\partial u_\lambda} \right), \quad j = 1, \dots, k, \lambda = 1, \dots, n,$$

in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten sei k . Dann besitzt A_k eine Fasermannigfaltigkeit (vgl. Definition XVI).

Beweis. Es sei (u^0) ein Punkt, in dem alle Funktionen z_j , $j = 1, \dots, k$, analytisch sind und in dem der Rang der Funktionalmatrix k ist. Ferner seien: $z_j^0 = p_j(u^0)/q_j(u^0)$, $j = 1, \dots, k$. Dann besitzen die Gleichungen $q_j(u) z_j - p_j(u) = 0$, $j = 1, \dots, k$, in der Umgebung von $\{u^0, z^0\}$ eine analytische Auflösung:

$$(2) \quad \begin{aligned} u_{n-k+p} &= \Psi_p((u)_{n-k}, z), & p &= 1, \dots, k, \\ u_{n-k+p}^0 &= \Psi_p((u^0)_{n-k}, z^0), \end{aligned}$$

wobei die Funktionen Ψ im Punkte $\{(u^0)_{n-k}, z^0\}$ analytisch sind. Dieser Primkeim gehört nicht zur Menge der Unbestimmtheitspunkte von A_k . Wir wenden Satz 10a), Nr. 2.22, auf das zu A_k gehörende Gleichungssystem (vgl. Nr. 3.2), eine Umgebung von z^0 und $A = \mathfrak{R}$ an. Er bestätigt unsere Behauptung.

5.2. Hilfssatz 2. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . ($\mathfrak{M}(z)$ sei eine Fasermannigfaltigkeit von A_k (vgl. Definition XVI A). Dann gibt es einen Punkt $\mathfrak{P}_0 = \{P^0, z^0\}$ von $(\mathfrak{M}(z))$ und in \mathfrak{P}_0 einen Primkeim π von $(\mathfrak{M}(z))$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $(u)_n$ ein System von Ortsuniformisierenden von P^0 , so sind die Abbildungsfunktionen $z_j(u)$, $j = 1, \dots, k$, im Punkte $O = T(P^0)$ (T = topologische Abbildung, welche die Ortsuniformisierenden einführt.) analytisch, und es gelten: $z_j^0 = z_j(O)$, $j = 1, \dots, k$. Der Rang der Funktionalmatrix (1), Nr. 5.1, ist in O gleich k . Die Gleichungen von π sind:

$$(1) \quad z_j = z_j(u), \quad j = 1, \dots, k;$$

diese Gleichungen haben eine analytische Auflösung (2), Nr. 5.1.

Beweis 1. Wir bestimmen einen Punkt $\mathfrak{Q}_1 = \{Q_1, z^{(1)}\}$ auf $(\mathfrak{M}(z))$ mit folgenden Eigenschaften: a) Q_1 sei kein Unbestimmtheitspunkt von A_k . b) Die zu A_k gehörende analytische Menge (vgl. Definition XV B) besitze in \mathfrak{Q}_1 einen einzigen Primkeim und dieser gehöre zu $(\mathfrak{M}(z))$. c) Der in b) erwähnte Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$ gestatte bei Benutzung der Ortsuniformisierenden $(u)_n$ von Q_1 in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{Q}'_1 = \{O, z^{(1)}\}$ eine Potenzreihendarstellung:

$$(2) \quad u_{\sigma+j} = \varphi_j((u)_\sigma, z), \quad j = 1, \dots, n - \sigma,$$

φ_j analytisch im Punkte $\{(u)_\sigma = (0)_\sigma, z^{(1)}\}$. Ein solcher Punkt \mathfrak{Q}_1 existiert, a) weil $(\mathfrak{M}(z))$ nicht aus Unbestimmtheitspunkten von A_k besteht, b) wegen der Isoliertheitseigenschaft der Fasermannigfaltigkeiten (vgl. Definition XVI A), c) auf Grund von Formel (1) in Definition XVI in Verbindung mit Definition XIV und der Folgerung 1 in Nr. 1.7. Unter den Bedingungen a), b) liegen alle Punkte der analytischen Menge von A_k , die zu einer Umgebung von \mathfrak{Q}_1 gehören, auf dem Primkeim (2).

2. Die Abbildungsfunktionen (1) sind im Punkte O analytisch, da Q_1 kein Unbestimmtheitspunkt von A_k und $z^{(1)}$ ein endlicher Punkt des z -Raumes ist. Der Rang der Funktionalmatrix (1), Nr. 5.1, ist nicht kleiner als k , da es sonst in jeder Umgebung von \mathfrak{Q}'_1 einen Punkt $\mathfrak{Q}'_2 = \{u^{(2)}, z^{(2)}\}$, $z_j^{(2)} = z_j(u^{(2)})$,

$j = 1, \dots, k$, geben würde, in dessen Umgebung zwischen den z eine analytische Relation $\Phi(z) = 0$, Φ analytisch in $z^{(2)}$, bestünde. Ω'_2 wäre Punkt des Primkeimes (1), auf dem daher $\Phi(z) = 0$ wäre. Das ist aber nicht der Fall.

3. Wir können in beliebiger Umgebung von Ω'_1 einen Punkt $\mathfrak{P}_0 = \{u^0, z^0\}$ finden, derart, daß der Rang der Funktionalmatrix (1), Nr. 5.1, in u^0 gleich k ist und $z_j^0 = z_j(u^0)$, $j = 1, \dots, k$, gelten. In der Umgebung von \mathfrak{P}_0 haben die Gleichungen (1) eine analytische Auflösung (2), Nr. 5.1. Der Primkeim (2) stimmt darin mit dem Primkeim (2), Nr. 5.1, überein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

5.3. *Hilfssatz 3.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. A_k sei eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} . Es gebe einen Punkt P auf \mathfrak{R} mit einer Umgebung $U(P)$, in der folgende Bedingung gilt: Es sei $(u)_n$ ein System von lokalen Uniformisierenden für $U(P)$. Der Rang der Funktionalmatrix (1), Nr. 5.1, in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten sei k . w sei eine meromorphe Funktion auf \mathfrak{R} . Der Rang der erweiterten Funktionalmatrix:

$$(1) \quad \left(\frac{\partial z_j}{\partial u_\lambda}, \frac{\partial w}{\partial u_\lambda} \right), \quad j = 1, \dots, k, \lambda = 1, \dots, n,$$

in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten sei k . Dann ist w meromorph auf einer Fasergesamtheit von A_k .

Beweis. Nach dem Hilfssatz 1, Nr. 5.1, und Nr. 3.17 besitzt A_k eine Fasergesamtheit. Nach dem Hauptsatz I, Nr. 4.6, genügt es zu zeigen, daß w auf den Fasermannigfaltigkeiten des regulären Punktes z' von A_k eindeutig ist. Es sei $(\mathfrak{M}(z))$ eine Fasermannigfaltigkeit von z' . π sei ein Primkeim von $(\mathfrak{M}(z))$ mit den im Hilfssatz 2, Nr. 5.2, angegebenen Eigenschaften. Wir dürfen auch voraussetzen, daß die Funktion w im Punkte O analytisch ist, da es in jeder Umgebung von O einen Punkt mit dieser Eigenschaft gibt. Setzen wir dann die Entwicklungen (2), Nr. 5.2, in die Funktion $w = w(u)$ ein, so hängt die berechnete Funktion wegen der Bedingung über die erweiterte Funktionalmatrix allein von den Variablen z ab. Es gilt auf π : $w = w(z)$. Aus dem Hilfssatz 2, Nr. 4.3, und der Folgerung in Nr. 4.2 ergibt sich die Behauptung.

5.4. *Hauptsatz II.* Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit (vgl. Definition X, Nr. 2.1). Es sei A_k eine meromorphe Abbildung von \mathfrak{R} (vgl. Definition XV, Nr. 3.2). Der Rang von A_k auf \mathfrak{R} sei k . Die Funktion w sei meromorph auf \mathfrak{R} . Es gebe einen Punkt $\mathfrak{P} \in \mathfrak{R}$ und für \mathfrak{P} ein System von Ortsuniformisierenden $(u)_n$, so daß der Rang der Funktionalmatrix (1), Nr. 5.3, gleich k ist. Dann besteht zwischen w und z_1, \dots, z_k eine algebraische Relation, deren Grad in w unterhalb einer Schranke liegt, die allein von A_k abhängt, also unabhängig von w ist.

Beweis. Folge aus Hilfssatz 3, Nr. 5.3, und Hauptsatz I, Nr. 4.6.

5.5. Der Hauptsatz II gestattet die folgende kurze Formulierung:

Hauptsatz III. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Wenn Funktionen, die auf \mathfrak{R} meromorph sind, analytisch voneinander abhängen, so hängen sie algebraisch voneinander ab.

5.6. Ein Spezialfall des Hauptsatzes II werde besonders hervorgehoben:

Hauptsatz IV. Es sei \mathfrak{R} eine kompakte $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Zwischen $n+1$ meromorphen Funktionen auf \mathfrak{R} besteht eine algebraische Relation.

Literaturverzeichnis.

BOCHNER-MARTIN: Several complex variables. Princeton 1948. — CARTAN, H.: Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes. Bull. de la Soc. math. de France, t. 78 (1950). — KNESER: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr., Berlin 1950—1951. — OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II, 1. Teil. Leipzig-Berlin 1924. — SIEGEL: Analytic functions of several complex variables. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study (1948—1949). THIMM: Über algebraische Relationen zwischen meromorphen Funktionen auf abgeschlossenen Räumen. Dissertation Königsberg (Pr.) 1939. — THIMM: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen I (Über die Änderung der Monodromiegruppe parameterabhängiger analytischer Mannigfaltigkeiten). Math. Ann. 125, 145—164 (1952), zitiert als T 1. — THIMM: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen II. Math. Ann. 125, 264—283 (1953), zitiert als T 2.

(Eingegangen am 7. April 1953.)

Integrallose Darstellung isotroper Kurven im sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum*).

Von

MAX PINL in Dacca (Pakistan).

Die integrallose Darstellung isotroper Kurven im drei- und vierdimensionalen euklidischen Raum ist bekannt¹⁾. Ein Mittel, diese Resultate auf den sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum zu übertragen, bietet die stereographische Projektion, die als konforme Transformation isotrope Kurven immer wieder in isotrope Kurven überführt, den euklidischen n -dimensionalen R_n jedoch in den nichteuklidischen n -dimensionalen sphärischen Raum S_n verwandelt. Der S_n erscheint dabei als Hyperkugel in einem euklidischen R_{n+1} eingebettet, welcher die nichteuklidische sphärische Metrik

$$(1) \quad d\sigma^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_\alpha du_\beta$$

der Klasse 1²⁾ auf S_n induziert. Wir beschränken uns im folgenden auf „Einheitshyperkugeln“ und wählen die GAUSSschen Parameter u_1, u_2, \dots, u_n auf S_n so, daß die Einbettung durch

$$(2) \quad x_1 = u_1, \dots, x_n = u_n; \quad x_{n+1} = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - \dots - u_n^2}$$

geleistet wird, wenn x_1, x_2, \dots, x_{n+1} kartesische Koordinaten in R_{n+1} bedeuten. Sodann entspricht der n -ären quadratischen Differentialform (1) die $(n+1)$ -äre quadratische Differentialform

$$(3) \quad dS^2 = \sum_{\sigma=1}^{n+1} dx_\sigma^2.$$

Längs isotroper Kurven sind die GAUSSschen Parameter u_1, u_2, \dots, u_n analytische Funktionen eines komplexen Parameters t , welche der MONGESchen Differentialgleichung

$$(4) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta = 0 \quad \left(u'^\alpha = \frac{du_\alpha}{dt} \right)$$

genügen. Wegen (2) ist (4) äquivalent mit

$$(5) \quad x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_{n+1}'^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

*) V. HLAVATÝ zum 60. Geburtstag.

¹⁾ Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie I, § 23, S. 45; M. PINL, Mh. Math. u. Phys. 49, 261—278 (1940); Math. Ann. 127, 1—20 (1949).

²⁾ Vgl. K. H. WEISE, Math. 110/4, 522—570 (1934).

Kennt man also eine integrallose Darstellung isotroper Kurven in R_{n+1} , so kann man aus dieser eine integrallose Darstellung der isotropen Kurven auf S_n durch die Nebenbedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

gewinnen. Diese Methode ist für $n = 3$ mehrfach verwendet worden³⁾, da die integrallose Darstellung der isotropen Kurven in R_{n+1} für $n + 1 = 4$ bekannt ist. Eine Anwendung dieser Methode auf das Problem der integrallosen Darstellung der isotropen Kurven des vierdimensionalen sphärischen Raumes setzt jedoch die Kenntnis einer integrallosen Darstellung der isotropen Kurven in R_{n+1} für $n + 1 = 5$ voraus, und hier ergeben sich praktisch unüberwindliche Schwierigkeiten⁴⁾. Indessen bietet in diesem Falle die stereographische Projektion

$$(6) \quad x_1 = \frac{2\xi_1}{\varrho^2 + 1}, x_2 = \frac{2\xi_2}{\varrho^2 + 1}, \dots, x_n = \frac{2\xi_n}{\varrho^2 + 1}, x_{n+1} = \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1}, \varrho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

einen Ausweg. Sie ermöglicht eine invariante⁵⁾ Zuordnung der (konform) nichteuklidischen isotropen Kurven des S_n zu den (konform) euklidischen isotropen Kurven des Projektions- R_n der $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ohne Erhöhung der Dimensionszahl und gestattet also insbesondere die Kenntnis integralloser Darstellungen der isotropen Kurven des R_4 für die integrallose Darstellung der isotropen Kurven des sphärischen S_4 zu verwerten.

§ 1. $n = 3$.

Mit Verwendung der GAUSSschen Parameter u_1, \dots, u_n aus (2) gewinnen wir für den metrischen Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}(u_1, \dots, u_n)$ des sphärischen n -dimensionalen Raumes die Komponenten:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha u_\beta}{1 - \sum_{\gamma=1}^n u_\gamma^2}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

Nach (4) ergibt sich in diesen Parametern das MONGESche Problem:

$$(7) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha(t) u_\beta(t)}{1 - \sum_{\gamma=1}^n u_\gamma^2(t)} \right) u'_\alpha u'_\beta = 0$$

für die Bestimmung der isotropen Kurven auf S_n . Zu (7) gehört nach (6) und (2) das MONGESche Problem

$$(8) \quad \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \dots + \xi_n'^2 = 0$$

³⁾ Vgl. Anm. 1, Math. Ann. 121, 12–14 (1949).

⁴⁾ Vgl. Anm. 3, § 6.

⁵⁾ Aus (6) folgt zunächst durch Differentiation

$$x'_k = \frac{2}{(\varrho^2 + 1)^3} \left[(\varrho^2 + 1) \xi'_k - 2 \varrho \varrho' \xi_k \right]; \quad x'_{n+1} = \frac{4 \varrho \varrho'}{(\varrho^2 + 1)^3}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

und daher wegen $\sum_{k=1}^n \xi_k'^2 = 0$ das Verschwinden der Quadratsumme

$$x_1'^2 + \dots + x_{n+1}'^2 = \frac{16 \varrho \varrho'}{(\varrho^2 + 1)^3} \left(\varrho \varrho' - \sum_{k=1}^n \xi_k \xi'_k \right) = 0.$$

für die Bestimmung der isotropen Kurven in R_n . Für $n=3$ ist deren integrallose Darstellung durch

$$(9) \quad \xi_1 = i \left(f - t f' - \frac{1-t^2}{2} f'' \right), \quad \xi_2 = f - t f' + \frac{1+t^2}{2} f'', \quad \xi_3 = -i (f' - t f''),$$

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 2 f f'' - f'^2)$$

gegeben, wobei f eine bis auf die Bedingung $f'' \neq 0$ willkürliche analytische Funktion des komplexen Parameters t bedeutet. Aus (6), (3) und (2) gewinnen wir also das Resultat: die (9) entsprechende integrallose Darstellung der isotropen Kurven des dreidimensionalen sphärischen Raumes S_3 ist durch

$$(I) \quad \begin{aligned} u_1 = u_1(t) &= \frac{2i \left(f - t f' - \frac{1-t^2}{2} f'' \right)}{2 f f'' - f'^2 + 1}, \quad u_2 = u_2(t) = \frac{2 \left(f - t f' + \frac{1+t^2}{2} f'' \right)}{2 f f'' - f'^2 + 1} \\ u_3 = u_3(t) &= \frac{-2i (f' - t f'')}{2 f f'' - f'^2 + 1}, \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

gegeben. Sie hängt von einer (bis auf $f'' \neq 0$) willkürlichen analytischen Funktion f eines komplexen Parameters t und deren ersten und zweiten Ableitungen ab. Die metrische Fundamentalform des sphärischen Raumes S_3 ist in diesen Parametern durch

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha u_\beta}{1 - \sum_{\gamma=1}^3 u_\gamma^2}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

gegeben⁶⁾.

§ 2. $n = 4$.

Für $n = 4$ kennt man mehrere integrallose Darstellungen der isotropen Kurven des R_4 , deren einfachste durch

$$(10) \quad \xi_1 = \frac{-i(t^2-1)}{2} \varphi' + \frac{t^2+1}{2} \psi', \quad \xi_2 = \frac{-(t^2+1)}{2} \varphi' - \frac{i(t^2-1)}{2} \psi', \quad \xi_3 = \varphi + i t \psi',$$

gegeben ist⁷⁾. Für die Quadratsumme der ξ ergibt sich

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = \varphi^2 + \psi^2 + 2 i t (\varphi \psi' - \varphi' \psi).$$

Aus (6), (3) und (2) gewinnen wir in diesem Falle das Resultat: die (10) entsprechende integrallose Darstellung der isotropen Kurven des vierdimensionalen sphärischen Raumes S_4 ist durch

$$(II) \quad \begin{aligned} u_1 = u_1(t) &= \frac{-i(t^2-1)\varphi' + (t^2+1)\psi'}{\varphi^2 + \psi^2 + 2it(\varphi\psi' - \varphi'\psi) + 1}, \quad u_2 = u_2(t) = \frac{-(t^2+1)\varphi' - i(t^2-1)\psi'}{\varphi^2 + \psi^2 + 2it(\varphi\psi' - \varphi'\psi) + 1}, \\ u_3 = u_3(t) &= \frac{2(\varphi + it\psi')}{\varphi^2 + \psi^2 + 2it(\varphi\psi' - \varphi'\psi) + 1}, \quad u_4 = u_4(t) = \frac{2(-it\varphi' + \psi)}{\varphi^2 + \psi^2 + 2it(\varphi\psi' - \varphi'\psi) + 1} \end{aligned}$$

gegeben. Sie hängt von zwei bis auf gewisse Ungleichheitsbedingungen⁸⁾ willkürlichen analytischen Funktionen des komplexen Parameters t und deren ersten

⁶⁾ Vgl. Anm. 9.

⁷⁾ Vgl. Anm. 1, Mh. Math. u. Phys. 49, 266 (1940).

⁸⁾ Vgl. Anm. 7.

Ableitungen ab. Die metrische Fundamentalform des sphärischen S_4 ist in diesen Parametern durch

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha u_\beta}{1 - \sum_{\gamma=1}^4 u_\gamma^2}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \quad \text{gegeben.}$$

Die integrallosen Darstellungen (9) und (10) erfassen bekanntlich nicht die von D. HILBERT diskriminierend genannten Lösungen⁹⁾ der ihnen zugeordneten MONGESchen Probleme. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die integrallosen Darstellungen (I) und (II) der sphärischen isotropen Kurven und deren zugeordnete MONGESche Probleme (7) für $n = 3, 4$. Dagegen werden z.B. die isotropen Kurven, welche auf den zweidimensionalen vollisotropen stereographischen Bildern der vollisotropen Ebenen des R_4 liegen, in der Darstellung (II) sehr wohl erfaßt. Dies zeigt das Beispiel $\varphi = t$, $\psi = 0$ durch die Relationen:

$$(11) \quad x_1 = -i \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad x_4 = -ix_3, \quad x_5 = ix_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = -x_5^2 + 1 - x_4^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1, \\ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 = -x_5'^2 + 0 - x_4'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 = 0.$$

Die isotope Kurve (11) liegt in der vollisotropen Ebene

$$x_1 = -ix_5, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = ix_4$$

der Hyperkugel. Sie ist jedoch keine Gerade, denn der Rang der Matrix

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \end{vmatrix}$$

ist 2.

§ 3. Geodätische Nulllinien.

Die geodätischen unter den isotropen Kurven pflegt man im Falle $n = 4$ der allgemeinen Relativitätstheorie geodätische Nulllinien zu nennen. Da bei stereographischen Projektionen isotope Kurven in isotope Kurven übergehen, sind die metrischen Fundamentaltensoren in R_n und S_n (in gleichen Parametersystemen) proportional. Da isotope geodätische Kurven und nur solche bei Übergang zu einer proportionalen Metrik geodätisch bleiben¹⁰⁾, sind die isotropen stereographischen Bildkurven in S_n der isotropen Kurven des R_n dann und nur dann geodätische Linien im Sinne der nichteuklidischen Metrik in S_n , wenn ihre isotropen Urbilder geodätische Linien im Sinne der euklidischen Metrik des R_n , d. h. also isotope Geraden sind. Wir zeigen jetzt: die stereographischen Bilder auf S_n der isotropen Geraden in R_n sind wiederum isotope Gerade auf S_n . Dazu gehen wir von der Parameterdarstellung

$$\xi_1 = a_1 t + b_1, \dots, \xi_n = a_n t + b_n, \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$$

einer isotropen Geraden des R_n aus. Da die Quadratsumme der Koeffizienten a_α verschwindet, ist $\varrho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ eine lineare Funktion des Parameters t

$$\varrho^2 = at + b.$$

⁹⁾ Vgl. D. HILBERT, Math. Ann. 73, 95—108 (1913).

¹⁰⁾ Vgl. SCHOUTEN-STRUIK, Einführung Bd. II, § 6, S. 51.

Die stereographische Projektion ergibt

$$(12) \quad x_1 = \frac{a_1 t + b_1}{a t + b + 1}, x_2 = \frac{a_2 t + b_2}{a t + b + 1}, \dots, x_n = \frac{a_n t + b_n}{a t + b + 1}, x_{n+1} = \frac{a t + b - 1}{a t + b + 1}.$$

Bezeichnet \mathbf{x} den Vektor des R_{n+1} mit den Komponenten x_1, x_2, \dots, x_{n+1} und \mathbf{a} den Vektor des R_{n+1} mit den konstanten Komponenten

$$a_1 + b a_1 - b_1 a, a_2 + b a_2 - b_2 a, \dots, a_n + b a_n - b_n a, 2a,$$

so folgt für die auf S_n liegende Ableitung \mathbf{x}' :

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{(a t + b + 1)^2} \mathbf{a}.$$

Die Richtung des Tangentenvektors der isotropen Bildkurve auf S_n ist also konstant und diese notwendig eine Gerade. Umgekehrt entspricht einer jeden Nullgeodätischen auf S_n durch stereographische Projektion eine Nullgeodätische in R_n , d. h. eine isotrope Gerade. Da die vierdimensionale Hyperkugel des euklidischen R_5 ein Modell des DE SITTERSchen raum-zeitlichen Kontinuums darstellt¹¹⁾, können unsere letzten Ergebnisse im Falle $n = 4$ auch so formuliert werden: *die geodätischen Nulllinien des DE SITTERSchen raumzeitlichen Weltmodells der allgemeinen Relativitätstheorie sind die isotropen Geraden*

$$u_1 = u_1(t) = \frac{2(a_1 t + b_1)}{2t \sum_{k=1}^4 a_k b_k + \sum_{k=1}^4 b_k^2 + 1}, \dots, u_4 = u_4(t) = \frac{2(a_4 t + b_4)}{2t \sum_{k=1}^4 a_k b_k + \sum_{k=1}^4 b_k^2 + 1},$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$$

im sphärischen vierdimensionalen Raum $x_5 = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2}$. Die allgemeinen isotropen Kurven dieses Weltmodells sind durch die integrallose Darstellung (II) gegeben.

M. v. LAUE behandelt die Metrik des DE SITTERSchen Weltmodells ohne Verwendung einer Einbettung im euklidischen R_5 und gewinnt Parameter $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, T$, in welchen

$$ds^2 = T^{-2} \left(d\zeta_1^2 + d\zeta_2^2 + d\zeta_3^2 - \frac{3}{\lambda} dT^2 \right)^{12)}.$$

Die weitere Transformation $T = i \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \zeta_4$ führt auf die Maßbestimmung:

$$(13) \quad ds^2 = - \frac{3}{\lambda \zeta_4^2} (d\zeta_1^2 + d\zeta_2^2 + d\zeta_3^2 + d\zeta_4^2),$$

welche ihren konformeuklidischen Charakter unmittelbar erkennen läßt. Die Metrik (13) des DE SITTERSchen Weltmodells unterscheidet sich in diesen Parametern nur durch den Faktor $-\frac{3}{\lambda \zeta_4^2}$ von der des euklidischen vierdimensionalen Raumes, und der WEYLSche Konformkrümmungstensor $W_{ik;lm}$ der Maßbestimmung (13) verschwindet identisch. Allgemein sind die geodätischen Nulllinien eines relativistischen Weltmodells mit RIEMANNscher Übertragung dann und nur dann isotrope Gerade, wenn der WEYLSche Konformkrümmungstensor des Modells identisch verschwindet.

¹¹⁾ Vgl. M. v. LAUE, Relativitätstheorie II, § 50 (1953).

¹²⁾ Vgl. Anm. 1, S. 266.

§ 4. Isotrope Torsen.

Das duale Gegenstück der isotropen Kurven in R_3 sind die isotropen Torsen. Man kann sie als Flächen des R_3 mit isotropem Normalvektor charakterisieren und diese Bedingung durch die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \xi_k^*}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \xi_k^*}{\partial s} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi_k^*}{\partial s} \right)^2 = 0$$

(Verschwinden der Diskriminanten der ersten metrischen Grundform) zum Ausdruck bringen. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich in unabhängigen Parametern s, t mit Benutzung der integrallosen Darstellung (9) in der Form

$$\xi_1^* = \xi_1(t) + s \xi_1'(t), \quad \xi_2^* = \xi_2(t) + s \xi_2'(t), \quad \xi_3^* = \xi_3(t) + s \xi_3'(t)$$

schreiben. Wegen der Konforminvarianz des isotropen Normalvektors der Fläche ist das stereographische Bild der isotropen Torsen im sphärischen dreidimensionalen Raum S_3 wiederum eine Fläche, deren Normalvektor isotrop ist, d. h. deren Diskriminante der metrischen Grundform verschwindet. Auch diese Flächen können also integrallos dargestellt werden. Dasselbe gilt für die stereographischen Bildflächen im sphärischen S_4 der Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor, deren Differentialgleichung in R_4 ein MONGESCHES Problem in zwei unabhängigen und zwei abhängigen Veränderlichen darstellt, zu dem eine integrallose Darstellung der Lösungsflächen gehört¹³⁾. Wegen des engen Zusammenhanges zwischen isotropen Kurven und Minimalflächen wird man schließlich versuchen, die im Vorhergehenden entwickelte Methode auch auf Minimalflächen in sphärischen Räumen anzuwenden. Doch scheint die integrallose Darstellung der Minimalflächen des R_3 und R_4 von geringerer Bedeutung für die Darstellung der stereographischen Bildflächen in S_3 und S_4 zu sein, da der Einbau der gewöhnlichen Minimalflächen in eine konforminvariante Geometrie eine erheblich stärkere Verallgemeinerung dieser Flächen mit sich bringt als der Einbau der isotropen Kurven in eine konforme Geometrie (in der sie ja eigentlich zu Hause sind) für diese. Dies zeigt bereits der Fall der trivialen reellen Minimalfläche $\xi_3 = 0$, die auf S_3 in die Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \quad x_3 = 0$$

übergeht. Beide, Ebene und Kugel, genügen der Differentialgleichung der Konformminimalflächen¹⁴⁾

$\Delta_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2$ (Δ_2 = BELTRAMI's zweiter Differentialoperator), aber nur die Ebene $\xi_3 = 0$ genügt der Differentialgleichung der gewöhnlichen Minimalflächen.

(Eingegangen am 13. November 1953.)

¹³⁾ Vgl. M. PINL, Mh. Math. u. Phys. 52, 301—310 (1948).

¹⁴⁾ Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, § 83, S. 383.

Coefficient Properties of Fourier Series with a Gap Condition.

By

M. E. NOBLE in Nottingham.

1. *Introduction.* The coefficient theory of the Fourier series of functions satisfying LIPSCHITZ and similar conditions is classical. Many important results are also known for trigonometric series for which the suffixes n_k of non zero coefficients satisfy the HADAMARD gap condition¹⁾

$$(1.1) \quad \liminf \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Very little attention seems however to have been paid to the effect of a weaker gap condition than HADAMARD's²⁾, such as for example

$$(1.2) \quad \lim \frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} = \infty.$$

It is the intention of the present paper to point out one effect of such a gap condition, namely that it enables a hypothesis concerning a periodic $f(x)$ in a whole period to be substituted by a hypothesis concerning $f(x)$ in a sub interval. It seems possible that in many cases the sub interval could be replaced by a subset of positive measure but the methods of the present paper are not delicate enough to achieve this.

2. We begin with some considerations concerning trigonometric polynomials. Considerable use is made of the principle that, if the Fourier series of $f(x)$ has a gap $n_k < n \leq m_k$, and $P(x)$ is a trigonometric polynomial of degree not exceeding $m_k - n_k$ and with constant term 1, then

$$\frac{a_{n_k}}{b_{n_k}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) P(x) \cos n_k x \, dx}{\sin x}.$$

$P(x)$ is chosen to be small in appropriate regions in a manner detailed in the following lemma.

Lemma 1. *If $\delta > 0$ and n is a positive integer, there exists a trigonometrical polynomial $T_n(x)$ of degree not exceeding n with constant term 1 such that:*

(i) *For all x and some absolute constant A_1*

$$|T_n(x)| \leq A_1 / \delta.$$

¹⁾ C. f. for example A. ZYGMUND, *Trigonometric Series* (Warsaw 1935).

²⁾ C. f. however A. ALEXITS "Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires" *Acta Sci. Math. Szeged* **13**, 14—17 (1949).

(ii) If $\delta \leq |x| \leq \pi$

$$|T_n(x)| = O(\exp - A(\delta)n)$$

where $A(\delta) > 0$.

(iii) For all x

$$|T'_n(x)| \leq \frac{A_1 n}{\delta}.$$

The result is obtained by approximation to $h_0(x) = \frac{\pi}{\delta} c_E(x)$ where E is the set $|x| \leq \delta$ and $c_E(x)$ its characteristic function, but not a uniform (ТЧЕВЫЧЕВ) approximation because of the discontinuities of $h_0(x)$.

We choose a positive integer m , write $\tau_m = \delta/2m$ and construct a set of functions $h_i(x)$ $i = 1, 2, \dots$, defined by

$$(2.1) \quad h_{i+1}(x) = \frac{1}{\tau_m} \int_x^{x+\tau_m} h_i(t) dt,$$

if $x \geq 0$ and $i \leq m-1$, and otherwise by the requirement that $h_i(x)$ be even. It is easy to see that

$$(2.2) \quad \begin{aligned} h_m(x) &= 0 & \delta \leq |x| \leq \pi, \\ &= \frac{\pi}{\delta} & |x| \leq \frac{1}{2}\delta, \end{aligned}$$

and that it is monotone in the remaining intervals $[\frac{1}{2}\delta, \delta]$ and $[-\delta, -\frac{1}{2}\delta]$. Moreover, $h_m(x)$ has $m-1$ continuous derivatives in $[-\pi, \pi]$ vanishing at $x = \pm\pi$ and it follows easily from the definition that

$$(2.3) \quad \begin{aligned} h_m^{(m-1)}(x) &= O\left(\left(\frac{2}{\tau_m}\right)^m \text{Max } |h_0(x)|\right) \\ &= O\left(\left\{\frac{4m}{\delta}\right\}^m \delta^{-1}\right) \end{aligned}$$

uniformly in x . If now a_p, b_p , $p = 0, 1, \dots$, are the Fourier coefficients of $h_m(x)$ we have, integrating $m-1$ times by parts,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{|a_p|}{|b_p|} &\leq \frac{1}{\pi p^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |h_m^{(m-1)}(x)| dx, \\ &= O\left(\frac{(4m)^m}{p^{m-1} \delta^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Consequently if $s_n(x)$ is the $n - th$ Fourier partial sum of $h_m(x)$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} |h_m(x) - s_n(x)| &= O\left((4m)^m \delta^{-m-1} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^{m-1}}\right) \\ &= O((4m)^m n^{1-m} \delta^{-m-1}) \end{aligned}$$

uniformly in $-\pi \leq x \leq \pi$. The most favourable inequality for fixed n is obtained by taking $m = m_n = \left\lfloor \frac{n\delta}{4e} \right\rfloor$ which yields

$$(2.6) \quad \begin{aligned} |h_{m_n}(x) - s_n(x)| &= O\left(n \exp - \frac{\delta}{4e} n\right) \\ &= O(\exp - A(\delta)n), \end{aligned}$$

where $A(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0+$. The polynomial $s_n(x)$ satisfies parts (i) and (ii) of the lemma. Moreover its constant term $\frac{1}{2}a_0$ satisfies

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{m_n}(x) dx \leq 1$$

and consequently the condition that the constant term is 1 can be satisfied by taking $T_n(x) = \lambda_n s_n(x)$ where $1 \leq \lambda_n \leq 2$. Part (iii) of the lemma now follows from (i) by a famous inequality of DE LA VALLÉE POUSSIN and BERNSTEIN³).

3. *The Order of Fourier Coefficients.* We now assume that $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ and has period 2π with Fourier coefficients a_n, b_n $n = 0, 1, \dots$, and that $a_n = b_n = 0$ except for a sequence $n = n_k$ with $\text{Max}\{n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k\} = N_k$. We also assume that $f(x)$ satisfies a supplementary condition in a sub interval. The number of possible supplementary conditions is large and we confine ourselves to two of the most important.

Theorem 1. If

$$(3.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{\log n_k} = \infty$$

and $f(t)$ is of bounded variation in any interval $|t - t_0| \leq \delta$, then

$$\begin{matrix} a_{n_k} \\ b_{n_k} \end{matrix} = O\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Without loss of generality we may assume that $t_0 = 0$. Choose a sequence $M_k \leq N_k$ such that $M_k = O(n_k^{\frac{1}{2}})$ and M_k satisfies (3.1) and let $T_{M_k}(x)$ be the trigonometrical polynomial of the lemma. Then

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_{n_k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x dx \\ &= O(\exp - A(\delta) M_k) + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x dx. \end{aligned}$$

To estimate the second term on the right of (3.2) it is sufficient to consider the case when $f(x)$ is monotone increasing in $-\delta \leq x \leq \delta$. By the second mean value theorem and two integrations by parts we obtain

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x dx &= \frac{f(\delta)}{\pi} \int_{\eta_k}^{\delta} T_{M_k}(x) \cos n_k x dx \\ &= \frac{f(\delta)}{\pi} \left\{ \left[T_{M_k}(x) \frac{\sin n_k x}{n_k} \right]_{\eta_k}^{\delta} + \left[T'_{M_k}(x) \frac{\cos n_k x}{n_k^2} \right]_{\eta_k}^{\delta} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\eta_k}^{\delta} T''_{M_k}(x) \frac{\cos n_k x}{n_k^2} dx \right\}, \end{aligned}$$

³) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN: "Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle", p. 39 (Paris 1919).

where $-\delta < \eta_k < \delta$. Consequently

$$(3.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_{M_k}(x) \cos n_k x dx = O\left(\frac{f(\delta)}{\delta n_k}\right) + O\left(\frac{f(\delta)}{\delta} \frac{M_k}{n_k^2}\right) \\ + O\left(\int_{\eta_k}^{\delta} \frac{A_1 M_k^2}{\delta n_k^2} dx\right) \\ = O\left(\frac{1}{n_k}\right),$$

the estimate of the integral in (3.3) involving a further use of the de la Vallée Poussin Bernstein inequality. The result for a_{n_k} follows from (3.2) and (3.4). The sine coefficients are dealt with similarly.

If we substitute a Lipschitz condition⁴⁾ for the condition that $f(x)$ be of bounded variation we obtain

Theorem 2. If

$$\lim \frac{N_k}{\log n_k} = \infty$$

and $f(t)$ satisfies a Lipschitz condition of order α , where $0 < \alpha < 1$ in some interval $|t - t_0| \leq \delta$, then

$$a_{n_k} = O(n_k^{-\alpha}), \\ b_{n_k}$$

Without loss of generality we may assume that $t_0 = 0$. Choose a sequence $M_k \leq N_k$ such that $M_k = O(n_k^{1-\alpha})$ and

$$(3.5) \quad \lim \frac{M_k}{\log n_k} = \infty.$$

We then have

$$a_{n_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_{M_k}(t) \cos n_k t dt, \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right] T_{M_k}(t) \cos n_k t dt \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \left[T_{M_k}(t) - T_{M_k}\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) \right] \cos n_k t dt, \\ = E_1 + E_2.$$

By the mean value theorem and part (iii) of Lemma 1 we have

$$(3.6) \quad E_2 = \frac{1}{2n_k} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n_k}\right) T'_{M_k}\left(t + \Theta_t \frac{\pi}{n_k}\right) \cos n_k t dt \\ = O\left(\frac{M_k}{\delta n_k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt\right), \\ = O(n_k^{-\alpha}),$$

⁴⁾ Here and elsewhere we interpret a Lipschitz condition in a subinterval I as meaning $|f(x+h) - f(x)| = O(|h|^\alpha)$ for x in I and all h .

for fixed δ . For E_1 we have

$$E_1 = \int_{|t| \geq \delta} + \int_{|t| < \delta} = I_1 + I_2$$

and by the Lipschitz condition

$$(3.7) \quad I_2 = O(n_k^{-\alpha}).$$

Finally

$$(3.8) \quad \begin{aligned} I_1 &= O\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \cdot \exp - A(\delta) M_k\right) \\ &= O(n^{-\alpha}). \end{aligned}$$

The result for cosine coefficients follows from (3.6), (3.7) and (3.8) and for sine coefficients similarly.

As far as the order is concerned the result of Theorem 2 is the best possible as the well known example

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{e^{i2^n x}}{2^{\alpha n}},$$

which in fact satisfies (1.1), shows.

The well known order results for functions with absolutely continuous derivatives of order k can easily be generalized in a similar sense.

4. *Absolute Convergence of Gap Series.* A similar argument may be applied to produce extensions of the classical results on the absolute convergence of Fourier series⁵. The typical result is

Theorem 3. Suppose that

$$\lim \frac{N_k}{\log n_k} = \infty,$$

and that $f(x)$ satisfies a Lipschitz condition of order α , where $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, in some interval $|x - x_0| \leq \delta$. Then

$$\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Our argument is a modification of that due to S. BERNSTEIN⁶. As usual, we can assume that $x_0 = 0$. Choose a sequence M_k such that

$$(4.1) \quad k(\alpha, \delta) \log n_k \leq M_k \leq 2k(\alpha, \delta) \log n_k,$$

where $k(\alpha, \delta)$ is a positive constant depending only on α and δ to be specified later; so that, if k is large enough,

$$(4.2) \quad M_k \leq \frac{1}{2} N_p$$

when $\frac{1}{2} n_k \leq n_p \leq n_k$. We now write

$$(4.3) \quad g_k(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2n_k}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{2n_k}\right)$$

so that $g_k(x)$ has as its Fourier series $\sum_0^{\infty} 2 \sin \frac{n\pi}{2n_k} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$.

⁵ For the classical results C. f. ZYGMUND, loc. cit. ch. vi.

⁶ ZYGMUND loc. cit., p. 135.

Consequently by the choice of M_k , if k is large enough and $g_k(x)T_{M_k}(x)$ has Fourier coefficients α_n, β_n

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \alpha_{n_p} &= 2 \sin \frac{n_p \pi}{2 n_k} \cdot b_{n_p} \\ \beta_{n_p} &= -2 \sin \frac{n_p \pi}{2 n_k} \cdot a_{n_p}, \end{aligned}$$

if $\frac{1}{2} n_k \leq n_p \leq n_k$. Moreover by hypothesis $f(x)$ is bounded and therefore belongs to $L^2(-\pi, \pi)$ and consequently by BESSEL's inequality we have

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sum_{\frac{1}{2} n_k}^{n_k} (a_n^2 + b_n^2) \sin^2 \frac{n \pi}{2 n_k} &\leq \frac{1}{4} \sum_{\frac{1}{2} n_k}^{n_k} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \\ &\leq \frac{1}{4 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_k^2(x) T_{M_k}^2(x) dx, \\ &= O \left(\delta^{-2} \int_{|x| \leq \frac{1}{2} \delta} \left| f \left(x + \frac{\pi}{2 n_k} \right) - f \left(x - \frac{\pi}{2 n_k} \right) \right|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + O \left(\exp - 2 A \left(\frac{1}{2} \delta \right) M_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right) \right), \\ &= O(n_k^{-2\alpha}) + O \left(\exp - 2 A \left(\frac{1}{2} \delta \right) M_k \right), \end{aligned}$$

if k is large enough. Choosing $k(\alpha, \delta) = \alpha/A \left(\frac{1}{2} \delta \right)$ we conclude that

$$(4.6) \quad \sum_{\frac{1}{2} n_k}^{n_k} (a_n^2 + b_n^2) = O(n_k^{-2\alpha}),$$

and consequently by CAUCHY's inequality

$$(4.7) \quad \sum_{2^m}^{2^{m+1}} (|a_n| + |b_n|) = O(2^{(1/2 - \alpha)m}).$$

The result follows.

Many small variants of Theorem 3 can be trivially deduced from (4.6) and (4.7). We have for example

Theorem 4. (i) If in the hypotheses of Theorem 3 α is only restricted by $0 < \alpha < 1$, and $\beta > \frac{2}{2\alpha+1}$, then

$$\sum_0^{\infty} (|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}) < \infty.$$

(ii) If $f(x)$ satisfies the conditions of (i) and $\beta < \alpha$ then

$$\sum_1^{\infty} n^{\beta-1/2} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

A related result to Theorem 3 corresponding to a well known theorem of ZYGMUND⁷⁾ is

Theorem 5. Suppose that

$$\lim \frac{N_k}{\log n_k} = \infty,$$

and that $f(x)$ is of bounded variation and satisfies a Lipschitz condition of order α , where $0 < \alpha < 1$, in some interval $|x - x_0| \leq \delta$. Then

$$\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

We modify the standard argument in much the same way as for Theorem 3. Choose a sequence M_k such that

$$(4.8) \quad c(\alpha, \delta) \log n_k \leq M_k \leq 2c(\alpha, \delta) \log n_k$$

where $c(\alpha, \delta)$ is to be specified later, and write

$$(4.9) \quad E(x, k) = \sum_{p=1}^{2n_k} T_{M_k}^2 \left(x + \frac{p\pi}{n_k} \right) \left[f \left(x + \frac{p+\frac{1}{2}\pi}{n_k} \right) - f \left(x + \frac{p-\frac{1}{2}\pi}{n_k} \right) \right]^2 \\ = \sum_{p=1}^{2n_k} e(x, k, p).$$

By the periodicity

$$(4.10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} E(x, k) dx = 2n_k \int_{-\pi}^{\pi} T_{M_k}^2(x) \left[f \left(x + \frac{\pi}{2n_k} \right) - f \left(x - \frac{\pi}{2n_k} \right) \right]^2 dx.$$

Now consider a group G of terms of $E(x, k)$ such that both $x + \left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n_k}$, $x + \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n_k}$ lie inside $|x| \leq \frac{1}{2} \delta \pmod{2\pi}$ or outside $|x| \leq \frac{1}{4} \delta \pmod{2\pi}$ according to whether x is in a set $|x - x_0| \leq \frac{1}{2} \delta$ or in its complement. We have, if V is the total variation of $f(x)$ in $|x| \leq \delta$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_G e(x, k, p) dx = \int_E + \int_{CE} \\ = O(V n_k^{-\alpha}) + O(n_k \exp - 2AM_k) \\ = O(n_k^{-\alpha}),$$

for an appropriate choice of $c(\alpha, \delta)$ in (4.8). The complete sum is made up of $O(\delta^{-1})$ such groups of terms so that

$$(4.11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} E(x, k) dx = O(\delta^{-1} n_k^{-\alpha}).$$

By (4.10) and (4.11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_{M_k}^2(x) \left[f \left(x + \frac{\pi}{2n_k} \right) - f \left(x - \frac{\pi}{2n_k} \right) \right]^2 dx = O(n_k^{-\alpha-1}),$$

and consequently arguing as in Theorem 3

$$\sum_{\frac{1}{2} n_k}^{n_k} (a_n^2 + b_n^2) = O(n_k^{-\alpha-1}),$$

⁷⁾ ZYGMUND, loc. cit. 6.31.

so that by CAUCHY's inequality

$$\sum_{2^m}^{2^{m+1}} (|a_n| + |b_n|) = O(2^{-1/2 m \alpha}).$$

The theorem follows from (4.12).

There are routine variants of Theorem 5, similar to the variants of Theorem 3 contained in Theorem 4, which we omit.

(Eingegangen am 29. September 1953.)

Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen*).

Von

HANS J. BREMERMAN in Münster (Westf.), z. Z. Harvard University.

§ 1. Einleitung.

Im Jahre 1911 hat E. E. LEVI¹⁾ bewiesen, daß jedes Holomorphiegebiet mit hinreichend glattem Rande ein pseudokonvexes Gebiet ist und hat das Problem aufgestellt: Ist umgekehrt jedes pseudokonvexe Gebiet ein Holomorphiegebiet? 1912 veröffentlichte O. BLUMENTHAL²⁾ eine Arbeit, in der diese Frage verneint wurde. 1926 konnte H. BEHNKE³⁾ jedoch mit der Aufstellung des Kantensatzes zeigen, daß die BLUMENTHALSche Argumentation nicht aufrecht zu erhalten war. Das Problem blieb dann offen, bis es 1942 für den Fall zweier komplexer Veränderlichen durch K. OKA⁴⁾ (in der Arbeit «Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI — Domaines pseudoconvexes») positiv gelöst wurde. In der langen Zwischenzeit (1911 bis 1942) hat das Problem ungemein anregend auf die Entwicklung der Funktionentheorie von mehreren komplexen Veränderlichen gewirkt. Eine umfangreiche Literatur zeugt davon [siehe insbesondere K. OKA I—VI⁵⁾]. H. BEHNKE und K. STEIN⁶⁾ geben in ihrer Arbeit: „Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen“ einen Überblick über diese Entwicklung.

Die Pseudokonvexität kann auf verschiedene Weise definiert werden, die Definitionen sind zumeist miteinander äquivalent [siehe etwa Verf. ⁷⁾ und ebenso P. LELONG⁸⁾, der kürzlich eine Reihe neuer Äquivalenzen aufgestellt hat].

*) Die vorliegende Arbeit ist in wesentlichen Teilen im Rahmen des Navy Projects der Harvard University entstanden.

¹⁾ E. E. LEVI, B.-Th. [2].

Die Literaturangaben beziehen sich auf die Bibliographie am Schluß dieser Arbeit, sofern nicht Arbeiten, die vor 1934 erschienen sind, zitiert werden. In diesem Falle beziehen wir uns auf die Bibliographie in H. BEHNKE und P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Math. **3**, 3 (1934), abgekürzt B.-Th. Bezieht sich ein Zitat auf die Bibliographie im BEHNKE-THULLEN, so deuten wir das durch B.-Th. an.

²⁾ O. BLUMENTHAL, B.-Th.

³⁾ H. BEHNKE [1], B.-Th.

⁴⁾ K. OKA [6].

⁵⁾ K. OKA [1]—[6].

⁶⁾ BEHNKE-STEIN [3].

⁷⁾ BREMERMAN [1].

⁸⁾ P. LELONG.

Wegen dieser Äquivalenzen läßt sich das Problem für verschiedene Pseudokonvexitäten auf den Beweis des folgenden Satzes reduzieren: *H sei ein endliches, schlichtes Gebiet im Raum von n komplexen Veränderlichen. H sei pseudokonvex im Sinne von CARTAN. Dann ist H ein Holomorphiegebiet. Dabei heißt H „pseudokonvex im Sinne von CARTAN“, wenn um jeden Randpunkt von H eine Hyperkugel existiert, so daß der Durchschnitt von H mit der Hyperkugel ein Holomorphiebereich ist.*

Man könnte statt „ H ist pseudokonvex im Sinne von CARTAN“ auch sagen: „ H ist lokal Holomorphiegebiet“. Die Eigenschaft, daß ganz H Holomorphiegebiet ist, ist dagegen eine globale Eigenschaft von H . Es handelt sich also um einen Übergang vom Kleinen ins Große.

Das Problem blieb auch nach der Lösung für 2 Veränderliche durch OKA für den Fall von mehr als zwei Veränderlichen offen. Eine Arbeit von FUKS⁹⁾ behandelt ebenfalls nur den Fall von 2 Veränderlichen. Der OKAsche Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf n Veränderliche übertragen. Auch erscheint eine Bestätigung des OKAschen Resultates wünschenswert.

Der Beweis des obigen Satzes für n Veränderliche ist der Gegenstand dieser Arbeit. Der Satz gilt auch für pseudokonvexe Gebiete in STEINSchen (komplexen) Mannigfaltigkeiten. Auch hat er zahlreiche Konsequenzen [siehe etwa Verf.¹⁰⁾]. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich jedoch auf das eigentliche Problem in schlichten Gebieten. Folgerungen sowie eine Ausdehnung auf STEINSche Mannigfaltigkeiten werde ich in weiteren Veröffentlichungen behandeln.

Die vorliegende Arbeit ist im Anschluß an meine Dissertation¹¹⁾ „Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen“ (Münster, Juli 1951) entstanden. In den wesentlichen Punkten ist sie im Rahmen des Navy Projects (Contract N5ori-07634) an der Harvard University in Cambridge, Mass., USA, fertiggestellt worden. Ich möchte an dieser Stelle dem Office of Naval Research für seine freundliche Unterstützung meinen besonderen Dank sagen. Nach meiner Rückkehr nach Deutschland legte mir Herr Prof. BEHNKE ein hektographiert vervielfältigtes Manuskript von Herrn NORGUET¹²⁾ vor, in welchem das gleiche Problem behandelt und ebenfalls eine Lösung erzielt wird.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. BEHNKE in Münster, der diese Arbeit angeregt und gefördert hat.

Gliederung der Arbeit.

§ 1. Einleitung.

I. Kapitel. Vorbereitungen.

§ 2. Hilfssätze und Bezeichnungen.

§ 3. Zurückführung des Hauptsatzes auf den OKAschen Verheftungssatz und Skizzierung des Beweisganges für den Verheftungssatz.

§ 4. Die Distanzfunktion $d_B(z)$ und die Bereiche $B(z, \rho)$.

⁹⁾ B. A. FUKS.

¹⁰⁾ BREMERMAN [1] u. [2].

¹¹⁾ Siehe Fußnote 7.

¹²⁾ F. NORGUET.

II. Kapitel. Lösung des Cousin-I-Problems für (G, Δ) -Paare.

- § 5. Definition der (G, Δ) -Paare.
 § 6. Reduktion des Cousin-I-Problems für (G, Δ) -Paare auf die Cousin-I-Heftung.
 Skizzierung des Verfahrens der Heftung in den §§ 7 und 8.
 § 7. Cousin-I-Heftung für Δ .
 § 8. Cousin-I-Heftung für Δ .

III. Kapitel. Approximation von D durch (G, Δ) -Paare.

- § 9. Approximation des Gebietes D durch Bereiche $G^{(e)}$.
 § 10. Nachweis, daß $G_1^{(e)}$ und $G_2^{(e)}$ Holomorphiebereiche sind.
 § 11. Konstruktion der Folgen $\Delta^{(e, \nu)}$.

IV. Kapitel. Folgerung des Verheftungssatzes.

- § 12. Konstruktion der Folgen $Q_\mu^{(e, \nu)}$ und Folgerung des Verheftungssatzes.

I. Kapitel. Vorbereitungen.

§ 2. Hilfssätze und Bezeichnungen.

2.1. C^n sei der Raum von n komplexen Veränderlichen $z_1 \dots z_n$. Es sei $z_j = x_j + i y_j$. Wir schreiben für den komplexen Vektor $(z_1 \dots z_n)$: $\mathfrak{z} =_{df} (z_1 \dots z_n)$. Es sei $|\mathfrak{z}| =_{df} \sum_{j=1}^n |z_j|$.

2.2. Wir benutzen das Symbol „ $=_{df}$ “, wenn wir eine Definitionsgleichung haben, durch die ein neues Zeichen eingeführt wird. Wir werden häufig „ $\{\mathfrak{z} | \dots\}$ “ schreiben. Das ist „die Menge der \mathfrak{z} , so daß \dots “. Das heißt, $\{\mathfrak{z} | E(\mathfrak{z})\}$ ist die Menge aller \mathfrak{z} , die die Eigenschaft E haben. $E(\mathfrak{z})$ braucht dabei nicht von allen Koordinaten von \mathfrak{z} effektiv abzuhängen. Beispiel: $\{\mathfrak{z} | x_1 = 0\}$. Das ist die zur x_1 -Achse orthogonale Hyperebene durch den Nullpunkt. — Das Zeichen „ \wedge “ (gelesen: „und“) ist das Zeichen für die logische Konjunktion zweier Ausdrücke.

2.3. „Umgebung“ eines Punktes oder allgemeiner einer Punktmenge M ist jede offene Menge, die M enthält. Insbesondere kann also eine offene Menge Umgebung von sich selber sein, nicht aber eine abgeschlossene Menge.

Falls M_1 kompakt in M_2 enthalten ist, so schreiben wir $M_1 \subset\subset M_2$. Für die abgeschlossene Hülle von M schreiben wir \bar{M} .

2.4. Wir betrachten in dieser Arbeit, ohne es in Zukunft immer zu sagen, nur *schlichte und endliche Bereiche* im C^n . „Endlich“ soll heißen, daß kein unendlich ferner Punkt des C^n innerer Punkt des Bereichs ist. Unter „Bereich“ verstehen wir, wie heute üblich, eine offene Punktmenge. Ein „Gebiet“ ist ein zusammenhängender Bereich. Es sei bemerkt, daß in der älteren Literatur „Bereich“ häufig in der Bedeutung von „Gebiet“ verwandt wird.

2.5. Ein Bereich (Gebiet) H heißt „Holomorphiebereich“ (gebiet), wenn es eine in H holomorphe Funktion gibt, die nicht über H hinaus holomorph fortsetzbar ist¹³⁾. (Statt „Holomorphiebereich“ findet sich in der älteren Literatur häufig „Regularitätsbereich“. Da der Begriff „regulär“ nicht ganz eindeutig ist, wird er heute immer mehr durch „holomorph“ ersetzt.)

¹³⁾ B.-Th., p. 16. (Im B.-Th.-Bericht findet sich die Originalliteratur angegeben. Wir zitieren der Einfachheit wegen so weit wie möglich B.-Th.)

2.6. Der Durchschnitt von endlich vielen oder unendlich vielen Holomorphiebereichen ist wieder ein Holomorphiebereich¹⁴⁾.

2.7. Falls zu jedem Randpunkt $\delta^{(R)}$ eines Bereiches H eine in H holomorphe Funktion existiert, die in $\delta^{(R)}$ singulär ist, so ist H ein Holomorphiebereich¹⁵⁾.

2.8. $\{B_\nu\}$ sei eine Folge von Bereichen. Falls alle $B_\nu \subset B$ und falls jeder Punkt von B samt einer festen vollen Umgebung in fast allen B_ν liegt, so sagen wir: B_ν konvergiert gegen B und schreiben: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} B_\nu = B$. Insbesondere ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} B_\nu = B$, wenn jede kompakte Teilmenge von B in fast allen B_ν enthalten ist.

2.9. Satz von BEHNKE-STEIN. Es sei H_ν eine Folge von Holomorphiebereichen und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} H_\nu = H$. Dann ist auch H ein Holomorphiebereich¹⁶⁾.

2.10. Ein Bereich P heißt „analytisches Polyeder“, wenn ein Bereich B existiert mit $P \subset\subset B$ und k in B holomorphe eindeutige Funktionen $X_1(\delta) \dots X_k(\delta)$ existieren, so daß

$$P = \{\delta \mid \delta \in B \wedge |X_1(\delta)| < 1 \wedge \dots \wedge |X_k(\delta)| < 1\}.$$

P heißt ein „WEILSches analytisches Polyeder“, wenn der Durchschnitt von je j verschiedenen der Hyperflächen $\{\delta \mid |X_1(\delta)| = 1\} \dots \{\delta \mid |X_k(\delta)| = 1\}$, so weit er auf dem Rande von P liegt, höchstens $2n - j$ dimensional ist.

2.11. Jeder Holomorphiebereich H läßt sich durch WEILSche analytische Polyeder W_ν approximieren, so daß $W_\nu \subset\subset W_{\nu+1} \subset\subset H$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} W_\nu = H$ ist¹⁷⁾.

2.12. W sei ein WEILSches Polyeder in dem Bereich B . Der Durchschnitt des Randes von W mit den n verschiedenen Hyperflächen $\{\delta \mid |X_1(\delta)| = 1\} \dots \{\delta \mid |X_n(\delta)| = 1\}$, mit der Orientierung nach F. SOMMER¹⁸⁾ versehen, sei $\sigma_1 \dots \sigma_n$, $f(\delta)$ sei eine in B holomorphe Funktion. Dann lautet die BERGMANN-WEILSche¹⁹⁾ Integralformel:

$$\text{für } \delta \in W: f(\delta) = \tau \sum_{j_1 \dots j_n} \int_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_n \\ \nu=1}} \frac{\delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)}{\prod_{\nu=1}^n (X_{j_\nu}(\zeta) - X_{j_\nu}(\delta))} f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

wobei über alle $j_1 \dots j_n$ Kombinationen summiert wird, wo alle $j_1 \dots j_n$ voneinander verschieden sind und $j \in \{1 \dots k\}$. Ferner ist in der Integralformel

$$\tau = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n! (2\pi i)^n} \quad \text{und} \quad \delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) = \text{Det} |P_{j_\nu}^\mu(\delta, \zeta)|. \text{ Die } P_{j_\nu}^\mu(\delta, \zeta) \text{ sind die}$$

Funktionen aus der Zerlegung: $X_{j_\nu}(\zeta) - X_{j_\nu}(\delta) = \sum_{\mu=1}^n (\zeta_\mu - z_\mu) P_{j_\nu}^\mu(\delta, \zeta)$. Eine

¹⁴⁾ B.-TH., p. 74.

¹⁵⁾ B.-TH., p. 75.

¹⁶⁾ BEHNKE-STEIN [1].

¹⁷⁾ BEHNKE-STEIN [2] und A. WEIL.

¹⁸⁾ F. SOMMER.

¹⁹⁾ S. BERGMANN und A. WEIL. Wir benutzen hier die Integralformel, wie sie bei F. Sommer dargestellt ist (auf p. 177).

solche Zerlegung ist nach HEFER¹⁸⁾ immer möglich. Die $P_{j_r}^{\mu}(\delta, \zeta)$ sind in $B_\delta \times B_\zeta$ holomorphe Funktionen der $2n$ komplexen Veränderlichen (δ, ζ) . Also ist auch jedes $\delta_{j_1} \dots \delta_{j_n}(\delta, \zeta)$ in $B_\delta \times B_\zeta$ holomorph.

2.13. Ein Bereich B heißt „holomorph konvex“²⁰⁾, wenn es zu jedem $B_0 \subset\subset B$ ein B^* gibt, so daß $B_0 \subset B^* \subset\subset B$ und so daß zu jedem $\delta^{(0)} \in B - B^*$ eine in B holomorphe eindeutige Funktion $f(\delta)$ existiert, so daß

$$\max_{\delta \in B_0} |f(\delta)| < |f(\delta^{(0)})|$$

ist.

Jeder holomorph konvexe Bereich ist ein Holomorphiebereich²¹⁾.

2.14. Ein Bereich B heißt „konvex in bezug auf die Menge M von Funktionen“, wenn die Bedingung in 2.13. bereits mit Funktionen aus der Menge M erfüllt werden kann. Beispiel: M die Menge der in einem größeren Bereich (als B) holomorphen Funktionen.

2.15. H_1 und H_2 seien zwei Holomorphiebereiche, $H_1 \subset H_2$. Es möge eine stetige Schar von Holomorphiegebieten $H(t)$ geben, so daß für $t = t_1: H(t_1) = H_1$ und für $t = t_2: H(t_2) = H_2$. Dann läßt sich nach BEHNKE-STEIN²²⁾ in jedem kompakten Teilgebiet H_1^* , $H_1^* \subset\subset H_1$, jede in H_1 holomorphe Funktion durch in ganz H_2 holomorphe Funktionen gleichmäßig approximieren. Das heißt: Zu jeder in H_1 holomorphen Funktion $f_1(\delta)$ und zu jedem $H_1^* \subset\subset H_1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine in H_2 holomorphe Funktion $f_2(\delta)$, so daß

$$|f_1(\delta) - f_2(\delta)| < \varepsilon \text{ in } H_1^*.$$

Wir brauchen diesen Satz hier nur in dieser Form. BEHNKE-STEIN beweisen ihn statt für „stetige Ausdehnung von H_1 auf H_2 “ auch für „halbstetige Ausdehnung“²³⁾.

2.16. Das I. COUSINSche Problem. B sei ein Bereich. In B sei eine „Cousin-I-Verteilung“ vorgegeben. Das heißt: Jedem Punkt $\delta^{(0)} \in B$ sei eine Umgebung $\mathcal{U}_{\delta^{(0)}}$ und eine Lokalfunktion $f_{\delta^{(0)}}(\delta)$ zugeordnet, die in $\mathcal{U}_{\delta^{(0)}}$ meromorph ist.

Wir nennen zwei meromorphe Funktionen „äquivalent (in bezug auf Subtraktion)“, in Zeichen: $f_1(\delta) \cong f_2(\delta)$, wenn die Differenz $f_1(\delta) - f_2(\delta)$ holomorph ist.

Wir sagen: Eine Verteilung erfüllt die Verträglichkeitsbedingungen, wenn für zwei beliebige Punkte $\delta^{(1)} \in B$ und $\delta^{(2)} \in B$ gilt: $f_{\delta^{(1)}}(\delta) \cong f_{\delta^{(2)}}(\delta)$ in $\mathcal{U}_{\delta^{(1)}} \cap \mathcal{U}_{\delta^{(2)}}$ oder $\mathcal{U}_{\delta^{(1)}} \cap \mathcal{U}_{\delta^{(2)}} = \emptyset$ ²⁴⁾.

2.17. B sei ein Holomorphiebereich. Dann ist jede Cousin-I-Verteilung, die in B die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, in B lösbar. Das heißt: Es gibt eine in B meromorphe Funktion $F(\delta)$, die in jedem $\mathcal{U}_{\delta^{(0)}}$ mit $f_{\delta^{(0)}}(\delta)$ äquivalent ist²⁵⁾.

²⁰⁾ B.-TH., p. 72.

²¹⁾ B.-TH., p. 73.

²²⁾ BEHNKE-STEIN [4] und [5].

²³⁾ Siehe Fußnote 22.

²⁴⁾ B.-TH., p. 64.

²⁵⁾ K. OKA [2].

§ 3. Zurückführung des Hauptsatzes auf den Okaschen Verheftungssatz und Skizzierung des Beweisganges für den Verheftungssatz.

3.1. Reduktion des Hauptsatzes.

Es ist das Anliegen dieser Arbeit zu beweisen: Jedes schlichte, endliche (im Sinne von CARTAN) pseudokonvexe Gebiet H im Raume von n komplexen Veränderlichen ist ein Holomorphiegebiet. Wir wollen diesen Satz zunächst auf folgenden (OKASchen Verheftungssatz) reduzieren:

D sei ein schlichter, beschränkter Bereich im Raume von n komplexen Veränderlichen. Es seien die Bereiche $D_1 =_{df} D \cap \{\lambda | x_1 > a_1\}$ und $D_2 =_{df} D \cap \{\lambda | x_1 < a_2\}$ Holomorphiebereiche und es sei $a_1 < a_2$. Dann ist D ein Holomorphiebereich.

Wir merken zunächst an, daß dieser Verheftungssatz ein (triviales) Analogon für konvexe Gebiete hat: Betrachten wir die Ebene der beiden reellen Veränderlichen x_1 und x_2 . D sei ein Gebiet in dieser Ebene. Sind dann die Gebiete $D_1 =_{df} D \cap \{(x_1, x_2) | x_1 > a_1\}$ und $D_2 =_{df} D \cap \{(x_1, x_2) | x_1 < a_2\}$ konvexe Gebiete, und ist $a_1 < a_2$, so ist D ein konvexes Gebiet.

Zur Ableitung unseres Hauptsatzes aus dem Verheftungssatz verfahren wir folgendermaßen: Wir überziehen jede der n Koordinatenebenen durch ein Gitternetz: $x_j = \mu_j \cdot d$; $y_j = \nu_j \cdot d$, $j = 1 \dots n$, $\mu_j, \nu_j = \dots - 1, 0, 1, 2 \dots$, und d reell und > 0 . d ist die „Gitterkonstante“. Dann zerlegen offenbar die Hyperflächen $\{\lambda | x_j = \mu_j d\}$, und $\{\lambda | y_j = \nu_j d\}$ den Raum in lauter „Hyperwürfel“:

$$W_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n}^{(d)} =_{df} \bigcap_{t=1}^n \{\lambda | \mu_t d < x_t < (\mu_t + 1) d\} \cap \bigcap_{t=1}^n \{\lambda | \nu_t d < y_t < (\nu_t + 1) d\}.$$

Jeder dieser Hyperwürfel $W_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n}^{(d)}$ ist trivialerweise ein Holomorphiegebiet.

Wir nehmen nun zunächst an, daß unser Gebiet H beschränkt ist. Nach Voraussetzung gibt es um jeden Randpunkt von H eine Hyperkugel, so daß der Durchschnitt mit H ein Holomorphiebereich ist. Ist nun H beschränkt, so können wir den Rand von H mit endlich vielen dieser Hyperkugeln überdecken. Machen wir daher unsere Gitterkonstante d klein genug, so liegt jeder Hyperwürfel, der den Rand von H schneidet, in einer dieser endlich vielen Hyperkugeln. Da der Durchschnitt von H mit jeder der Hyperkugeln bereits ein Holomorphiebereich ist, so ist der Durchschnitt mit einem darin liegenden Hyperwürfel erst recht ein Holomorphiebereich. Es ist also in der Menge aller Hyperwürfel, die einen nichtleeren Durchschnitt mit H haben, der Durchschnitt eines jeden Hyperwürfels mit H ein Holomorphiebereich. Nun halbieren wir unsere Gitterkonstante d noch einmal. Dann erhalten wir lauter ineinandergreifende Hyperwürfel, deren Durchschnitt mit H ein Holomorphiebereich ist.

Wir haben bei der Formulierung unseres Verheftungssatzes die zur x_1 -Achse orthogonalen Hyperebenen ausgezeichnet. Das ist natürlich willkürlich.

Der Verheftungssatz gilt, wenn er in der obigen Formulierung gilt, auch für alle x_j und y_j , $j = 1 \dots n$ anstelle von x_1 . Also können wir unseren Verheftungssatz auf alle die ineinandergreifenden (endlich vielen) $W_{\mu_1, \dots, \mu_n, r_1, \dots, r_n}^{(d)} \cap H$ anwenden und diese sukzessive miteinander verheften, bis wir H erhalten. Damit ist unser Hauptsatz für den Fall, daß H beschränkt ist, aus dem Verheftungssatz bewiesen.

Ist H nicht beschränkt, so bilden wir zunächst den Durchschnitt von H mit einer (großen) Hyperkugel vom Radius R . $H_R = {}_d H \cap \{\delta \mid |\delta| < R\}$. Dann ist H_R pseudokonvex und beschränkt, also ein Holomorphiebereich. Dann lassen wir R gegen unendlich gehen und wenden den Satz von BEHNKE-STEIN über konvergente Folgen von Holomorphiebereichen an. Daraus folgt, daß $\lim_{R \rightarrow \infty} H_R = H$ ein Holomorphiegebiet ist.

Es ist also unser Hauptsatz auf den OKAschen Verheftungssatz reduziert. Der Beweis des Verheftungssatzes ist der Gegenstand des restlichen Teiles der Arbeit. Wir wollen den Beweisgang jetzt kurz skizzieren.

3.2. Skizzierung des Beweisganges.

Wenn wir bereits wüßten, daß D ein Holomorphiebereich ist, so wüßten wir auch, daß das I. COUSINSche Problem in D lösbar ist. Wir benutzen umgekehrt die Lösbarkeit des I. COUSINSchen Problems beim Beweis, daß D ein Holomorphiebereich ist.

Beim I. COUSINSchen Problem ist ein Bereich B gegeben und jedem Punkte aus B ist eine Umgebung zugeordnet und eine in der Umgebung meromorphe Funktion, im folgenden „Lokalfunktion“ genannt. Dieses System von Umgebungen und Lokalfunktionen heißt „Cousin-I-Verteilung“. Im Durchschnitt zweier Umgebungen seien die zugehörigen Lokalfunktionen äquivalent, d. h., daß ihre Differenz dort holomorph ist (vgl. 2.16 und 2.17). Das Problem besteht darin: Man erweise die Existenz einer in ganz B meromorphen Funktion, die in jeder der Umgebungen mit der zugehörigen Lokalfunktion äquivalent ist. Oder anders ausgedrückt: Man erweise die Existenz einer in B meromorphen Funktion, die genau die lokal vorgegebenen Pole besitzt.

Der Nachweis der Lösbarkeit des I. COUSINSchen Problems (im folgenden kurz „Cousin-I-Problem“ genannt), gelingt uns nicht unmittelbar für D selber. Das Verfahren, mit dem wir die Lösung konstruieren, stellt eine ganze Reihe von Anforderungen an den Bereich, in dem das Cousin-I-Problem gelöst werden soll. Genauer: Anforderungen an das Bereichspaar. Beim gewöhnlichen Cousin-I-Problem, wie wir es eben beschrieben haben, wird die Lösungsfunktion für denselben Bereich gesucht, für den die Verteilung definiert ist. Anders bei unserem Verfahren. Dazu benötigen wir ein Bereichspaar (G, A) mit $A \subset G$. Die Cousin-I-Verteilung muß in G definiert sein (und dort die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen). Die Lösungsfunktion bekommen wir dann in A . Die Lösung dieses Cousin-I-Problems für (G, A) -Paare, die einer Reihe von besonderen Voraussetzungen genügen, erfolgt in Kapitel II.

Im III. Kapitel approximieren wir dann den Bereich D beliebig nahe durch (G, Δ) -Paare. Wir konstruieren eine Folge $G^{(e)}$ mit $G^{(e)} \subset D$ und $\lim_{e \rightarrow 0} G^{(e)} = D$ und zu jedem $G^{(e)}$ eine Folge $\Delta^{(e, \nu)}$ mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e, \nu)} = G^{(e)}$, so daß jedes Paar $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ ein (G, Δ) -Paar ist (in dem wir das Cousin-I-Problem lösen können).

Im IV. Kapitel approximieren wir schließlich jeden Bereich $\Delta^{(e, \nu)}$ noch durch eine Folge von Bereichen $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ mit $Q_{\mu}^{(e, \nu)} \subset \Delta^{(e, \nu)}$ und $\lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_{\mu}^{(e, \nu)} = \Delta^{(e, \nu)}$.

Die $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ sind so beschaffen, daß wir zu jedem Randpunkt $\delta^{(0)}$ von $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ eine in ganz $G^{(e)}$ definierte Cousin-I-Verteilung finden können, die in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$ einen Pol vorschreibt, jedoch keine Pole in $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ vorgibt. Um eine solche Cousin-I-Verteilung zu finden, benutzen wir wieder die speziellen Eigenschaften der $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ -Paare. Wir lösen die Verteilung und erhalten eine Funktion, die in $\Delta^{(e, \nu)}$ meromorph ist (also in einer Umgebung von $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$), die in $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ holomorph ist und in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$ einen Pol besitzt.

Es existiert also zu jedem Randpunkt von $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ eine in $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ holomorphe Funktion, die in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$ singulär wird. Damit ist nach einem Satz von CARTAN-THULLEN (vergl. 2.7) $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ Holomorphiebereich.

Jetzt folgt der OKASche Verheftungssatz leicht: Da jedes $Q_{\mu}^{(e, \nu)}$ Holomorphiebereich ist, so ist nach dem Satz von BEHNKE-STEIN auch $\lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_{\mu}^{(e, \nu)} = \Delta^{(e, \nu)}$ Holomorphiebereich. Mit jedem $\Delta^{(e, \nu)}$ ist auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e, \nu)} = G^{(e)}$ Holomorphiebereich. Und schließlich ist ebenso $\lim_{e \rightarrow 0} G^{(e)} = D$ Holomorphiebereich, und damit ist der Verheftungssatz bewiesen.

Einen wesentlichen Teil des Beweises bildet die Lösung des Cousin-I-Problems für (G, Δ) -Paare. Der Nachweis verläuft so, daß wir die gegebene Verteilung zunächst für zwei Teilbereiche von G lösen, die Holomorphiebereiche sind, und dann die Lösungen verheften. Bei der Verheftung, d. h. der Gewinnung einer Gesamtlösung aus den beiden Teillösungen, benutzen wir die WEIL-BERGMANNsche Integralformel (s. 2.12). Ein wesentlicher Teil der speziellen Eigenschaften, die die (G, Δ) -Paare haben müssen, ist erforderlich, damit wir die Integralformel anwenden können. Die Heftung gelingt zunächst nur in einem Teilbereich und wird dann durch Approximation auf den ganzen Bereich ausgedehnt, wobei eine Integralgleichung zu lösen ist. Eine genauere Skizzierung des Heftungsverfahrens befindet sich in § 6.

Um die approximierenden Paare $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ konstruieren zu können, benötigen wir mehrere Hilfssätze, die wir zunächst (in § 4) beweisen. Diese Hilfssätze sind auch an sich selber von Interesse. So befindet sich darunter eine Variante des Kontinuitätssatzes²⁶⁾ und des sog. CARTAN-THULLENSchen „Fundamentalsatzes“²⁷⁾. Wir beweisen in § 4 an einigen Stellen etwas mehr, als bei den späteren Anwendungen benötigt wird.

²⁶⁾ BEHNKE-SOMMER.

²⁷⁾ CARTAN-THULLEN, B.-Th.

§ 4. Die Distanzfunktion $d_B(\zeta)$ und die Bereiche $B(\chi(\zeta), \varrho)$.

4.1. Definition²⁹⁾. B sei ein (schlichter) Bereich. Dann bezeichne $d_B(\zeta)$ den euklidischen Minimalabstand des Punktes ζ vom Rande von B .

Das heißt $d_B(\zeta)$ ist das Minimum von $|\zeta - \zeta^{(R)}|$ in bezug auf alle Randpunkte $\zeta^{(R)}$ von B . Das ist gleich der kleinsten oberen Schranke der Radien aller Hyperkugeln mit dem Mittelpunkt in ζ , die noch ganz in B liegen.

4.2. $d_B(\zeta)$ hat offenbar die folgenden Eigenschaften: $d_B(\zeta)$ ist endlich in B , falls B mindestens einen endlichen Randpunkt hat. $d_B(\zeta)$ ist positiv in B und geht überall am Rande stetig gegen Null.

4.3. Die Distanzfunktion $d_B(\zeta)$ ist eine stetige Funktion von ζ in B .

Beweis. $d_B(\zeta)$ ist nach Definition 4.1. das Minimum des euklidischen Abstandes von ζ zu einem beliebigen Randpunkt von B . Wegen der Abgeschlossenheit der Randpunktmenge wird das Minimum für (mindestens) einen Randpunkt von B angenommen. Haben wir also einen Punkt $\zeta^{(0)} \in B$, so existiert ein Randpunkt $\zeta^{(0,R)}$ von B , so daß $|\zeta^{(0)} - \zeta^{(0,R)}| = d_B(\zeta^{(0)})$ ist.

Es seien nun $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$ zwei Punkte aus B mit einem Abstand $|\zeta^{(1)} - \zeta^{(2)}| < \delta$. $\zeta^{(1,R)}$ und $\zeta^{(2,R)}$ seien die zugehörigen Randpunkte, so daß $|\zeta^{(1)} - \zeta^{(1,R)}| = d_B(\zeta^{(1)})$ und $|\zeta^{(2)} - \zeta^{(2,R)}| = d_B(\zeta^{(2)})$ ist.

Nun ist auf Grund der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm:

$$\begin{aligned} |\zeta^{(1,R)} - \zeta^{(2)}| &= |\zeta^{(1,R)} - \zeta^{(1)} + \zeta^{(1)} - \zeta^{(2)}| \leq |\zeta^{(1,R)} - \zeta^{(1)}| + |\zeta^{(1)} - \zeta^{(2)}| \\ &= d(\zeta^{(1)}) + |\zeta^{(1)} - \zeta^{(2)}| < d(\zeta^{(1)}) + \delta. \end{aligned}$$

Und analog ist

$$|\zeta^{(2,R)} - \zeta^{(1)}| \leq |\zeta^{(2,R)} - \zeta^{(2)}| + |\zeta^{(2)} - \zeta^{(1)}| < d(\zeta^{(2)}) + \delta.$$

Andererseits ist $d_B(\zeta^{(2)}) \leq |\zeta^{(1,R)} - \zeta^{(2)}|$, denn $\zeta^{(1,R)}$ ist ein Randpunkt von B und $d_B(\zeta^{(2)})$ ist das Minimum aller Abstände von $\zeta^{(2)}$ zu einem Randpunkt. Ebenso ist: $d_B(\zeta^{(1)}) \leq |\zeta^{(2,R)} - \zeta^{(1)}|$. Das ergibt zusammen mit dem obigen

$$d_B(\zeta^{(2)}) \leq |\zeta^{(1,R)} - \zeta^{(2)}| \leq d_B(\zeta^{(1)}) + \delta$$

und

$$d_B(\zeta^{(1)}) \leq |\zeta^{(2,R)} - \zeta^{(1)}| \leq d_B(\zeta^{(2)}) + \delta.$$

Also $|d_B(\zeta^{(1)}) - d_B(\zeta^{(2)})| < \delta$. Das heißt:

Falls $|\zeta^{(1)} - \zeta^{(2)}| < \delta$ ist, so ist $|d_B(\zeta^{(1)}) - d_B(\zeta^{(2)})| < \delta$, also ist $d_B(\zeta)$ stetig in B .

4.4. Es gilt $d_{B_1 \cap B_2}(\zeta) = \min(d_{B_1}(\zeta); d_{B_2}(\zeta))$. Das ergibt sich unmittelbar auf Grund der Definition.

4.5. Definition. B sei ein Bereich, $\chi(\zeta)$ sei eine holomorphe Funktion in B . Dann definieren wir:

$$B(\chi(\zeta), \varrho) = \{ \zeta \mid \zeta \in B \wedge d_B(\zeta) > |\chi(\zeta)| \cdot \varrho \}.$$

Das heißt $B(\chi(\zeta), \varrho)$ ist die Menge aller Punkte aus B , die einen Abstand größer als $|\chi(\zeta)| \cdot \varrho$ vom Rande von B haben.

4.6. Es gilt:

$$\{B_1 \cap B_2\}(\chi(\zeta), \varrho) = B_1(\chi(\zeta), \varrho) \cap B_2(\chi(\zeta), \varrho).$$

²⁹⁾ Vgl. BREMERMAN [2].

Anmerkung: $\{B_1 \cap B_2\}(\chi(\delta), \varrho)$ soll bedeuten, daß unsere Operation auf $B_1 \cap B_2$ anzuwenden ist. Also, wenn $B_3 =_{df} B_1 \cap B_2$, so ist

$$\{B_1 \cap B_2\}(\chi(\delta), \varrho) = B_3(\chi(\delta), \varrho).$$

Dagegen bezeichne $B_1 \cup B_2(\chi(\delta), \varrho)$ den Durchschnitt von B_1 mit $B_2(\chi(\delta), \varrho)$.

Beweis von 4.6. Es ist nach Definition

$$B_1(\chi(\delta), \varrho) = \{\delta \mid \delta \in B_1 \wedge d_{B_1}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho\}$$

$$B_2(\chi(\delta), \varrho) = \{\delta \mid \delta \in B_2 \wedge d_{B_2}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho\}.$$

Bilden wir nun den Durchschnitt, so können wir rechts zur Konjunktion der beiden Bedingungen in einer einzigen Klammer übergehen.

$$\begin{aligned} & B_1(\chi(\delta), \varrho) \cap B_2(\chi(\delta), \varrho) \\ &= \{\delta \mid \delta \in B_1 \wedge \delta \in B_2 \wedge d_{B_1}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho \wedge d_{B_2}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho\}, \end{aligned}$$

dafür können wir schreiben:

$$= \{\delta \mid \delta \in B_1 \cap B_2 \wedge \min(d_{B_1}(\delta); d_{B_2}(\delta)) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho\}.$$

Und das ist auf Grund von 4.4 gleich:

$$= \{\delta \mid \delta \in B_1 \cap B_2 \wedge d_{B_1 \cap B_2}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho\} = \{B_1 \cap B_2\}(\chi(\delta), \varrho).$$

4.7. Falls im Bereich B_1 überall gilt: $|\psi(\delta)| \geq |\chi(\delta)|$, so gilt für einen beliebigen Bereich B_2 :

$$B_1 \cap B_2(\psi(\delta), \varrho) \subset B_1 \cap B_2(\chi(\delta), \varrho).$$

Beweis. In B_1 , also erst recht in $B_1 \cap B_2$ gilt $|\psi(\delta)| \cdot \varrho > |\chi(\delta)| \cdot \varrho$. Daraus folgt:

Wenn $d_{B_1}(\delta) > |\psi(\delta)| \cdot \varrho$ in $B_1 \cap B_2$, so $d_{B_2}(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot \varrho$ in $B_1 \cap B_2$.

Daraus folgt unser Satz unmittelbar.

4.8. Falls B beschränkt ist und $(\chi(\delta))^{-1}$ in B beschränkt ist, so ist für alle $\varrho > 0$: $B(\chi(\delta), \varrho) \subset B$. Falls $(\chi(\delta))^{-1}$ beschränkt ist, so existiert für jedes $\varrho > 0$ ein ε , so daß $|\chi(\delta)| \cdot \varrho > \varepsilon > 0$ in ganz B . Weil B beschränkt ist, gibt es nur endliche Randpunkte. Und zu jedem Randpunkt $\delta^{(R)}$ von B gibt es eine Umgebung \mathcal{U} , nämlich $\mathcal{U} = \{\delta \mid |\delta - \delta^{(R)}| < \varepsilon\}$, so daß in $\mathcal{U} \cap B$ gilt $d_B(\delta) < \varepsilon$. Es folgt unser Satz.

4.9. Wir beweisen jetzt eine Variation des sog. CARTAN-THULLENSCHEN „Fundamentalsatzes“²⁷⁾ u.²⁸⁾

B sei ein (schlichter) beschränkter Holomorphiebereich. $\chi(\delta)$ sei in B holomorph und $(\chi(\delta))^{-1}$ sei in B holomorph und beschränkt. S sei eine kompakte Teilmenge von B . Jede in B holomorphe Funktion nehme ihr Maximum auf der Teilmenge $T \subset S$ an. $d_B(\delta)$ sei die euklidische Distanzfunktion (s. 4.1.). Es sei $\min_{\delta \in T} (|\chi(\delta)|^{-1} \cdot d_B(\delta)) \geq m$.

Dann ist $|\chi(\delta)|^{-1} \cdot d_B(\delta) \geq m$ nicht nur in T sondern in ganz S .

Anmerkung I. CARTAN-THULLEN beweisen einen ähnlichen Satz für die „Randdistanz“ (und $\chi(\delta) \equiv 1$) anstelle unseres euklidischen Randabstandes $d_B(\delta)$. $d_B(\delta)$ ist abgeleitet von dem euklidischen Abstand zweier Punkte.

Die CARTAN-THULLENSCHE „Randdistanz“ dagegen ist abgeleitet von der „Maximummetrik“, bei der man zwei Punkten $\mathfrak{z}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}^{(2)}$ $\text{Max}_{\nu=1 \dots n} (|z_\nu^{(1)} - z_\nu^{(2)}|)$ als ihren Abstand zuordnet.

Unsere Distanzfunktion ist invariant gegenüber euklidischen Transformationen. Die CARTAN-THULLENSCHE Randdistanz dagegen ist invariant nur gegenüber der Gruppe der Vertauschungen der Koordinatenebenen und euklidischen Transformationen innerhalb der einzelnen Koordinatenebenen. Die Multiplikation von $d_B(\mathfrak{z})$ mit $(\chi(\mathfrak{z}))^{-1}$ führt uns bereits zu einer verallgemeinerten „Distanzfunktion“. Wir merken an, daß sich unser „Fundamentalsatz“ in bezug auf die Klasse der zugelassenen Distanzfunktionen noch wesentlich ausdehnen läßt (auf pseudokonvexe (plurisubharmonische) Funktionen). Insbesondere läßt sich die gegenüber holomorphen Transformationen invariante BERGMANNSCHE Metrik heranziehen. Dann erhält man eine holomorph invariante „Distanzfunktion“. (Vergl. BREMERMAN [2]).

Anmerkung II. Unser „Fundamentalsatz“ enthält für schlichte beschränkte Holomorphiebereiche den Kontinuitätssatz in allgemeiner Form²⁹⁾. Der Kontinuitätssatz besagt: B sei Holomorphiebereich. Es konvergiere eine Folge von analytischen Flächenstücken F_ν (bzw. Flächen, für die das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen gilt) gegen eine Grenzfläche F_0 . Die Ränder R_ν der F_ν mögen gegen R_0 von F_0 konvergieren. Es sei $\{F_\nu \cup R_\nu\} \subset B$ für alle ν . Ist dann $R_0 \subset B$, so auch $F_0 \subset B$.

Dieser Satz folgt aus unserem Satz sofort: Nach Voraussetzung nimmt jede in B holomorphe Funktion ihr Maximum in bezug auf $F_\nu \cup R_\nu$ auf R_ν an. Wir setzen $S = \bigcup_{\nu} F_\nu \cup R_\nu$ und $T = R_\nu$ und $\chi(\mathfrak{z}) \equiv 1$. Dann ist also auf Grund unseres Fundamentalsatzes: $\min_{\mathfrak{z} \in F_\nu \cup R_\nu} d_B(\mathfrak{z}) = \min_{\mathfrak{z} \in R_\nu} d_B(\mathfrak{z})$. Wegen der Stetigkeit der Distanzfunktion $d_B(\mathfrak{z})$ (s. 4.3) gilt diese Relation auch im limes für F_0 und R_0 . Ist nun $R_0 \subset B$, so ist der Mindestabstand von R_0 vom Rande von B positiv. Es gilt also

$$\min_{\mathfrak{z} \in F_0 \cup R_0} d_B(\mathfrak{z}) = \min_{\mathfrak{z} \in R_0} d_B(\mathfrak{z}) > 0,$$

und das bedeutet, daß $F_0 \subset B$. w.z.b.w. (Vergl. BREMERMAN [2]).

Anmerkung III. Unser Fundamentalsatz gilt für eine wie für mehrere komplexe Veränderliche. (Man nehme im Falle einer Veränderlichen als S z. B. ein kompaktes Teilgebiet von B . Als T nehme man den Rand von S .) Der Unterschied zwischen einer und mehreren Veränderlichen besteht darin; Bei mehr als einer Veränderlichen gibt es Mengen S , die eine Dimension haben, die kleiner als die Dimension von B ist, und die trotzdem echte Teilmengen T besitzen, in bezug auf die das Maximumprinzip gilt. Bei einer Veränderlichen ist das nicht der Fall.

4.10. Beweis des „Fundamentalsatzes“ 4.9. Wir betrachten zunächst die Punktmenge

$$\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}^{(0)} \in T \wedge |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}^{(0)}| < d_B(\mathfrak{z}^{(0)}) - \varepsilon'\}, \quad \varepsilon' > 0.$$

²⁹⁾ Siehe Fußnote 26).

Offenbar liegt diese Menge kompakt in B . $(\chi(\delta))^{-1}$ ist nach Voraussetzung beschränkt. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ε' , so daß: $\varepsilon \geq |\chi(\delta)|^{-1} \cdot \varepsilon'$. Nun ist nach der Voraussetzung unseres Fundamentalsatzes für $\delta^{(0)} \in T$: $d_B(\delta^{(0)}) |\chi(\delta^{(0)})|^{-1} \geq m$. Dann ist also für $\delta^{(0)} \in T$: $(m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})| \leq d_B(\delta^{(0)}) - \varepsilon'$. Dann ist die Punktmenge

$$T^*(\varepsilon) =_{df} \{\delta \mid \delta^{(0)} \in T \wedge |\delta - \delta^{(0)}| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|\}$$

in der obigen enthalten und liegt damit auch kompakt in B .

Es sei $f(\delta)$ eine in B holomorphe Funktion. Dann ist $f(\delta)$ auf jeder kompakten Teilmenge von B beschränkt. $f(\delta)$ ist also insbesondere auf $T^*(\varepsilon)$ beschränkt: Für $\delta \in T^*(\varepsilon)$ sei $|f(\delta)| < M(\varepsilon)$.

Es sei a ein beliebiger komplexer Vektor vom Betrage $|a| = 1$. Dann ist $f(\delta^{(0)} + \lambda a)$ bei festem a eine holomorphe Funktion von λ . Für $\delta^{(0)} \in T$ und $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|$ gehört offenbar der Punkt $\delta^{(0)} + \lambda a$ noch zu $T^*(\varepsilon)$, (denn dann ist $|\delta^{(0)} + \lambda a - \delta^{(0)}| = |\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|$). Für $\delta^{(0)} \in T$ und $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|$ ist also $|f(\delta^{(0)} + \lambda a)| < M(\varepsilon)$.

Wir entwickeln $f(\delta^{(0)} + \lambda a)$ in eine Taylorreihe:

$$f(\delta^{(0)} + \lambda a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{\nu} f(\delta^{(0)} + \lambda a)}{\partial \lambda^{\nu}} \Big|_{\lambda=0} \cdot \lambda^{\nu}.$$

Nun ist nach der CAUCHYSchen Formel:

$$\frac{1}{\nu!} \left| \frac{\partial^{\nu} f(\delta^{(0)} + \lambda a)}{\partial \lambda^{\nu}} \Big|_{\lambda=0} \right| \leq \frac{M(\varepsilon)}{(m - \varepsilon)^{\nu} |\chi(\delta^{(0)})|^{\nu}}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $|\chi(\delta^{(0)})|$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\nu!} \left| \frac{\partial^{\nu} f(\delta^{(0)} + \lambda a)}{\partial \lambda^{\nu}} \Big|_{\lambda=0} \right| |\chi(\delta^{(0)})|^{\nu} \leq \frac{M(\varepsilon)}{(m - \varepsilon)^{\nu}}.$$

Die Ableitungen $\frac{\partial^{\nu} f(\delta)}{\partial^{\nu_1} z_1 \dots \partial^{\nu_n} z_n}$ sind in B holomorphe Funktionen. Die Ab-

leitungen $\frac{\partial^{\nu} f(\delta^{(0)} + \lambda a)}{\partial \lambda^{\nu}} \Big|_{\lambda=0}$ sind für jeden Vektor a eine Linearkombination

aus den $\frac{\partial^{\nu} f(\delta)}{\partial^{\nu_1} z_1 \dots \partial^{\nu_n} z_n}$, sie sind also ebenfalls in B holomorphe Funktionen. Also

steht auf der linken Seite der letzten Ungleichung für jedes ν der Absolutbetrag einer in B holomorphen Funktion. Da alle in B holomorphen Funktionen ihr Maximum in bezug auf S auf der Teilmenge T annehmen, so gilt obige Ungleichung also nicht nur für $\delta^{(0)} \in T$, sondern für alle $\delta^{(0)} \in S$ (und alle ν und alle a mit $|a| = 1$).

Daraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{\partial^{\nu} f(\delta^{(0)} + \lambda a)}{\partial \lambda^{\nu}} \Big|_{\lambda=0} \cdot \lambda^{\nu}$$

für alle $\delta^{(0)} \in S$ und $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|$ konvergiert, und zwar gleichmäßig für alle $\delta^{(0)} \in S$ und λ , falls $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})| - \delta$ und $\delta > 0$. Sie stellt also $f(\delta^{(0)} + \lambda a)$ auch für $\delta^{(0)} \in S$ und λ mit $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\delta^{(0)})|$ dar.

Nun ist $f(\zeta)$ eine beliebige in B holomorphe Funktion. Das letzte Resultat besagt also: Jede in B holomorphe Funktion ist für beliebiges a mit $|a| = 1$ in allen Punkten $\zeta = \zeta^{(0)} + \lambda a$ mit $\zeta^{(0)} \in S$ und $|\lambda| < (m - \varepsilon) |\chi(\zeta^{(0)})|$ noch holomorph. Nun ist B Holomorphiebereich. Das heißt, B enthält alle Punkte, in denen alle in B holomorphen Funktionen noch holomorph sind.

Also gehören alle Punkte $\zeta = \zeta^{(0)} + \lambda a$ mit $\zeta^{(0)} \in S$ und $|\zeta - \zeta^{(0)}| < (m - \varepsilon) \times |\chi(\zeta^{(0)})|$ bei beliebigem a zu B . Das heißt, die ganze Hyperkugel $|\zeta - \zeta^{(0)}| < (m - \varepsilon) |\chi(\zeta^{(0)})|$ gehört zu B . Also muß $d_B(\zeta^{(0)}) \geq (m - \varepsilon) |\chi(\zeta^{(0)})|$ für $\zeta^{(0)} \in S$ gelten. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Also

$$\text{für alle } \zeta \in S \text{ ist } d_B(\zeta) \geq |\chi(\zeta)| m. \quad \text{w.z.b.w.}$$

4.11. B sei ein (schlichter) beschränkter Holomorphiebereich. $\chi(\zeta)$ sei in B holomorph und $(\chi(\zeta))^{-1}$ sei in B holomorph und beschränkt. Dann existiert zu jedem Punkt $\zeta^{(0)} \in B - \overline{B}(\chi(\zeta), \varrho)$ eine in B holomorphe Funktion $f(\zeta)$, so daß

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in B(\chi(\zeta), \varrho)} |f(\zeta)| &< |f(\zeta^{(0)})|. \\ \zeta &\in B(\chi(\zeta), \varrho) \end{aligned}$$

Beweis. Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann definieren wir:

$$S = {}_{\mathcal{A}} \overline{B}(\chi(\zeta), \varrho) \cup \{\zeta^{(0)}\} \text{ und } T = {}_{\mathcal{A}} \overline{B}(\chi(\zeta), \varrho).$$

Jede in B holomorphe Funktion würde also ihr Maximum bereits in T annehmen. Es ist $|\chi(\zeta)|^{-1} d_B(\zeta) \geq \varrho$ für $\zeta \in T$. Dann wäre nach unserem Satz auch

$$|\chi(\zeta^{(0)})|^{-1} d_B(\zeta^{(0)}) \geq \varrho.$$

Es müßte also $\zeta^{(0)}$ zu $\overline{B}(\chi(\zeta), \varrho)$ gehören. Widerspruch! Es folgt unser Satz.

4.12. Unter den Voraussetzungen von 4.11 ist jeder Bereich $B(\chi(\zeta), \varrho)$ konvex in bezug auf Funktionen, die in ganz B holomorph sind.

Das heißt: Zu jedem $B_0 \subset B(\chi(\zeta), \varrho)$ gibt es ein B^* , so daß zu jedem Punkt $\zeta^{(0)}$ aus $B(\chi(\zeta), \varrho) - B^*$ eine in B holomorphe Funktion existiert, so daß

$$\max_{\zeta \in B_0} |f(\zeta)| < |f(\zeta^{(0)})|.$$

Beweis. Wenn $B_0 \subset B(\chi(\zeta), \varrho)$, so können wir, da B und $(\chi(\zeta))^{-1}$ beschränkt sind, ein $\varrho^* > \varrho$ finden, so daß

$$B_0 \subset B(\chi(\zeta), \varrho^*) \subset B(\chi(\zeta), \varrho).$$

$B^* = {}_{\mathcal{A}} \overline{B}(\chi(\zeta), \varrho^*)$ hat dann nach dem vorangehenden Satz 4.11 die verlangten Eigenschaften.

4.13. Unter den Voraussetzungen von 4.11 ist jeder Bereich $B(\chi(\zeta), \varrho)$ ein Holomorphiebereich.

Das folgt unmittelbar aus dem CARTAN-THULLENSchen Satz: Jeder holomorphkonvexe Bereich ist ein Holomorphiebereich (2.13) und aus 4.12.

II. Kapitel. Lösung des Cousin-I-Problems für (G, Δ) -Paare.

§ 5. Definition der (G, Δ) -Paare.

5.1. Wenn wir bereits wüßten, daß D ein Holomorphiebereich ist, so wüßten wir auch, daß das Cousin-I-Problem in D lösbar ist. Wir benutzen umgekehrt die Lösbarkeit des Cousin-I-Problems beim Beweis, daß D Holomorphiebereich ist.

Der Nachweis der Lösbarkeit des Cousin-I-Problems gelingt uns nicht unmittelbar für D selber. Das Verfahren, mit dem wir die Lösung konstruieren, stellt eine ganze Reihe von Anforderungen an den Bereich, in dem das Cousin-I-Problem gelöst werden soll. Genauer: Anforderungen an das Bereichspaar. Beim gewöhnlichen Cousin-I-Problem ist eine Cousin-I-Verteilung in einem Bereich vorgegeben und die Lösungsfunktion wird für denselben Bereich gefunden (s. 2.17). Anders bei unserem Verfahren. Dazu benötigen wir ein Bereichspaar (G, A) mit $A \subset G$. Die Cousin-I-Verteilung muß in G gegeben sein (und dort die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen). Die Lösungsfunktion bekommen wir dann für A .

5.2. Wir wollen jetzt die Anforderungen angeben, die an ein (G, A) -Paar zu stellen sind. In den folgenden Paragraphen dieses Kapitels werden wir dann zeigen, daß diese Anforderungen genügen, um das Cousin-I-Problem für (G, A) -Paare zu lösen. Im nächsten Kapitel werden wir dann eine Bereichsfolge $G^{(e)}$ mit $\lim G^{(e)} = D$ konstruieren und zu jedem $G^{(e)}$ eine Bereichsfolge $A^{(e,v)}$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty} A^{(e,v)} \subset G^{(e)}$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} A^{(e,v)} = G^{(e)}$ mit der Eigenschaft, daß jedes Paar $(G^{(e)}, A^{(e,v)})$ ein (G, A) -Paar (im Sinne der Definition dieses Paragraphen) ist.

5.3. G sei ein (schlichter) beschränkter Bereich. Es sei $b_1 < 0 < b_2$. Dann definieren wir: $G_1 =_{df} G \cap \{\zeta \mid x_1 > b_1\}$ und $G_2 =_{df} G \cap \{\zeta \mid x_1 < b_2\}$, $G_3 =_{df} G_1 \cap G_2$. Die Bereiche G_1 und G_2 seien Holomorphiebereiche. Dann ist G_3 trivialerweise auch ein Holomorphiebereich.

5.4. Es mögen k in G_3 holomorphe Funktionen $X_1(\zeta) \dots X_k(\zeta)$ existieren und es sei

$$P =_{df} \{\zeta \mid \zeta \in G_3 \wedge |X_1(\zeta)| < 1 \wedge \dots \wedge |X_k(\zeta)| < 1\}.$$

Es mögen zwei reelle Zahlen c_1 und c_2 existieren (abhängig von G und den X_1, \dots, X_k) mit $b_1 < c_1 < 0 < c_2 < b_2$, so daß die Punktmenge

$$V =_{df} P \cap \{\zeta \mid |e^{z_1 - c_1}| > 1 \wedge |e^{z_2 - c_2}| < 1\}$$

kompakt in G_3 liegt. Diese Punktmenge ist offenbar ein analytisches Polyeder. Das Polyeder sei ein WEILSches Polyeder (s. 2.10), so daß wir darauf die WEILBERGMANNsche Integralformel (2.12) anwenden können. Wir führen ein: $X_{k+1}(\zeta) =_{df} e^{z_1 - c_1}$ und $X_{k+2}(\zeta) =_{df} e^{z_2 - c_2}$. Dann bedeutet die Bedingung, daß W ein „WEILSches Polyeder“ ist, daß der Durchschnitt von je j verschiedenen ($j = 1, \dots, n$) der Hyperflächen

$$\{\zeta \mid \zeta \in \text{Rand von } W \wedge |X_1(\zeta)| = 1\} \dots \{\zeta \mid \zeta \in \text{Rand von } W \wedge |X_{k+2}(\zeta)| = 1\}$$

höchstens $2n - j$ dimensional ist (vgl. 2.10).

5.5. Die Punktmenge $\{\zeta \mid x_1 = b_1\} \cap \bar{G}_3$ besitze eine Umgebung U_1 und die Punktmenge $\{\zeta \mid x_1 = b_2\} \cap \bar{G}_3$ eine Umgebung U_2 , so daß für $\zeta \in (U_1 \cup U_2) \cap G_3$ gilt:

$$|X_l(\zeta)| < 1 - \varepsilon \quad \text{für } l = 1, \dots, k.$$

5.6. Wenn $X_1 \dots X_k$ alle in 5.3 bis 5.5 geforderten Eigenschaften haben, dann definieren wir:

$$\Delta =_{df} (G - G_3) \cup P$$

(Definition von P siehe 5.3.) Wir nennen das Paar (G, Δ) ein „ (G, Δ) -Paar“, und jedes Paar zweier Bereiche, wo der eine die Eigenschaften von G , der andere die von Δ hat, nennen wir „ (G, Δ) -Paar“.

§ 6. Reduktion des Cousin-I-Problems für (G, Δ) -Paare auf die Cousin-I-Heftung. Skizzierung des Verfahrens der Heftung in den §§ 7 und 8.

6.1. Es soll das Cousin-I-Problem für (G, Δ) -Paare gelöst werden. Das heißt: Gegeben eine Cousin-I-Verteilung in G , so suchen wir eine Lösungsfunktion für Δ , d. h. eine Funktion $F(\zeta)$, die in Δ meromorph und mit den Lokalfunktionen äquivalent ist.

Zur Konstruktion von $F(\zeta)$ lösen wir die gegebene Verteilung zunächst für G_1 und G_2 . Das ist möglich, weil G_1 und G_2 Holomorphiebereiche sind (s. 2.17). Wir erhalten also zwei Funktionen $F_1(\zeta)$ und $F_2(\zeta)$, $F_1(\zeta)$ meromorph und mit den Lokalfunktionen äquivalent in G_1 und $F_2(\zeta)$ entsprechend in G_2 . In $G_3 = G_1 \cap G_2$ sind dann $F_1(\zeta)$ und $F_2(\zeta)$ miteinander äquivalent, d. h. die Differenz

$$f(\zeta) = {}_{df} F_1(\zeta) - F_2(\zeta)$$

ist in G_3 holomorph.

Insbesondere ist $f(\zeta)$ in einer Umgebung U der abgeschlossenen Menge $\bar{\Delta} \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$ holomorph (nämlich $U = G_3$), da $\Delta \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$ nach Voraussetzung 5.3 kompakt in G_3 liegt.

Können wir jetzt eine Umgebung V der offenen Menge $\Delta \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$ finden, $V \subset U$, und zwei Funktionen $\Phi_1(\zeta)$, holomorph in $(\Delta \cap \{\zeta | x_1 > 0\}) \cup V$ und $\Phi_2(\zeta)$, holomorph in $(\Delta \cap \{\zeta | x_1 < 0\}) \cup V$, so daß in V identisch gilt:

$$\Phi_1(\zeta) - \Phi_2(\zeta) = f(\zeta),$$

so haben wir unser Problem gelöst. Denn dann ist in V : $F_1(\zeta) - \Phi_1(\zeta) - (-F_2(\zeta) + \Phi_2(\zeta)) = f(\zeta) - f(\zeta) = 0$. Definieren wir also

$$F(\zeta) = {}_{df} F_1(\zeta) - \Phi_1(\zeta) \text{ in } \Delta \cap \{\zeta | x_1 \geq 0\}$$

$$F(\zeta) = {}_{df} F_2(\zeta) - \Phi_2(\zeta) \text{ in } \Delta \cap \{\zeta | x_1 \leq 0\},$$

so ist $F(\zeta)$ eine in ganze Δ meromorphe Funktion. $F_1(\zeta)$ bzw. $F_2(\zeta)$ waren mit den Lokalfunktionen äquivalent. Die Addition einer holomorphen Funktion ändert daran nichts (vgl. 2.16). Also ist $F(\zeta)$ in ganz Δ mit den Lokalfunktionen äquivalent, d. h. $F(\zeta)$ hat die oben verlangten Eigenschaften. Wir fassen zusammen: Wir haben das Cousin-I-Problem reduziert auf die Cousin-I-Heftung, die wir noch einmal formulieren:

6.2. Cousin-I-Heftung. Gegeben eine Umgebung U der abgeschlossenen Menge: $\bar{\Delta} \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$ und eine in U holomorphe Funktion $f(\zeta)$. Man finde eine Umgebung V der offenen Menge $\Delta \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$, $V \subset U$, und zwei Funktionen $\Phi_1(\zeta)$ und $\Phi_2(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$ holomorph in $(\Delta \cap \{\zeta | x_1 > 0\}) \cup V$ und $\Phi_2(\zeta)$ holomorph in $(\Delta \cap \{\zeta | x_1 < 0\}) \cup V$, so daß

$$\Phi_1(\zeta) - \Phi_2(\zeta) = f(\zeta) \text{ für } \zeta \in V.$$

Anmerkung: Ist $\Delta \cap \{\zeta | x_1 = 0\}$ leer, so ist der Fall trivial. Dann nehmen wir einfach $\Phi_1(\zeta) \equiv \Phi_2(\zeta) \equiv 0$ und definieren $F(\zeta)$ wie oben.

6.3. Skizzierung des Heftungsverfahrens in den §§ 7 und 8. In § 7 lösen wir die Heftungsaufgabe zunächst für Δ_3 anstelle von Δ . Das heißt, wir bekommen $\Phi_1(\delta)$ nur in $\Delta_3 \cap \{\delta | x_1 > 0\} \cup V$ und $\Phi_2(\delta)$ entsprechend. Wir erhalten $\Phi_1(\delta)$ und $\Phi_2(\delta)$ durch zwei Integraloperatoren $\mathfrak{I}_1(\varphi, \delta)$ und $\mathfrak{I}_2(\varphi, \delta)$. Wenn $\varphi(\delta)$ in U holomorph ist, so existiert ein V , so daß $\mathfrak{I}_1(\varphi, \delta)$ eine in $(\Delta_3 \cap \{\delta | x_1 > 0\}) \cup V$ holomorphe Funktion ist und $\mathfrak{I}_2(\varphi, \delta)$ entsprechend. Ferner haben \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 die Eigenschaft, daß $\mathfrak{I}_1(\varphi, \delta) - \mathfrak{I}_2(\varphi, \delta) \equiv \varphi(\delta)$ ist in V .

Wir brauchen daher nur \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 auf $f(\delta)$ anzuwenden und $\Phi_1(\delta) = \mathfrak{I}_1(f, \delta)$ und $\Phi_2(\delta) = \mathfrak{I}_2(f, \delta)$ zu nehmen, dann erhalten wir $\Phi_1(\delta)$ und $\Phi_2(\delta)$ mit den gewünschten Eigenschaften — leider jedoch nur in Δ_3 .

Die beiden Integraloperatoren \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 enthalten Kerne, die Funktionen von δ und ζ ($\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$) sind. Wenn ζ auf der Integrationsmannigfaltigkeit läuft, so sind die Kerne in $(\Delta_3 \cap \{\delta | x_1 > 0\}) \cup V$ bzw. in $(\Delta_3 \cap \{\delta | x_1 < 0\}) \cup V$ holomorph und nur dort holomorph. Sie liefern daher $\Phi_1(\delta)$ und $\Phi_2(\delta)$ nur dort. Wir approximieren daher in § 8 die Kerne durch andere Kerne, die in Δ_1 bzw. Δ_2 holomorph sind (etwas vereinfacht ausgedrückt).

So erhalten wir zwei neue Integraloperatoren $I_1(\varphi, \delta)$ und $I_2(\varphi, \delta)$. Wenn $\varphi(\delta)$ in U holomorph ist, so haben I_1 und I_2 jetzt die gewünschte Eigenschaft, daß $I_1(\varphi, \delta)$ in $(\Delta \cap \{\delta | x_1 > 0\}) \cup V$ holomorph ist und $I_2(\varphi, \delta)$ entsprechend. Es ist jedoch wegen der veränderten Kerne im allgemeinen

$$I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) \neq \varphi(\delta).$$

Wir können daher nicht einfach $\varphi(\delta) = f(\delta)$ nehmen, wie im Falle von \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 , um als Differenz $f(\delta)$ zu erhalten. Wir müssen eine Funktion $\varphi(\delta)$ so bestimmen, daß $I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) = f(\delta)$ wird. Das geschieht, indem wir diese Gleichung als Integralgleichung für $\varphi(\delta)$ lösen. Die Lösung ist möglich, weil die Kerne von I_1 und I_2 die Kerne von \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 approximieren.

Damit sind wir jetzt am Ziel. Zu gegebenem $f(\delta)$ finden wir ein $\varphi(\delta)$, so daß

$$I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) = f(\delta) \text{ in } V,$$

und I_1 und I_2 sind in den gewünschten Bereichen holomorph.

§ 7. Cousin-I-Heftung für Δ_3 .

7.1. Nehmen wir an, wir hätten die (in 6.2 definierte) Cousin-I-Heftung für nur eine Veränderliche zu lösen.

Wir wählen in U einen Bereich V mit endlich vielen rektifizierbaren Randkurven σ_j . Der Rand von V , $\sum_j \sigma_j$, sei in der üblichen Weise orientiert. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(1)} &=_{df} \sigma_j \cap \{z \mid x \leq 0\} \\ \sigma_j^{(2)} &=_{df} \sigma_j \cap \{z \mid x > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist also

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{\sigma_j} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{\sigma_j^{(1)}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{\sigma_j^{(2)}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Setzen wir

$$\mathfrak{S}_1(f, z) = \text{sf} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_j^{(1)}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

und

$$\mathfrak{S}_2(f, z) = \text{sf} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma_j^{(2)}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{S}_1(\varphi, z) - \mathfrak{S}_2(\varphi, z) = \varphi(z) \text{ in } V.$$

$\mathfrak{S}_1(\varphi, z)$ ist holomorph in $V \cup \{z \mid x > 0\}$, denn wenn ζ auf der Integrationsmannigfaltigkeit $\sum_j \sigma_j^{(1)}$ läuft, so ist der Kern $\frac{1}{\zeta - z}$ in $V \cup \{z \mid x > 0\}$ holomorph, also auch $\mathfrak{S}_1(\varphi, z)$. Entsprechend $\mathfrak{S}_2(\varphi, z)$. Der Kern $\frac{1}{\zeta - z}$ hängt nicht vom Bereich V ab. Das ist anders bei mehr als einer Veränderlichen.

7.2. Ähnlich wie in 7.1. verfahren wir bei mehreren Veränderlichen. $\varphi(\delta)$ sei in U holomorph. Wir betrachten das WEILSche analytische Polyeder (vgl. 2.10)

$$V = P \cap \{\delta \mid |X_{k+1}(\delta)| > 1 \wedge |X_{k+2}(\delta)| < 1\}.$$

Es sei $V \subset U$. Es seien $\sigma_{j_1} \dots j_n$ die n -dimensionalen Kanten von V mit der Orientierung nach SOMMER (vgl. 2.12). Es ist also:

$$\sigma_{j_1} \dots j_n \subset \{\delta \mid |X_1(\delta)| = 1\} \cap \dots \cap \{\delta \mid |X_{k+2}(\delta)| = 1\}.$$

Dann lautet die BERGMANN-WEILSche Integralformel (siehe 2.12, siehe dort auch die Bedeutung von τ und $\delta_{j_1} \dots j_n(\delta, \zeta)$): für $\delta \in V$ gilt:

$$\varphi(\delta) = \tau \sum_{\substack{j_1 \dots j_n \\ \sigma_{j_1} \dots j_n}} \int \frac{\delta_{j_1} \dots j_n(\delta, \zeta)}{\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))} \cdot \varphi(\zeta) \cdot d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

Es wird summiert über alle $j_1 \dots j_n$ Kombinationen von verschiedenen j_v , wo $j_v \in \{1 \dots k+2\}$. Wir definieren:

$$\sigma_{j_1}^{(1)} \dots j_n = \text{sf} \sigma_{j_1} \dots j_n \cap \{\delta \mid x_1 \leq 0\}$$

$$\sigma_{j_1}^{(2)} \dots j_n = \text{sf} \sigma_{j_1} \dots j_n \cap \{\delta \mid x_1 > 0\}$$

$$\mathfrak{S}_1(\varphi, \delta) = \text{sf} \tau \sum_{\substack{j_1 \dots j_n \\ \sigma_{j_1}^{(1)} \dots j_n}} \int \frac{\delta_{j_1} \dots j_n(\delta, \zeta)}{\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))} \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

$$\mathfrak{S}_2(\varphi, \delta) = \text{sf} -\tau \sum_{\substack{j_1 \dots j_n \\ \sigma_{j_1}^{(2)} \dots j_n}} \int \frac{\delta_{j_1} \dots j_n(\delta, \zeta)}{\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))} \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{S}_1(\varphi, \delta) - \mathfrak{S}_2(\varphi, \delta) = \varphi(\delta) \text{ in } V.$$

Die Kerne von \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 werden innerhalb G_3 genau dann singulär, wenn der Nenner $\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))$ verschwindet, denn $\delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ ist in $(G_3)_\delta \times (G_3)_\zeta$ holomorph (2.12). Das Nullwerden des Nenners hängt von ζ ab. Es sei ζ auf der zur betrachteten $j_1 \dots j_n$ -Kombination gehörigen Integrations-mannigfaltigkeit, das ist bei $\mathfrak{S}_1: \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ und bei \mathfrak{S}_2 ist das $\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(2)}$.

Ist $j_v \in \{1 \dots k\}$, so ist $|X_{j_v}(\delta)| < 1$ für $\delta \in \Delta_3$ (für $\zeta \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(2)}$ ist $|X_{j_v}(\zeta)| = 1$). Es ist also in diesem Falle $X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta) \neq 0$ in Δ_3 . Ist $j_v = k+1$, so ist $X_{k+1}(\delta) = e^{z_1 - c_1}$ (siehe 5.4) ($|X_{k+1}(\zeta)| = 1$). Für $x_1 > c_1$ ist also $|X_{k+1}(\zeta)| > 1$ und damit also

$$X_{k+1}(\delta) - X_{k+1}(\zeta) \neq 0 \quad \text{für } \delta \in \{\delta \mid x_1 > c_1\}.$$

Ist ein $j_v = k+2$ in der Kombination $j_1 \dots j_n$, so ist $\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ leer. Denn $\sigma_{j_1 \dots j_n}$ liegt dann ganz auf der Hyperfläche $\{\delta \mid |e^{z_1 - c_1}| = 1\}$ und es ist $c_2 > 0$, andererseits ist $\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ gleich $\sigma_{j_1 \dots j_n} \cap \{\delta \mid x_1 \leq 0\}$. $\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ ist in diesem Falle also leer und das zugehörige Integral tritt gar nicht auf. Das ergibt zusammengefaßt: Bei allen $j_1 \dots j_n$ Kombinationen und $\zeta \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ ist der Kern

$$k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) =_{df} \frac{\delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)}{\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))}$$

in dem Bereich $\Delta_3 \cap \{\delta \mid x_1 < c_1\} = \Delta_3 \cap (\{\delta \mid x_1 > 0\} \cup V)$ holomorph. Also ist auch $\mathfrak{S}_1(\varphi, \delta)$ dort holomorph. Analog ist $\mathfrak{S}_2(\varphi, \delta)$ holomorph in $\Delta_3 \cap \{\delta \mid x_1 < c_2\} = \Delta_3 \cap (\{\delta \mid x_1 < 0\} \cup V)$.

§ 8. Cousin-I-Heftung für Δ .

8.1. Die Kerne in den Integraloperatoren \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 waren

$$k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) = \frac{\delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)}{\prod_{v=1}^n (X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta))}.$$

Die Funktionen $\delta_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ sind in $(G_3)_\delta \times (G_3)_\zeta$ holomorph. Die $X_{j_v}(\delta)$ sind in $(G_3)_\delta$ holomorph und die $X_{j_v}(\zeta)$ in $(G_3)_\zeta$. Jeder Kern $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ ist also eine in $(G_3)_\delta \times (G_3)_\zeta$ meromorphe Funktion. Die Pole sind die Nullstellen des Nenners.

Wir beschränken ζ nun auf eine Umgebung $(V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ von $\sigma_{j_1 \dots j_n}$. Und zwar nehmen wir:

$$(V_{j_1 \dots j_n})_\zeta =_{df} \left\{ \zeta \mid \zeta \in G_3 \wedge 1 - \frac{\varepsilon}{2} < |X_1(\delta)| < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \wedge \dots \wedge \right. \\ \left. \wedge 1 - \frac{\varepsilon}{2} < |X_{k+2}(\delta)| < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

wobei das ε das ε sein soll, das in 5.5 auftritt. In 5.5 hatten wir nämlich, daß für $j_v \in \{1 \dots k\}$ gilt $|X_{j_v}(\zeta)| < 1 - \varepsilon$ für $\zeta \in (U_1 \cup U_2) \cap G_3$. Also ist für $\zeta \in V_{j_1 \dots j_n}$ und $\delta \in (U_1 \cup U_2) \cap G_3$: $|X_{j_v}(\zeta) - X_{j_v}(\delta)| > \frac{\varepsilon}{2}$ für $j_v \in \{1 \dots k\}$.

Daß $X_{j_p}(\zeta) - X_{j_p}(\delta) \neq 0$ für $j = k+1$ oder $k+2$ in U_1 und U_2 ist trivial, wenn wir nur U_1 und U_2 und ε klein genug gewählt haben.

Fassen wir zusammen: Es ist jeder Kern $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ in $\{(U_1 \cup U_2) \cap G_3\}_\delta \times \{V_{j_1 \dots j_n}\}_\zeta$ holomorph.

8.2. Wir geben jetzt in $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ eine Cousin-I-Verteilung vor. G_1 ist nach Voraussetzung ein Holomorphiebereich. $V_{j_1 \dots j_n}$ ist trivialerweise ein Holomorphiebereich. Das direkte Produkt von Holomorphiebereichen ist ein Holomorphiebereich, also ist $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ ein Holomorphiebereich. In Holomorphiebereichen ist Cousin I lösbar (2.17). Wir können also eine Cousin-I-Verteilung in $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ lösen, wenn sie die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt.

Wir möchten jetzt die Pole von $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ als Pole einer in ganz $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ definierten Verteilung vorgeben, die die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt (s. 2.16). Zu diesem Zwecke ordnen wir jedem Punkte (δ, ζ) in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ die Funktion $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ als Lokalfunktion zu und als Umgebung $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$. Dann sind die Verträglichkeitsbedingungen in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ trivialerweise erfüllt. Jedem Punkte $(\delta, \zeta) \in (G_1 - G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ ordnen wir als Lokalfunktion $\equiv 0$ zu und als Umgebung die größte Hyperkugel, die noch in $\{(G_1 - G_3) \cup (U_1 \cap G_3)\}_\delta \times \{V_{j_1 \dots j_n}\}_\zeta$ enthalten ist. Dann sind die Verträglichkeitsbedingungen wiederum erfüllt, da $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ in $(U_1 \cap G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorph ist, wie in 8.1 festgestellt. Letztere Tatsache ist entscheidend dafür, daß sich die Verträglichkeitsbedingungen an der „Nahtstelle“: $(G_1 - G_3) \cap \{\delta \mid x_1 = b_2\}$ erfüllen lassen.

Wie schon bemerkt, können wir die Verteilung lösen. Wir erhalten damit eine Funktion

$$\tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta),$$

die in $(G_1)_\delta \times \{V_{j_1 \dots j_n}\}_\zeta$ meromorph ist und die in $(G_3)_\delta \times \{V_{j_1 \dots j_n}\}_\zeta$ mit $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$ äquivalent ist. Das heißt, es ist

$$d_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta) =_{df} \tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta) - k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta)$$

in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorph.

8.3. Es ist nach der Definition 5.3: $G_3 = G_1 \cap G_2 = G_1 \cap \{\delta \mid x_1 < b_2\}$. Bilden wir nun $G(t) =_{df} G_1 \cap \{\delta \mid x_1 < t\}$ für $b_2 < t < \infty$. Dann ist $G(b_2) = G_3$, und für hinreichend großes t ist $G(t) = G_1$. Ferner ist jedes $G(t)$ als Durchschnitt von Holomorphiebereichen ein Holomorphiebereich. Also ist G_3 auf G_1 über eine Schar von Holomorphiebereichen stetig ausdehnbar (analog auf G_2). Dann ist auch $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ auf $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ stetig über Holomorphiebereiche ausdehnbar.

Nach einem Satz von BEHNKE-STEIN (2.15) läßt sich dann jede in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorphe Funktion in jedem kompakten Teilbereich von $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ durch in ganz $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorphe Funktionen gleichmäßig approximieren.

Wir wählen also ein $G_3^* \subset G_3$, und zwar so, daß $\bar{V} \subset G_3^*$, und wir wählen ein $V_{j_1 \dots j_n}^* \subset V_{j_1 \dots j_n}$, so daß $\sigma_{j_1 \dots j_n} \subset V_{j_1 \dots j_n}^*$. Zu jedem $\delta > 0$ finden wir dann also eine in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorphe Funktion $\tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta)$, so daß die Differenz

$$A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta) =_{df} d_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta) - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta)$$

in $(G_3^*)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n}^*)_\zeta$ dem Betrage nach kleiner als δ ist. Analog finden wir eine in ganz $(G_2)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorphe Funktion $\tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta)$, so daß die Differenz

$$A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta) =_{df} d_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta) - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta)$$

in $(G_3^*)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n}^*)_\zeta$ ebenfalls kleiner als δ ist.

8.4. Betrachten wir $k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) + A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta)$. Das ist gleich $k_{j_1 \dots j_n} + d_{j_1 \dots j_n}^{(1)} - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)} = \tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(1)} - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$.

Die Funktion $\tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ war in $(G_1)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorph. $\tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ (also auch $\tilde{k}^{(1)} + \tilde{d}^{(1)}$) hat in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ dieselben Pole wie $k_{j_1 \dots j_n}$ und ist nach Konstruktion in $(G_1 - G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorph.

Es sei jetzt $\zeta \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$. Berücksichtigen wir die Resultate über die Pole von $k_{j_1 \dots j_n}$ in 7.2, so erhalten wir also: $\tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(1)} - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ ist für $\zeta \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ in bezug auf δ in $\Delta \cap (\{\delta | x_1 > 0\} \cup V)$ holomorph. Ganz analog ist

$$k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) + A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta) = \tilde{k}_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta) - \tilde{d}_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta)$$

für $\zeta \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(2)}$ holomorph in $\Delta \cap (\{\delta | x_1 < 0\} \cup V)$.

8.5. Mit den neuen Kernen bilden wir jetzt:

$$I_1(\varphi, \delta) =_{df} \tau \sum_{j_1 \dots j_n \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}} \int (k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) + A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta)) \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

$$I_2(\varphi, \delta) =_{df} -\tau \sum_{j_1 \dots j_n \in \sigma_{j_1 \dots j_n}^{(2)}} \int (k_{j_1 \dots j_n}(\delta, \zeta) + A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta)) \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

I_1 und I_2 sind dort holomorph, wo bei der Integration die Kerne holomorph sind, also

$$I_1(\varphi, \delta) \text{ ist holomorph in } \Delta \cap (\{\delta | x_1 > 0\} \cup V)$$

$$I_2(\varphi, \delta) \text{ ist holomorph in } \Delta \cap (\{\delta | x_1 < 0\} \cup V).$$

8.6. Wir untersuchen jetzt die Differenz $I_1 - I_2$. Es ist im Durchschnitt der Gebiete, wo I_1 und I_2 holomorph sind, und das ist V :

$$I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) = \mathfrak{I}_1(\varphi, \delta) - \mathfrak{I}_2(\varphi, \delta) + \\ + \tau \sum_{j_1 \dots j_n} \left(\int_{\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(1)}} A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}(\delta, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n + \int_{\sigma_{j_1 \dots j_n}^{(2)}} A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}(\delta, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \right).$$

Setzen wir

$-K(\varphi, \delta)$ gleich der Integralsumme auf der rechten Seite, dann ist also

$$I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) = \mathfrak{I}_1(\varphi, \delta) - \mathfrak{I}_2(\varphi, \delta) - K(\varphi, \delta).$$

8.7. Wir wollen jetzt $\varphi(\delta)$ so bestimmen, daß

$$I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) = f(\delta) \text{ in } V$$

wird, wo $f(\delta)$ die in 6.2 gegebene Funktion ist. Wir haben also, da nach 7.2 gilt: $\mathfrak{I}_1(\varphi, \delta) - \mathfrak{I}_2(\varphi, \delta) = \varphi(\delta)$, die Integralgleichung

$$\varphi(\delta) = f(\delta) + K(\varphi, \delta)$$

zu lösen. Wir gewinnen eine Lösung durch Iteration. Es sei

$$\varphi_0(\delta) =_{df} f(\delta)$$

$$\varphi_1(\delta) =_{df} K(\varphi_0, \delta)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{r+1}(\delta) =_{df} K(\varphi_r, \delta).$$

Behauptung:

8.8. $\varphi(\delta) =_{df} \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r(\delta)$ konvergiert in V gleichmäßig.

Beweis. Es ist $A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}$ sowie $A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}$ in $(G_3)_\delta \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$ holomorph (vgl. 8.3). Also ist $K(\varphi_r, \delta)$ für alle r in G_3 holomorph. Damit sind also alle $\varphi_r(\delta)$ in G_3 holomorph (mit Ausnahme von $\varphi_0(\delta)$).

Es sei

$$N =_{df} |\tau| \sum_{j_1 \dots j_n} \int |d\zeta_1 \dots d\zeta_n|$$

und $M_r =_{df} \max_{\zeta \in \bar{V}} |\varphi_r(\zeta)|$. Dann ist in \bar{V} , weil $\bar{V} \subset G_3^*$ und da $|A_{j_1 \dots j_n}^{(1)}| < \delta$ und $|A_{j_1 \dots j_n}^{(2)}| < \delta$ in $(G_3^*)_3 \times (V_{j_1 \dots j_n})_\zeta$:

$$|\varphi_{r+1}(\delta)| < N \cdot \delta \cdot M_r.$$

Wenn nun M_0 das Maximum von $f(\delta)$ in \bar{V} ist, so ist also

$$M_r < M_0 (N \cdot \delta)^r.$$

Haben wir also δ klein genug gemacht, so konvergiert $\sum_{r=0}^{\infty} M_r$, und damit

$\sum_{r=0}^{\infty} |\varphi_r(\delta)|$ in \bar{V} gleichmäßig. w.z.b.w.

8.9. $\varphi(\delta) = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r(\delta)$ ist eine Lösung der Integralgleichung.

Beweis. Wegen der soeben nachgewiesenen gleichmäßigen Konvergenz in \bar{V} dürfen wir Summation und Integration vertauschen. Es ist also

$$\begin{aligned} f(\delta) + K(\varphi, \delta) &= \varphi_0(\delta) + K\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r(\delta), \delta\right) = \varphi_0(\delta) + \sum_{r=0}^{\infty} K(\varphi_r(\delta), \delta) \\ &= \varphi_0(\delta) + \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_{r+1}(\delta) = \varphi(\delta). \end{aligned}$$

Also

$$\varphi(\delta) = f(\delta) + K(\varphi, \delta) \quad \text{w.z.b.w.}$$

8.10. Fassen wir noch einmal zusammen: Zu gegebener Funktion $f(\delta)$ und gegebenem U finden wir ein V und ein $\varphi(\delta)$ und zwei Integraloperatoren

$$I_1(\varphi, \delta) \text{ holomorph in } \Delta \cap (\{\delta \mid x_1 > 0\} \cup V)$$

und

$$I_2(\varphi, \delta) \text{ holomorph in } \Delta \cap (\{\delta \mid x_1 < 0\} \cup V),$$

so daß

$$f(\delta) \equiv I_1(\varphi, \delta) - I_2(\varphi, \delta) \text{ in } V.$$

Damit ist die in 6.3 gestellte Heftungsaufgabe vollständig gelöst. Wir können das Cousin-I-Problem für (G, Δ) -Paare lösen.

III. Kapitel. Approximation von D durch (G, Δ) -Paare.

In diesem Kapitel werden wir zunächst (in § 9) eine Bereichsfolge $G^{(e)}$ mit $G^{(e)} \subset D$ für $e > 0$ und $\lim_{e \rightarrow 0} G^{(e)} = D$ konstruieren. In § 10 führen wir dann den Nachweis, daß $G_1^{(e)} =_{df} G^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 > b_1\}$ und $G_2 =_{df} G^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 < b_2\}$ Holomorphiebereiche sind. In § 11 werden wir zu jedem $G^{(e)}$ eine Folge von Bereichen $\Delta^{(e, \nu)}$ konstruieren mit $\Delta^{(e, \nu)} \subset G^{(e)}$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e, \nu)} = G^{(e)}$, so daß jedes Paar $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ ein (G, Δ) -Paar im Sinne der Definition von § 5 ist. Da, wie in Kapitel II bewiesen, in (G, Δ) -Paaren das Cousin-I-Problem lösbar ist, so bedeutet diese Approximation, daß wir beliebig nahe bei D (G, Δ) -Paare finden können, in denen das Cousin-I-Problem lösbar ist. Die Folge $G^{(e)}$ hat aber nicht allein darin ihren Zweck. Die Eigenschaften der Bereiche $G^{(e)}$ werden im letzten Kapitel herangezogen, um in jedem Paar $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ Cousin-Verteilungen zu definieren, deren Lösungsfunktionen so beschaffen sind, daß aus ihren Eigenschaften folgt, daß die $\Delta^{(e, \nu)}$ Holomorphiebereiche sind.

§ 9. Approximation des Gebietes D durch Bereiche $G^{(e)}$.

9.1. In § 4 haben wir die euklidische Distanzfunktion $d_B(\delta)$ und die Bereiche $B(\chi(\delta), e)$ definiert. Es war

$$B(\chi(\delta), e) = \{\delta \mid \delta \in B \wedge d_B(\delta) > |\chi(\delta)| \cdot e\}.$$

Wir machen von dieser Definition für unser Gebiet D Gebrauch. Wir bilden einmal mit $\chi(\delta) = e^{z_1}$ und zum anderen mit $\chi(\delta) = e^{-z_1}$ die Bereiche $D(e^{z_1}, e)$ und $D(e^{-z_1}, e)$ und definieren:

$$G^{(e)} =_{df} D(e^{-z_1}, e) \cap D(e^{z_1}, e).$$

9.2. Es ist für alle $e > 0$: $G^{(e)} \subset D$ und $\lim_{e \rightarrow 0} G^{(e)} = D$.

Beweis. Da D beschränkt ist und da e^{-z_1} und e^{z_1} in D beschränkt sind, so ist nach 4.8 $D(e^{-z_1}, e) \subset D$ und $D(e^{z_1}, e) \subset D$, und damit $G^{(e)} \subset D$.

Ferner existiert zu jeder kompakten Teilmenge $S \subset D$ ein m , so daß sowohl $\min_{\delta \in S} d_B(\delta) \cdot |e^{z_1}| > m$ als auch $\min_{\delta \in S} d_B(\delta) \cdot |e^{-z_1}| > m$. Für $e \leq m$ ist dann

offenbar $S \subset\subset D(e^{-s_1}, \varrho)$ und $S \subset\subset D(e^{s_1}, \varrho)$, d. h. $S \subset\subset G^{(e)}$. Zu jeder kompakten Teilmenge $S \subset\subset D$ gibt es also ein m , so daß für alle $\varrho \leq m$: $S \subset\subset G^{(e)}$. Daraus folgt (s. 2.8): $\lim G^{(e)} = D$.

9.3. Wir wählen weiterhin zwei reelle Zahlen b_1 und b_2 , so daß $a_1 < b_1 < 0 < b_2 < a_2$. Dann definieren wir analog zu D_1 und D_2 die Bereiche:

$$G_1^{(e)} = {}_{af} G^{(e)} \cap \{\delta | x_1 > b_1\}$$

$$G_2^{(e)} = {}_{af} G^{(e)} \cap \{\delta | x_1 < b_2\}$$

$$G_3^{(e)} = {}_{af} G_1^{(e)} \cap G_2^{(e)}.$$

Wir merken noch an, daß wir b_1 und b_2 ein für allemal fest (und nicht von ϱ abhängig) wählen.

§ 10. Nachweis, daß $G_1^{(e)}$ und $G_2^{(e)}$ Holomorphiebereiche sind.

10.1. Die in 9.3 definierten Bereiche $G_1^{(e)}$ und $G_2^{(e)}$ sind für alle hinreichend kleinen ϱ Holomorphiebereiche.

Beweis. In 10.2 werden wir beweisen, daß für alle hinreichend kleinen ϱ gilt:

$$(I) \quad D(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D_1(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}$$

$$(II) \quad D(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D_1(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}$$

$$(IV) \quad D(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 < b_2\} = D_2(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 < b_2\}$$

$$(V) \quad D(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 < b_2\} = D_2(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 < b_2\}.$$

(Diese Gleichungen sind anschaulich einleuchtend. Man interpretiere sie z. B. in dem Fall, wo D ein Gebiet in der reellen (x_1, x_2) -Ebene ist und D_1 und D_2 konvexe Gebiete sind. Anstelle von e^{-s_1} tritt dort e^{-s_1} und anstelle von e^{s_1} tritt e^{s_1} . Wir werden die vier Gleichungen jedoch in 10.2 explizit beweisen.)

Aus den beiden oberen Gleichungen folgt:

$$D(e^{-s_1}, \varrho) \cap D(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D_1(e^{-s_1}, \varrho) \cap D_1(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

$$\text{Also} \quad G_1^{(e)} = D_1(e^{-s_1}, \varrho) \cap D_1(e^{s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Nun ist D_1 nach Voraussetzung ein Holomorphiebereich, und sowohl e^{s_1} wie e^{-s_1} sind in D_1 beschränkt, und D_1 ist ebenfalls beschränkt. Nach unserem Hilfssatz 4.13 sind daher die Bereiche $D_1(e^{-s_1}, \varrho)$ und $D_1(e^{s_1}, \varrho)$ Holomorphiebereiche. Das Gebiet $\{\delta | x_1 > b_1\}$ ist trivialerweise Holomorphiegebiet. Der Durchschnitt von Holomorphiebereichen ist wieder ein Holomorphiebereich, also ist $G_1^{(e)}$ ein Holomorphiebereich. Analog folgt aus der dritten und vierten Gleichung, daß $G_2^{(e)}$ Holomorphiebereich ist.

10.2. Es bleiben die vier Ausgangsgleichungen von 10.1 zu beweisen. Betrachten wir zunächst die erste:

$$D(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D_1(e^{-s_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Beweis. Es war nach Definition von D_1 :

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} = D_1.$$

Unser Hilfssatz 4.6 besagt:

$$\{B_1 \cap B_2\}(\chi(\delta), \varrho) = B_1(\chi(\delta), \varrho) \cap B_2(\chi(\delta), \varrho).$$

Wenden wir das an, so erhalten wir:

$$D(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) = D_1(e^{-\varepsilon_1}, \varrho).$$

Da $D(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \subset D$, so verändern wir die Gleichung nicht, wenn wir auf der linken Seite $\cap D$ hinzufügen; und dann bilden wir auf beiden Seiten noch den Durchschnitt mit $\{\delta | x_1 > b_1\}$. Dann erhalten wir also:

$$D \cap D(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D_1(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Unsere Gleichung ist also bewiesen, wenn (für alle hinreichend kleinen ϱ) gilt:

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D \cap \{\delta | x_1 < b_1\}.$$

10.3. Nun hat, da D beschränkt ist, $e^{-\varepsilon_1}$ in D ein Maximum M . Hilfssatz 4.7 besagt: Falls im Bereich B_1 überall $|\psi(\delta)| > |\chi(\delta)|$, so gilt für einen beliebigen Bereich B_2

$$B_1 \cap B_2(\psi(\delta), \varrho) \subset B_1 \cap B_2(\chi(\delta), \varrho).$$

Wenden wir diesen Hilfssatz an, so erhalten wir:

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \supset D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (M, \varrho).$$

Der Randabstand eines Punktes δ vom Rande des Gebietes $\{\delta | x_1 > a_1\}$ ist offenbar $d_{\{\delta | x_1 > a_1\}}(\delta) = x_1 - a_1$. Also

$$\{\delta | x_1 > a_1\} (M, \varrho) = \{\delta | x_1 > a_1 \wedge x_1 - a_1 > \varrho \cdot M\} = \{\delta | x_1 > a_1 + \varrho \cdot M\}.$$

Machen wir ϱ so klein, daß $a_1 + \varrho \cdot M < b_1$, dann ist also

$$\{\delta | x_1 > a_1\} (M, \varrho) \supset \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Es folgt:

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (M, \varrho) \supset \{\delta | x_1 > b_1\} \cap D.$$

Also (s. oben):

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \supset D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (M, \varrho) \supset D \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Und daraus folgt:

$$D \cap \{\delta | x_1 > a_1\} (e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | x_1 > b_1\} = D \cap \{\delta | x_1 > b_1\}.$$

Und damit ist (s. Schluß von 10.2) unsere Gleichung I aus 10.1 bewiesen.

Die Gleichung II wird ganz genau so bewiesen, denn auch e^{ε_1} hat in D ein Maximum. Ebenso verläuft der Beweis für die Gleichungen III und IV ganz analog. w.z.b.w.

10.4. Für alle hinreichend kleinen ϱ gilt:

$$G_3^{(\varrho)} = D_3(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_3(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | b_1 < x_1 < b_2\}.$$

Beweis. Es ist nach Definition 9.3:

$$G_3^{(\varrho)} = G \cap \{\delta | b_1 < x_1 < b_2\} = D(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | b_1 < x_1 < b_2\}.$$

Unter Benutzung der Gleichungen I—IV aus 10.1 ist die rechte Seite für alle hinreichend kleinen ϱ gleich

$$= D_1(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_1(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_2(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_2(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | b_1 < x_1 < b_2\}.$$

Es ist nach Definition $D_3 = D_1 \cap D_2$. Wenden wir noch Hilfssatz 4.6 an, so erhalten wir: Dieser letzte Ausdruck ist gleich

$$= D_3(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_3(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{\delta | b_1 < x_1 < b_2\}. \quad \text{w.z.b.w.}$$

§ 11. Konstruktion der Folgen $\Delta^{(e, \nu)}$.

Wir konstruieren in diesem Paragraphen zu jedem $G^{(e)}$ eine Folge $\Delta^{(e, \nu)}$, so daß jedes Paar $(G^{(e)}, \Delta^{(e, \nu)})$ ein (G, Δ) -Paar (im Sinne der Definition 5.6) ist.

11.1. Wir betrachten die Bereiche $D(\chi(\delta), \varrho)$, $D_1(\chi(\delta), \varrho)$ und $D_2(\chi(\delta), \varrho)$ mit $\chi(\delta) = 1$. Es ist nach Definition $D_3 = D_1 \cap D_2$. Nach Voraussetzung sind D_1 und D_2 Holomorphiebereiche. Also sind auf Grund unseres Hilfssatzes 4.13 die Bereiche $D_1(1, \varrho)$, $D_2(1, \varrho)$ und $D_3(1, \varrho)$ Holomorphiebereiche. Ferner gilt auf Grund unseres Hilfssatzes 4.6:

$$D_3(1, \varrho) = D_1(1, \varrho) \cap D_2(1, \varrho).$$

11.2. Da der Bereich $D_3(1, \varrho)$ Holomorphiebereich ist, können wir ihn (nach 2.11) durch WEILSCHE analytische Polyeder

$$W_\nu^{(e)} \text{ mit } W_\nu^{(e)} \subset\subset D_3(1, \varrho) \text{ und } \lim_{\nu \rightarrow \infty} W_\nu^{(e)} = D_3(1, \varrho),$$

$$W_\nu^{(e)} = \{\delta \mid \delta \in D_3(1, \varrho) \wedge |X_1^{(e, \nu)}(\delta)| < 1 \wedge \dots \wedge |X_{k(e, \nu)}^{(e, \nu)}(\delta)| < 1\}$$

approximieren. Dann definieren wir: $P_\nu^{(e)} =_{df} W_\nu^{(e)} \cap G_3^{(e)}$, also

$$P_\nu^{(e)} = \{\delta \mid \delta \in G_3^{(e)}, \wedge |X_1^{(e, \nu)}(\delta)| < 1 \wedge \dots \wedge |X_{k(e, \nu)}^{(e, \nu)}(\delta)| < 1\}.$$

Wir müssen nur dafür sorgen, daß die in 5.3 bis 5.5 aufgestellten Voraussetzungen über die Funktionen $X_j^{(e, \nu)}(\delta)$ erfüllt werden.

Zu 5.3: Wir nehmen als G , G_1 und G_2 die Bereiche $G^{(e)}$, $G_1^{(e)}$ und $G_2^{(e)}$. Dann sind für alle hinreichend kleinen ϱ die an G , G_1 und G_2 gestellten Bedingungen erfüllt, denn $G^{(e)}$ ist schlicht und beschränkt und die $G_1^{(e)}$ und $G_2^{(e)}$ sind Holomorphiebereiche (wie in 10.1 bewiesen).

Zu 5.4: In 10.4 haben wir bewiesen, daß für alle hinreichend kleinen ϱ gilt:

$$G_3^{(e)} = D_3(e^{-z_1}, \varrho) \cap D_3(e^{z_1}, \varrho) \cap \{\delta \mid b_1 < x_1 < b_2\}.$$

Da nun $b_1 < 0 < b_2$ ist, so ist

$$G_3^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 = 0\} = D_3(e^{-z_1}, \varrho) \cap D_3(e^{z_1}, \varrho) \cap \{\delta \mid x_1 = 0\}.$$

Nun ist für $x_1 = 0$: $|e^{-z_1}| = 1$ und $|e^{z_1}| = 1$. Es ist daher

$$G_3^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 = 0\} = D_3(1, \varrho) \cap \{\delta \mid x_1 = 0\}.$$

Nun ist $P_\nu^{(e)} \subset W_\nu^{(e)} \subset\subset D_3(1, \varrho)$. Also ist:

$$P_\nu^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 = 0\} \subset\subset G_3^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 = 0\}.$$

Da $D_3(e^{-z_1}, \varrho) \cap D_3(e^{z_1}, \varrho) \cap \{\delta \mid x_1 = t\}$ mit $t \rightarrow 0$ stetig gegen $D_3(1, \varrho) \cap \{\delta \mid x_1 = 0\}$ geht, so muß auch noch in der Nähe von Null das Kompaktenthaltensein gelten. Genau: Es gibt ein δ , so daß für alle reellen t mit $|t| < \delta$ gilt:

$$P_\nu^{(e)} \cap \{\delta \mid x_1 - t = 0\} \subset\subset G_3 \cap \{\delta \mid x_1 - t = 0\}.$$

Wir merken an, daß $\{\delta \mid x_1 - t = 0\} = \{\delta \mid |e^{z_1 - t}| = 1\}$ ist. Wir können also im Intervall $\{-\delta, \delta\}$ (für beliebig kleine $\delta > 0$) zwei Zahlen $c_1(\varrho, \nu)$ und $c_2(\varrho, \nu)$ mit $b_1 < c_1 < 0 < c_2 < b_2$ und $|c_1| < \delta$ und $c_2 < \delta$ finden, so daß

$$X_{k+1}^{(e, \nu)}(\delta) =_{df} e^{z_1 - c_1(\varrho, \nu)} \text{ und } X_{k+2}^{(e, \nu)}(\delta) =_{df} e^{z_1 - c_2(\varrho, \nu)}$$

zusammen mit den $X_1^{(e,v)} \dots X_k^{(e,v)}$ ein analytisches Polyeder

$$V^{(e,v)} = P_v^{(e)} \cap \{ \delta \mid |X_{k+1}^{(e,v)}(\delta)| > 1 \wedge |X_{k+2}^{(e,v)}(\delta)| < 1 \}$$

ausmachen, das kompakt in $G_3^{(e)}$ liegt:

Ferner können wir erreichen, da wir c_1 und c_2 in dem Intervall $\{-\delta, \delta\}$ beliebig variieren können, daß $V^{(e,v)}$ ein WEILSches Polyeder ist, d. h., daß der Durchschnitt von je j verschiedenen der Hyperflächen $\{ \delta \mid |X_i^{(e,v)}(\delta)| = 1 \} \dots \{ \delta \mid |X_{k+2}^{(e,v)}(\delta)| = 1 \}$ höchstens $2n - j$ dimensional ist. Damit sind die in 5.4 gestellten Bedingungen erfüllt.

Zu 5.5. In 10.4 haben wir bewiesen, daß

$$G_3^{(e)} = D_3(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap D_3(e^{\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{ \delta \mid b_1 < x_1 < b_2 \}$$

ist. Daraus folgt:

$$\overline{G_3^{(e)}} = \overline{D_3(e^{-\varepsilon_1}, \varrho)} \cap \overline{D_3(e^{\varepsilon_1}, \varrho)} \cap \{ \delta \mid b_1 \leq x_1 \leq b_2 \}.$$

Berücksichtigen wir, daß $b_1 < 0$, also $e^{-b_1} > e^{b_1}$ ist, so bekommen wir daraus:

$$\overline{G_3^{(e)}} \cap \{ \delta \mid x_1 = b_1 \} = D_3(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{ \delta \mid x_1 = b_1 \}.$$

Da $|e^{-b_1}| > 1$ ist, so ist ferner:

$$D(e^{-\varepsilon_1}, \varrho) \cap \{ \delta \mid x_1 = b_1 \} \subset D(1, \varrho) \cap \{ \delta \mid x_1 = b_1 \}.$$

Es existiert also eine Umgebung U_1 von $\overline{G_3^{(e)}} \cap \{ \delta \mid x_1 = b_1 \}$, die noch kompakt in $D(1, \varrho)$ enthalten ist. Wir können daher verlangen, daß U_1 kompakt in $W_v^{(e)}$ enthalten ist. Und damit existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß alle $X_1^{(e,v)} \dots X_k^{(e,v)}$ in U_1 dem Betrage nach kleiner als $1 - \varepsilon$ sind. Analog finden wir ein U_2 für $G_3^{(e)} \cap \{ \delta \mid x_1 = b_2 \}$. Damit ist Bedingung 5.5 erledigt.

11.3. Es gilt für alle $\varrho > 0$ und für alle ν : $\Delta^{(e,v)} \subset G^{(e)}$. Und es ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e,v)} = G^{(e)}.$$

Beweis. Es war $\Delta^{(e,v)}$ nach Definition gleich

$$\Delta^{(e,v)} = (G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup P_v^{(e)}.$$

Da nun $P_v^{(e)} \subset G_3^{(e)}$ nach Definition, so ist $\Delta^{(e,v)} \subset G^{(e)}$ trivial. Ferner: Es ist offenbar

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e,v)} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} [(G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup P_v^{(e)}] = (G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_v^{(e)}.$$

Nun ist nach Definition: $P_v^{(e)} = W_v^{(e)} \cap G_3^{(e)}$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} W_v^{(e)} = D_3(1, \varrho)$, und es ist $G_3^{(e)} \subset D_3(1, \varrho)$. Also ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_v^{(e)} = G_3^{(e)}$. Also ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta^{(e,v)} = (G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup G_3^{(e)} = G^{(e)}$.

w.z.b.w.

IV. Kapitel. Folgerung des Verheftungssatzes.

§ 12. Konstruktion der Folgen $Q_\mu^{(e,v)}$ und Folgerung des Verheftungssatzes.

12.1. Wir werden in diesem Paragraphen in 12.4 bis 12.6 zu jedem $\Delta^{(e,v)}$ eine Folge von Bereichen $Q_\mu^{(e,v)}$ mit $Q_\mu^{(e,v)} \subset \Delta^{(e,v)}$ und $\lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_\mu^{(e,v)} = \Delta^{(e,v)}$ konstruieren mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem Randpunkt $\delta^{(0)}$ von $Q_\mu^{(e,v)}$ gibt es eine Cousin-I-Verteilung, die in $G^{(e)}$ definiert ist und dort die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, die für den Randpunkt $\delta^{(0)}$ einen Pol vorschreibt, und die in $Q_\mu^{(e,v)}$ keine Pole vorschreibt.

12.2 Wenn wir eine solche Cousin-I-Verteilung haben, dann können wir sie für das Paar $(G^{(e)}, \Delta^{(e,v)})$ lösen (s. 8.10). Wir bekommen also eine in $\Delta^{(e,v)}$ meromorphe Funktion, die die vorgegebenen Pole besitzt. Diese Funktion ist also meromorph in einer Umgebung von $Q_\mu^{(e,v)}$, sie ist holomorph in $Q_\mu^{(e,v)}$ und besitzt einen Pol in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$.

Das heißt: Es gibt zu jedem Randpunkt $\delta^{(0)}$ von $Q_\mu^{(e,v)}$ eine in $Q_\mu^{(e,v)}$ holomorphe Funktion, die in $\delta^{(0)}$ singulär ist. Damit ist nach einem Satze von CARTAN-THULLEN (vgl. 2.7) $Q_\mu^{(e,v)}$ Holomorphiebereich.

12.3. Daraus folgt jetzt unser Verheftungssatz unmittelbar. Da jedes $Q_\mu^{(e,v)}$ Holomorphiebereich ist, so ist auf Grund des Satzes von BEHNKE-STEIN (2.9) auch

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_\mu^{(e,v)} = \Delta^{(e,v)}$$

Holomorphiebereich. Ebenso ist dann

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Delta^{(e,v)} = G^{(e)}$$

Holomorphiebereich und schließlich ist

$$\lim_{e \rightarrow \infty} G^{(e)} = D$$

Holomorphiebereich. w.z.b.w.

12.4. Konstruktion der $Q_\mu^{(e,v)}$. Wir approximieren $D_1(e^{z_1}, \varrho)$ durch analytische Polyeder $Q_1^{(e,\mu)}$,

$$Q_1^{(e,\mu)} =_{df} \{ \delta \mid \delta \in D_1(e^{z_1}, \varrho) \wedge |^{(1)} f_1^{(e,\mu)}(\delta)| < 1 \wedge \dots \wedge |^{(l)} f_{k_1}^{(e,\mu)}(\delta)| < 1 \},$$

so daß

$$Q_1^{(e,\mu)} \subset D_1(e^{z_1}, \varrho), \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_1^{(e,\mu)} = D_1(e^{z_1}, \varrho)$$

und

$$\Delta^{(e,v)} \cap \{ \delta \mid b_1 < x_1 < 0 \} \subset Q_1^{(e,\mu)}.$$

Das ist möglich, weil

$$\Delta^{(e,v)} \cap \{ \delta \mid b_1 < x_1 < 0 \} \subset D_1(e^{z_1}, \varrho)$$

(auf Grund der Gestalt von $\Delta^{(e,v)}$).

Ebenso approximieren wir $D_2(e^{-z_1}, \varrho)$ durch analytische Polyeder

$$Q_2^{(e,\mu)} =_{df} \{ \delta \mid \delta \in D_2(e^{-z_1}, \varrho) \wedge |^{(2)} f_1^{(e,\mu)}(\delta)| < 1 \wedge \dots \wedge |^{(2)} f_{k_2}^{(e,\mu)}(\delta)| < 1 \},$$

so daß $Q_2^{(e,\mu)} \subset D_2(e^{-z_1}, \varrho)$, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} Q_2^{(e,\mu)} = D_2(e^{-z_1}, \varrho)$

und $\Delta^{(e,v)} \cap \{ \delta \mid 0 < x_1 < b_2 \} \subset Q_2^{(e,\mu)}$.

Dann nehmen wir noch statt $P_v^{(e)}$ (vgl. 5.4) jetzt $P_v^{(e)*}$

$$P_v^{(e)*} =_{df} \left\{ \delta \mid \delta \in G_3^{(e)} \wedge |X_1^{(e,v)}(\delta)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \wedge \dots \wedge |X_k^{(e,v)}(\delta)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

(ε sei das ε von 5.5) und bilden

$$\Delta^{(e,v)*} =_{df} (G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup P_v^{(e)*}.$$

Es ist also $\Delta^{(e,v)*}$ ganz analog zu $\Delta^{(e,v)}$ gebildet, nur daß wir die Flächen $|X_j^{(e,v)}(\delta)| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ anstelle von $|X_j^{(e,v)}(\delta)| = 1$ haben. Dann definieren wir:

$$Q_\mu^{(e,v)} = (\Delta^{(e,v)*} \cap Q_1^{(e,\mu)} \cap \{\delta | x_1 \geq 0\}) \cup (\Delta^{(e,v)*} \cap Q_2^{(e,\mu)} \cap \{\delta | x_1 \leq 0\}).$$

$Q_\mu^{(e,v)}$ ist also eine Art „analytisches Polyeder“, jedoch so, daß die Funktionen, die die Randhyperflächen definieren (nämlich $|^{(1)}f_j^{(e,v)}(\delta)| = 1$, $|^{(2)}f_j^{(e,v)}(\delta)| = 1$ und $|X_m^{(e,v)}(\delta)| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$), jeweils nur in einem Teil von $Q_\mu^{(e,v)}$ definiert und holomorph sind.

12.5. Jeder Randpunkt $\delta^{(0)}$ von $Q_\mu^{(e,v)}$ liegt jedenfalls auf mindestens einer der eben genannten Randhyperflächen.

I. Fall: $\delta^{(0)}$ liegt auf $\{\delta | |^{(1)}f_j^{(e,v)}(\delta)| = 1\}$.

Dann definieren wir:

$$g(\delta) = {}_{af}^{(1)}f_j^{(e,\mu)}(\delta) - {}^{(1)}f_j^{(e,\mu)}(\delta^{(0)}).$$

Untersuchen wir jetzt die analytische Fläche $\{\delta | g(\delta) = 0\}$. Sie dringt nach Konstruktion nicht in

$$Q_\mu^{(e,v)} \cap \{\delta | x_1 > b_1\}$$

ein. Wir gewinnen jetzt aus dieser Fläche eine Cousin-I-Verteilung der gewünschten Art.

In $G_1^{(e)} = G^{(e)} \cap \{\delta | x_1 > b_1\}$ ordnen wir jedem Punkte $(g(\delta))^{-1}$ als Lokalfunktion zu und als Umgebung $G_1^{(e)}$. In $(G^{(e)} - G_1^{(e)}) = G^{(e)} \cap \{\delta | x_1 \leq b_1\}$ ordnen wir jedem Punkte die Funktion $\equiv 0$ als Lokalfunktion zu und als Umgebung die größte Hyperkugel, die noch in $G^{(e)}$ liegt und die $\{\delta | \delta \in G_1^{(e)} \wedge g(\delta) = 0\}$ nicht schneidet.

Dann sind die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Denn jede Hyperfläche $\{\delta | |^{(1)}f_j^{(e,\mu)}(\delta)| = 1\}$ hatte die Eigenschaft, in eine Umgebung von $\overline{G^{(e)}} \cap \{\delta | x_1 = b_1\}$ nicht einzudringen. Damit ist die Verträglichkeit an der „Nahtstelle“ $\overline{G^{(e)}} \cap \{\delta | x_1 = b_1\}$ gewährleistet. Verträglichkeit heißt: Die Differenz zweier Lokalfunktionen ist holomorph im Durchschnitt der zugeordneten Umgebungen, und jedem Punkt ist eine volle Umgebung auch wirklich zugeordnet.

Fassen wir zusammen: Diese Cousin-I-Verteilung ist definiert in $G^{(e)}$ und erfüllt dort die Verträglichkeitsbedingungen. Sie schreibt in $Q_\mu^{(e,v)}$ keine Pole vor, wohl aber in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$ von $Q_\mu^{(e,v)}$. Sie ist also von der in 12.1 geforderten Art.

12.6. Zum II. Fall, daß $\delta^{(0)}$ auf $\{\delta | |^{(1)}f_l^{(e,\mu)}(\delta)| = 1\}$ liegt, ist nur zu sagen, daß die Konstruktion der gewünschten Cousin-I-Verteilung genau wie im Falle I verläuft. Es bleibt noch

$$\text{III. Fall: } \delta^{(0)} \in \{\delta | \delta \in G_3^{(e)} \wedge |X_m^{(e,v)}(\delta)| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

In diesem Falle ordnen wir jedem Punkte in $G^{(e)}$ die Funktion $(X_m^{(e,v)}(\delta) - X_m^{(e,v)}(\delta^{(0)}))^{-1}$ als Ortsfunktion zu und als Umgebung $G_3^{(e)}$. In $G^{(e)} - G_3^{(e)}$

ordnen wir jedem Punkte die Funktion $\equiv 0$ als Lokalfunktion zu und als Umgebung die größte Hyperkugel, um den Punkt als Mittelpunkt, die noch in

$$(G^{(e)} - G_3^{(e)}) \cup U_1 \cup U_2$$

liegt. Da nach 5.5 und 11.2

$$|X_\mu^{(e)}(\delta)| < 1 - \varepsilon \text{ in } U_1 \cup U_2 \cup G_3^{(e)},$$

so ist die Differenz zweier Lokalfunktionen im Durchschnitt der zugeordneten Umgebungen holomorph und die Verträglichkeitsbedingungen sind in ganz $G^{(e)}$ erfüllt.

Wir haben wiederum in $Q_\mu^{(e,v)}$ keine Pole vorgegeben, wohl aber in dem Randpunkt $\delta^{(0)}$.

Damit gibt es zu jedem Randpunkt von $Q_\mu^{(e,v)}$ mindestens eine Cousin-I-Verteilung der in 12.1 beschriebenen Art.

Und damit ist der OKAsche Verheftungssatz bewiesen und somit das LEVI-sche Problem für beliebige schlichte Gebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen gelöst.

(Eingegangen am 21. Juli 1953.)

Literaturverzeichnis.

(Die Literatur bis 1934 siehe in B.-Th.)

- BEHNKE, H., und F. SOMMER: Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes. *Math. Ann.* **121** (1950). — BEHNKE, H., und K. STEIN: [1] Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität. *Math. Ann.* **116** (1938); [2] Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. *Mitt. Math. Ges. Hamburg VIII* (1940); [3] Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (1951); [4] Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen. *Göttinger Nachr., N.F.*, Bd. 1, Nr. 15 (1939). — BEHNKE, H.: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. *Abh. math. Semin. Hamburg* **4** (1926). — BERGMAN, S.: [1] Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. *Math. Z.* **39** (1935); [2] Über eine Integraldarstellung von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Rec. math. Soc. Math. (Moscou)* **1**, 851 (1936). — BREMERMAN, H. J.: [1] Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Dissertation. Schriftenreihe des Math. Inst. Münster **5** (1951); [2] Complex Convexity. Technical Report, Stanford (1954). (Ebenfalls zur Veröffentlichung in einer Zeitschrift vorgesehen.) — FUKS, B. A.: Die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen von komplexen Veränderlichen. *Uspechi mat. Nauk* **5**, Nr. 4 (38), 75—120 (1950) [Russisch]. Ins Englische übersetzt erschienen unter dem Titel: Natural boundaries of analytic functions of complex variables. *Amer. Math. Soc. Translations* No. 93 (1953). — LELONG, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. *Journal d'Analyse de Jerusalem*, Bd. 2 (1952/53). — NORGUET, F.: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions univalentes de plusieurs variables complexes (hektographiertes Manuskript). — OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: [1] I. Domaines convexes par rapport aux fractions rationnelles. *Journ. Sc. Hiroshima Univ. (A)* **6** (1936); [2] II. Domaines d'holomorphie. *Journ. Sc. Hiroshima University (A)* **7**, No. 2 (1937); [3] III. Deuxième problème de Cousin. *Journ. Sc. Hiroshima Univ.* (1939); [4] IV. Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes. *Japanese J. of Math.* **XVII** (1941); [5] V. L'intégrale de Cauchy. *Japanese J. of Math.* **XVII** (1941); [6] Domaines pseudoconvexes. *The Tohoku Math. J.* **49** (1942). — SOMMER, F.: Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. *Math. Ann.* **125** (1952). — WEIL, A.: L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Math. Ann.* **111** (1935).

Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit den Viergeweben von Herrn R. ARTZY.

Von

HERBERT NAUMANN in Marburg/Lahn.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ hat RAFAEL ARTZY die ebenen 4-Gewebe, deren Träger nicht zu dreien kollinear liegen (sog. 4-Gewebe „dritter Art“), durch einige Schließungssätze einer analytischen Behandlung zugänglich gemacht. Der Schließungssatz Φ entspricht dabei der Beziehung $c + (a + b) = a + (c + b)$, bedeutet also Kommutativität und Assoziativität der Addition, R_{ABC} vermittelt das assoziative und T_{ABC} das kommutative und assoziative Gesetz der Multiplikation, und der Satz Γ entspricht dem linken distributiven Gesetz. Für das zweite distributive Gesetz wurde kein einfach gebauter Schließungssatz angegeben. Wir werden im folgenden zeigen, daß unter Voraussetzung von R_{ABC} , Φ und Γ dem zweiten distributiven Gesetz ein spezieller kleiner DESARGUESscher Satz entspricht, der infolge der Bindung an das 4-Gewebe nur von zwei freien Parametern abhängt.

Unter Voraussetzung der Schließungssätze R_{ABC} , Φ und Γ entsprechen nach der Algebraisierung des Gewebes den Gewebegeraden folgende Gleichungen (vgl. R. ARTZY a. a. O.):

$$\begin{aligned} A\text{-Gerade:} & \quad y = c \\ B\text{-Gerade:} & \quad x = c \\ C\text{-Gerade:} & \quad x = c y \\ D\text{-Gerade:} & \quad x - 1 = c (y - 1). \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte und die Koeffizienten dieser vier Typen von Gleichungen gehören dabei einem System doppelter Komposition an, das folgenden Axiomen genügt:

Das System bildet bei Addition eine Abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element und bei Multiplikation unter Ausschluß der Null eine (nicht notwendige Abelsche) Gruppe mit dem neutralen Element 1. Für die Multiplikation mit 0 gilt $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. Die Multiplikation ist linksdistributiv: $a(b + c) = ab + ac$. Die Gleichung $ax - bx = c$ ist für $a \neq b$ eindeutig lösbar²⁾.

¹⁾ R. ARTZY, Eigenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage. Math. Ann. 126, 336—342 (1953).

²⁾ Dieses Auflösbarkeitsaxiom ist bei R. ARTZY a. a. O. nicht ausgesprochen; für $a \neq 0$, $c \neq -1$ geht jedoch die obige Gleichung durch die Substitution $x = a^{-1}(c + 1)y$ in eine solche der Form $a'y - b'y = a' - 1$ mit $a' \neq b'$ über (der Fall $a = 0$ ist trivial, und im Falle $c = -1$ multipliziert man die obige Gleichung zuvor von links mit einem beliebigen von 0 und 1 verschiedenen Faktor), und die eindeutige Auflösbarkeit der letzteren Gleichung ist genau der analytische Ausdruck dafür, daß die D-Gerade $x - 1 = a'(y - 1)$ mit der zu ihr nicht parallelen C-Gerade $x = b'y$ einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt besitzt.

Diese Axiome ziehen die Formeln $a(-b) = -ab$ und $(-a)b = -ab$ nach sich. Die erstere folgt bekanntlich aus der Linksdistributivität, während die andere in einem linksseitig distributiven Zahlensystem mit additiver Gruppe genau dann gilt, wenn -1 zum assoziativen Zentrum des Zahlensystems gehört³⁾.

Wir betrachten nun folgenden Schließungssatz:

\mathcal{E} : Liegen $E, F; G, H$ auf zwei verschiedenen A -Geraden, $E, G; C, F; H, I$ auf drei verschiedenen B -Geraden, $F, H; G, I$ auf zwei verschiedenen D -Geraden, und ist die letztgenannte Gerade parallel zu der C -Geraden durch E , so schneiden sich die B -Gerade durch G , die C -Gerade durch I und die D -Gerade durch H in einem Punkt K .

Ersichtlich ist die Figur des Schließungssatzes \mathcal{E} durch einen geeigneten Punkt festgelegt, etwa durch E . Er habe die Koordinaten $E(a, 1-b)$. Es darf angenommen werden, daß $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $b \neq 1$ ist, da anderenfalls die Figur entartet. Dann erhält man der Reihe nach

$$CE: x = a(1-b)^{-1}y; DGI: x-1 = a(1-b)^{-1}(y-1); G(a, (1-b)a^{-1}(a-1)+1);$$

$$F(0, 1-b); DFH: x-1 = b^{-1}(y-1); H(b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1, (1-b)a^{-1}(a-1)+1);$$

$$I(b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1, (1-b)a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1);$$

$$CI: x = [b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1] \cdot [(1-b)a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1]^{-1} \cdot y;$$

sodann ergeben sich für den Schnittpunkt der Geraden GE und DFH die Koordinaten $(a, b(a-1)+1)$ und für den Schnittpunkt der Geraden GE und CI die Koordinaten

$$(a, [(1-b)a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1] \cdot [b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1]^{-1} \cdot a).$$

Nach Satz \mathcal{E} müssen beide Punkte übereinstimmen. Durch Vergleich ihrer y -Koordinaten erhält man somit nach Rechtsmultiplikation mit

$$a^{-1} \cdot [b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1]$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Satzes \mathcal{E} im A - B - C - D -Gewebe die Formel

$$(1) \quad [b(a-1)+1] \cdot a^{-1} \cdot [b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1] \\ = (1-b)a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+1 \quad \text{mit } a, b \neq 0.$$

Linksmultiplikation mit $a^{-1}b^{-1}$ ergibt wegen $a^{-1}b^{-1}[b(a-1)+1] = 1 - a^{-1} + a^{-1}b^{-1} = 1 + a^{-1}b^{-1}(1-b)$

$$[1 + a^{-1}b^{-1}(1-b)] \cdot [a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1)+a^{-1}] \\ = a^{-1}b^{-1}(1-b) \cdot a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1) + a^{-1}b^{-1}.$$

Setzt man nun

$$(2) \quad a^{-1}b^{-1}(1-b) = \delta, \\ a^{-1}b^{-1}(1-b)a^{-1}(a-1) + a^{-1} = \varphi,$$

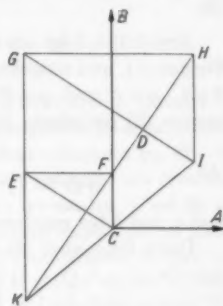


Fig. 1. \mathcal{E}

³⁾ H. NAUMANN, Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Math. Z. 60, 120—141 (1954). — Vgl. § 5.

so erhält man

$$\begin{aligned}
 (1 + \delta) \varphi &= \delta (\varphi - a^{-1}) + a^{-1} b^{-1} \\
 &= \delta \varphi - a^{-1} b^{-1} (1 - b) a^{-1} + a^{-1} b^{-1} \\
 &= \delta \varphi + a^{-1} b^{-1} (1 - b) a^{-1} (a - 1) - a^{-1} b^{-1} (1 - b) + a^{-1} b^{-1} \\
 (3) \quad (\delta + 1) \varphi &= \delta \varphi + \varphi.
 \end{aligned}$$

Ersichtlich folgt aus dem eingeschränkten rechtsdistributiven Gesetz (3) die Formel (1), und umgekehrt folgt (3) aus (1), zunächst jedoch nur in den Fällen $\delta \neq 1$, $\varphi \neq \delta$ und $\varphi \neq \delta^2$, da sich nur unter diesen Bedingungen das Formelsystem (2) umkehren läßt: Durch die (leicht zu bestätigenden) Gleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} &a^{-1} - \delta a^{-1} = \varphi - \delta \\ &\delta (b^{-1} - 1)^{-1} - \delta^2 (b^{-1} - 1)^{-1} = \varphi - \delta \end{aligned} \quad \text{mit } \delta \neq 1, \varphi \neq \delta, \varphi \neq \delta^2$$

sind a und b bei gegebenem δ und φ eindeutig bestimmt.

Dann folgt aber (3) auch allgemein: Die Formel $(1 + 1) \varphi = \varphi + \varphi$ läßt sich für $\varphi = -(1 + 1)$ und $\varphi = 1 + 1 + 1 + 1$ unmittelbar verifizieren, und für $\varphi \neq -(1 + 1)$, $1 + 1 + 1 + 1$ führt folgende Ableitung zum Ziel:

$$\varphi = -(-(1 + 1) + 1) \varphi = -(-(1 + 1) \varphi + \varphi) = (1 + 1) \varphi - \varphi.$$

Für beliebiges δ und φ läßt sich sodann die Umformung

$$\begin{aligned}
 (\delta + 1) \varphi &= (\delta + 1) \varphi_1 \varphi_2 = (\delta \varphi_1 + \varphi_1) \varphi_2 = \varphi_1 (\varphi_1^{-1} \delta \varphi_1 + 1) \varphi_2 \\
 &= \varphi_1 (\varphi_1^{-1} \delta \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2) = \delta \varphi + \varphi
 \end{aligned}$$

immer durchführen, wenn φ_1 beliebig, aber verschieden von 0, δ , δ^2 , $\delta^{-1} \varphi$, $\delta^{-2} \varphi$ ist. Da jedes Zahlensystem, das den oben geforderten Axiomen genügt und aus weniger als sechs Elementen besteht, kommutativ (und folglich bereits ein Galois-Feld) ist⁴⁾, so ist der Beweis der Formel (3) fertig.

Aus (3) folgt nun das rechte distributive Gesetz in voller Allgemeinheit:

$$(\alpha + \beta) \gamma = \beta (\beta^{-1} \alpha + 1) \gamma = \beta (\beta^{-1} \alpha \gamma + \gamma) = \alpha \gamma + \beta \gamma.$$

Das Resultat läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ein Viergewebe dritter Art, in dem die Schließungssätze R_{ABC} , Φ , Γ und Ξ gelten, entspricht einem Schiefkörper.

(Eingegangen am 18. Februar 1954.)

⁴⁾ Aus $uv \neq vu$ würde nämlich folgen, daß 0, 1, u , v , uv , vu lauter verschiedene Elemente sind.

Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique.

Par

ANDRÉ WEIL à Chicago.

En géométrie algébrique classique, les critères d'équivalence linéaire et d'équivalence algébrique, dûs pour la plupart aux géomètres italiens, jouent un rôle important (cf. en particulier O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, pp. 88—89 et pp. 126—128). La géométrie moderne se devait de s'assimiler ces résultats en leur donnant le degré de généralité qui est devenu nécessaire. C'est là, en partie du moins, ce qui va être fait ici. D'autres résultats classiques, où interviennent les intégrales de 3^e espèce, ne peuvent être transcrits en termes abstraits que moyennant la théorie des variétés fibrées et seront traités ailleurs.

Tout le § I du présent mémoire, et le n° 19 du § IV, sont consacrés à des résultats auxiliaires; les uns peuvent être dits appartenir aux fondements de la géométrie algébrique, mais, comme malheureusement les ouvrages qui prétendent traiter de cette matière sont loin de fournir à cet égard ce qu'on serait en droit d'en attendre, il a fallu y consacrer une assez large place; d'autres constituent des compléments à la théorie des variétés abéliennes. Le § II donne, sous diverses formes, le «premier critère d'équivalence», qui est indépendant de la théorie des variétés abéliennes et est de nature essentiellement élémentaire et même triviale. Les résultats plus profonds sont contenus dans les §§ III—IV; dans les démonstrations, on s'est inspiré, bien entendu, des méthodes des géomètres italiens.

Les sigles F et VA renvoient respectivement à mes *Foundations of Algebraic Geometry* (Amer. Math. Soc. Coll. vol. XXIX, New York 1946; p. ex. F-VIII₂ renvoie au Chap. VIII, § 2 de ce volume), et à mes *Variétés abéliennes* (Act. Sc. et Ind. n° 1064, Hermann et C^{ie}, Paris 1948).

I. Résultats préliminaires.

1. Nous aurons besoin de divers compléments à la théorie des variétés abéliennes; en premier lieu nous généraliserons aux correspondances entre deux courbes certains des résultats de VA , § VI.

Soient C_1, C_2 deux courbes (complètes, sans point multiple). Pour $i = 1, 2$, soient J_i la jacobienne de C_i , φ_i la fonction canonique sur C_i (à valeurs dans J_i), f_i une fonction définie sur C_i , à valeurs dans une variété abélienne A , et λ_i l'extension linéaire de f_i à J_i ; soit X un diviseur sur A ; soient (avec les notations de VA , n° 44—45) $d_i = d(\lambda_i, X)$, $\varrho_i = (\lambda_i)'_X$. Soit F la fonction définie sur $C_1 \times C_2$ par $F(P \times Q) = f_1(P) + f_2(Q)$. Soit k un corps de définition pour toutes les variétés et fonctions ci-dessus, par rapport auquel X soit rationnel. Comme dans VA , n° 46, on voit que le cycle $Z = F(X_u)^{-1}$

si u est générique sur A par rapport à k ; Z est un diviseur sur $C_1 \times C_2$, c'est-à-dire une correspondance entre C_1 et C_2 , à laquelle on peut appliquer les définitions de VA, n° 43; soit ζ la classe de cette correspondance, et soit ζ' la classe de la correspondance Z' entre C_2 et C_1 qu'on déduit de Z en échangeant les deux facteurs du produit $C_1 \times C_2$. Dans ces conditions, il n'est que de reproduire les raisonnements de VA, n° 46, pour voir que $d(Z) = d_2$, $d'(Z) = d(Z') = d_1$, et pour obtenir les relations:

$$S\{\varphi_2[Z(M)]\} = \varrho_2[u - f_1(M)] + b_2,$$

$$S\{\varphi_1[Z'(N)]\} = \varrho_1[u - f_2(N)] + b_1,$$

où b_1, b_2 sont des points de J_1, J_2 rationnels par rapport à k . Comme dans VA, n° 46, on en conclut:

$$\zeta = -\varrho_2\lambda_1, \quad \zeta' = -\varrho_1\lambda_2.$$

2. Prenons en particulier $A = J_2$, $f_2 = \varphi_2$, donc $\lambda_2 = \delta_{J_2}$; et prenons pour X la variété Θ définie (conformément à VA, n° 41) sur J_2 , variété que nous noterons Θ_2 . Enfin, ξ étant une correspondance arbitraire entre C_1 et C_2 , identifiée comme dans VA, n° 43, avec un homomorphisme de J_1 dans J_2 , prenons $f_1 = \xi \circ \varphi_1$, d'où $\lambda_1 = \xi$. D'après VA, n° 48, on a $\varrho_2 = \delta_{J_2}$, donc $\zeta = -\lambda_1 = -\xi$; et on a $\zeta' = -\varrho_1$, d'où

$$\xi' = (\xi)'_{\Theta_2}.$$

On a aussi $d'(Z) = d(\lambda_1, \Theta_2)$, donc, d'après la prop. 21 de VA, n° 47, et la prop. 19 de VA, n° 41 (ou encore d'après le th. 31 de VA, n° 61),

$$d'(Z) = \frac{1}{2} \sigma(\xi'_{\Theta_2}) = \frac{1}{2} \sigma(\xi').$$

Comme Z est une correspondance positive, on a $d'(Z) \geq 0$; et $d'(Z) = 0$ entraîne $Z = 0$, donc $\xi = 0$. On a donc démontré le théorème suivant, qui généralise le théorème fondamental sur les correspondances sur une courbe:

Théorème 1. *Soit ξ une classe de correspondances entre deux courbes: on a $\sigma(\xi'_{\xi}) \geq 0$; et, si $\xi \neq 0$, on a $\sigma(\xi'_{\xi}) > 0$.*

Corollaire 1. *Si ξ est comme ci-dessus, $\sigma(\xi'_{\xi}) = 0$ entraîne $\xi = 0$.*

Corollaire 2. *Soit λ un homomorphisme de la jacobienne J d'une courbe C dans une variété abélienne A ; soit X un diviseur sur A . Alors λ ne s'annule qu'en un nombre fini de points de l'image $\lambda'_X A$ de A par λ'_X dans J .*

Il revient au même de dire que, si B est la composante de 0 dans le noyau de l'homomorphisme λ'_X de A dans J , et B' la composante de 0 dans le noyau de l'homomorphisme $\lambda \lambda'_X$ de A dans A , on a $B' = B$. Sinon, en effet, il y aurait une courbe contenue dans B' et non dans B , courbe qu'on pourrait écrire $f(C')$, où C' est une courbe abstraite (complète sans point multiple) et f une application de C' dans A . Soit μ l'extension de f à la jacobienne J' de C' ; on aura alors $\lambda'_X \mu \neq 0$ et $\lambda \lambda'_X \mu = 0$. En posant $\xi = \lambda'_X \mu$, on aura $\xi' = \mu'_X \lambda$ d'après le n° 1, donc $\xi'_{\xi} = 0$, ce qui implique $\xi = 0$ en vertu du coroll. 1, d'où contradiction.

Corollaire 3. *Soient J_1, J_2 les jacobiniennes de deux courbes C_1, C_2 ; soit ξ une classe de correspondances entre C_1 et C_2 , c'est-à-dire un homomorphisme de J_1*

dans J_2 . Alors ξ ne s'annule qu'en un nombre fini de points de l'image $\xi' J_2$ de J_2 par ξ' dans J_1 .

C'est là en effet le cas particulier du coroll. 1 qu'on obtient en y remplaçant C, J, A, X, λ par $C_1, J_1, J_2, \Theta_2, \xi$ respectivement.

3. Pour la commodité du lecteur, nous donnerons aussi la démonstration du résultat suivant, qui est connu¹⁾:

Lemme 1. Soit V^n une sous-variété d'un espace projectif P^N . Soit L un hyperplan de P^N , générique par rapport à un corps de définition k de V . Alors le cycle $V \cdot L$ est sans composante de multiplicité > 1 ; si $n \geq 2$, il n'a qu'une seule composante W , et les points multiples de W sont les points de L qui sont multiples sur V et ceux-là seulement.

Soit x un point de $V \cap L$, simple sur V ; il résulte du critère de multiplicité 1 (F-VI, th. 6) que, si L ne contient pas la variété linéaire tangente à V en x , x est contenu dans une seule composante W de $V \cap L$ et est un point simple de W , et que W a la multiplicité 1 dans $V \cdot L$. Disons suivant l'usage qu'un hyperplan est tangent à V en x s'il contient la variété linéaire tangente à V en x ; nous allons montrer que L ne peut être tangent à V en aucun point simple x de V . Supposons par exemple que x ne soit pas contenu dans l'hyperplan $X_0 = 0$ (en désignant par X_0, \dots, X_N les coordonnées homogènes dans P^N); prenant celui-ci pour «hyperplan à l'infini», passons à l'espace affine S^N . Dans cet espace, soit $F_\mu(X) = 0$ ($1 \leq \mu \leq m$) un système d'équations pour V

à coefficients dans k ; l'équation de L sera $\sum_{i=1}^N u_i X_i - v = 0$, où (u, v) est un système de $N+1$ variables indépendantes sur k . La variété linéaire tangente à V en x est définie par les équations $\sum_i \partial F_\mu / \partial x_i \cdot (X_i - x_i) = 0$; si L est

tangente à V en x , il y aura des quantités z_μ telles que $u_i = \sum_\mu z_\mu (\partial F_\mu / \partial x_i)$,

et on aura $v = \sum_i u_i x_i$. Soit \bar{x} un point générique de V par rapport à k ;

soient \bar{z}_μ m variables indépendantes sur $k(\bar{x})$; posons $\bar{u}_i = \sum_\mu \bar{z}_\mu (\partial F_\mu / \partial \bar{x}_i)$,

$\bar{v} = \sum_\mu \bar{u}_i \bar{x}_i$; (x, z, u, v) est alors une spécialisation de $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v})$ sur k ; puisque

(u, v) a la dimension $N+1$ sur k , (\bar{u}, \bar{v}) doit donc avoir au moins cette dimension. Mais la matrice $|| \partial F_\mu / \partial \bar{x}_i ||$ est de rang $N-n$, et on peut donc

supposer les F_μ rangés dans un ordre tel que l'on ait $\partial F_\mu / \partial \bar{x}_i = \sum_{r=1}^{N-n} \bar{w}_{\mu r} (\partial F_r / \partial \bar{x}_i)$,

avec $\bar{w}_{\mu r} \in k(\bar{x})$, quels soient μ et i ; on en déduit $\bar{u}_i = \sum_{r=1}^{N-n} \bar{t}_r (\partial F_r / \partial \bar{x}_i)$, avec

$\bar{t}_r = \sum_\mu \bar{z}_\mu \bar{w}_{\mu r}$; on a alors $k(\bar{u}, \bar{v}) = k(\bar{x}, \bar{t})$, ce qui montre que $k(\bar{u}, \bar{v})$ a au plus la dimension $n + (N-n) = N$ sur k .

¹⁾ Cf. O. ZARISKI, Trans. Am. Soc. 50 (1941), pp. 48—70, et 56 (1944), pp. 130—140, et aussi T. MATSUSAKA, Kyoto Math. Mem. 26 (1950), pp. 51—62, et Y. NAKAI, ibid., pp. 185—187.

Soit d'autre part x un point contenu dans une seule composante W de $V \cdot L$, et simple sur W ; et supposons que W ne soit pas une sous-variété multiple de V ; d'après ce qui précède, W a alors la multiplicité 1 dans $V \cdot L$; par suite, d'après le critère de multiplicité 1 (F-VI₂, th. 6), x est simple sur V . Il nous reste seulement à démontrer que, si $n \geq 2$, $V \cdot L$, ou ce qui revient au même $V \cap L$, a une seule composante, non multiple sur V . Supposant par exemple V non contenue dans $X_0 = 0$, passons à l'espace affine en prenant $X_0 = 0$ pour hyperplan à l'infini; le th. 1 de F-V₁ montre que $V \cap L$ n'est pas vide (dans S^N). Soit $\sum_i u_i X_i - v = 0$ l'équation de L ; soit $K = k(u, v)$; soient W une composante de $V \cap L$ dans S^N , et x un point générique de W par rapport à \bar{K} . La prop. 2 de F-V₁ montre que x est générique sur V par rapport à $k(u)$ et n'est donc ni multiple sur V ni contenu dans un hyperplan $X_i = 0$ à moins que V n'y soit contenue; il s'ensuit de même que, dans l'espace projectif, $V \cap L$ n'a aucune composante dans l'hyperplan $X_0 = 0$ puisque celui-ci ne contient pas V , donc qu'on obtient toutes les composantes de $V \cap L$ dans l'espace projectif en raisonnant dans l'espace affine S^N . Mais, toujours d'après la prop. 2 de F-V₁, $V \cap L$ n'a d'autres composantes (dans S^N) que W et ses conjuguées sur K ; pour montrer que W est l'unique composante de $V \cap L$, il suffira donc de démontrer que x a un lieu sur K , car ce lieu ne peut être autre alors que W . D'ailleurs, d'après ce qui précède, W a la multiplicité 1 dans $V \cdot L$, et a donc, d'après F-V₂, prop. 14, l'ordre d'inséparabilité 1 sur K , c'est-à-dire que $K(x)$ est une extension séparable (au sens de N. BOURBAKI, *Alg.*, Chap. V, ou encore «séparablement engendrée» au sens de F-I) de $K = k(u, v)$. D'après F-I₇, th. 5, tout revient donc à montrer que $K = k(u, v)$ est algébriquement fermé dans $K(x)^{1)}$; d'ailleurs, puisque $v = \sum_i u_i x_i$, on a $K(x) = k(u, x)$.

Soit K_1 la fermeture algébrique de K dans $K(x)$; comme $K(x)$ est séparable sur K , il l'est a fortiori sur K_1 et est donc une extension régulière de K_1 (d'après F-I₇, th. 5). Soient t, t' deux variables indépendantes sur $K(x)$ = $K_1(x) = k(u, x)$; soit $L = k(u, t, t')$; alors $L(x) = K_1(x, t, t')$ est une extension régulière de $L_1 = K_1(t, t')$, qui est algébrique sur $L(v) = K(t, t')$; donc L_1 est la fermeture algébrique de $L(v)$ dans $L(x)$; de plus, comme $K \subset K_1 \subset L_1$, et que K est algébriquement fermé dans $L(v) = K(t, t')$, on ne peut avoir $L_1 = L(v)$ que si $K = K_1$; donc tout revient à montrer que $L_1 = L(v)$. Supposons les coordonnées rangées dans un ordre tel que $k(x)$ soit algébrique séparable sur $k(x_1, \dots, x_n)$. Désignons par τ l'automorphisme de $L(x) = k(u, x, t, t')$ qui laisse invariants tous les éléments de $k(u, x)$ et qui échange t et t' ; désignons par σ l'automorphisme du même corps qui laisse invariants tous les éléments de $k(u_2, \dots, u_n, x, t, t')$ et transforme u_1 en $u_1 + t$; posons $y = v^\sigma = v + t x_1$ et $y' = v^{\sigma\tau} = v + t' x_1$. On a $L^\sigma = L$, donc $L(v)^\sigma = L^\sigma(v^\sigma) = L(y)$; par suite, la fermeture algébrique de $L(y)$ dans $L(x)$ est $M = L_1^\sigma$, et de même celle de $L(y')$ dans $L(x)$ est $M^\tau = L_1^{\sigma\tau}$. On a, dans ces conditions: $L(x_1, v, x_2, \dots, x_n) = L(y, y', x_2, \dots, x_n) \subset M(y', x_2, \dots, x_n) \subset L(x)$.

¹⁾ Ce résultat, et la démonstration qu'on va en donner, sont empruntés en substance à O. ZARISKI, *Trans. Am. Math. Soc.* 50 (1941). lemma 5, p. 68-69.

Posons $K_0 = k(u)$; on déduit aisément de F-IV₆, prop. 24, que $K_0(x)$ est algébrique séparable sur $K_0(x_1, v, x_3, \dots, x_n)$. Au moyen de la théorie de GALOIS (N. BOURBAKI, *Alg.*, Chap. V, § 10, n° 4, th. 1, cor. 1), on en conclut que tout corps intermédiaire entre $L(x_1, v, x_3, \dots, x_n)$ et $L(x)$ est de la forme $N(t, t')$, où N est un corps intermédiaire entre $K_0(x_1, v, x_3, \dots, x_n)$ et $K_0(x)$; un tel corps est donc transformé en lui-même par τ . En particulier, le corps $M(y', x_3, \dots, x_n)$ a donc cette propriété, c'est-à-dire qu'on a

$$M(y', x_3, \dots, x_n) = M^\tau(y, x_3, \dots, x_n).$$

Si donc on pose $M' = M^\tau(x_3, \dots, x_n)$, on aura $M \subset M'(y)$. On a d'autre part $L \subset M' \subset L(x)$, donc, comme $L(x)$ est une extension régulière de L , il en est de même de M' . Comme d'ailleurs le corps $L(y, y', x_3, \dots, x_n)$ n'est autre que $L(x_1, \dots, x_n)$ et est donc une extension purement transcendante de L de dimension n , y est transcendant sur $L(y', x_3, \dots, x_n)$, donc aussi sur M' qui en est une extension algébrique. Il s'ensuit que $M'(y)$ est une extension régulière de $L(y)$; comme $L(y) \subset M \subset M'(y)$, et que M est algébrique sur $L(y)$, on en conclut que $M = L(y)$, donc $L_1 = L(v)$, ce qui achève la démonstration.

4. La variété V et le corps k étant comme dans le lemme 1, soient L_ν des hyperplans définis respectivement par les équations $\sum_i u_{\nu i} X_i = 0$, pour $1 \leq \nu \leq n-1$, les $u_{\nu i}$ étant $(n-1)(N+1)$ variables indépendantes sur k ; soit $M_\nu = L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_\nu$, donc en particulier $M_0 = P^N$; M_ν est une variété linéaire de dimension $N - \nu$, générique sur k , et on a $M_\nu = M_{\nu-1} \cdot L_\nu$. Soit $V_0 = V$, et définissons V_ν par récurrence par $V_\nu = V_{\nu-1} \cdot L_\nu$; on vérifie immédiatement, par récurrence sur ν et en vertu de l'associativité des intersections, que $V_\nu = V \cdot M_\nu$. Dans ces conditions, l'application du lemme 1 donne, par récurrence sur ν , le résultat suivant :

Lemme 2. Soit V^n une sous-variété d'un espace projectif P^N ; soit M une variété linéaire de dimension $N - \nu \geq N - n$ dans P^N , générique sur un corps de définition k de V . Alors le cycle $V \cdot M$ est défini, et, pour $0 \leq \nu \leq n-1$, il se réduit à une variété W de dimension $n - \nu$, dont les points multiples sont les points de M qui sont multiples sur V et ceux-là seulement.

Corollaire 1. Les hypothèses étant les mêmes que dans le lemme 2, supposons de plus que V^n n'ait pas de sous-variété multiple de dimension $n-1$. Alors W n'a pas de sous-variété multiple de dimension $n - \nu - 1$. En particulier, si $\nu = n-1$, W est une courbe sans point multiple dont tous les points sont simples sur V .

En effet, l'ensemble des points multiples de V est alors réunion de variétés Z_e de dimension $\leq n-2$, algébriques sur k ; et, d'après le lemme 2, l'ensemble des points multiples de W est réunion des $Z_e \cap M$, d'où le résultat annoncé par application du lemme 2 aux Z_e .

Corollaire 2. Soient V^n une sous-variété d'un espace projectif P^N , et X^r un cycle sur V ; soit k un corps de définition de V par rapport auquel X soit rationnel; soient L_1, \dots, L_r des hyperplans génériques indépendants sur k ; soient $M_\nu = L_1 \cap \dots \cap L_\nu$ et $M_{\mu\nu} = L_{\mu+1} \cap L_{\mu+2} \cap \dots \cap L_\nu$ pour $0 \leq \mu < \nu \leq r$; soit $V_\nu = V \cdot M_\nu$ pour $0 \leq \nu \leq r$. Alors $X_\nu = \{X \cdot M_\nu\}_{P^N}$ est défini et est un cycle sur V_ν ; on a

$X_r = \{X_\mu \cdot M_{\mu r}\}_{P^N} = \{X_\mu \cdot V_r\}_{V_\mu}$ pour $0 \leq \mu < r \leq r$, et en particulier, pour $\mu = 0$, $X_r = \{X \cdot V_r\}_V$; enfin, si $r = n - 1$ et $X = (\varphi)$, φ étant une fonction sur V , φ induit une fonction q_r sur V_r , et on a $X_r = (q_r)$, pour $0 \leq r \leq n - 1$.

En appliquant le lemme 2 à M_r et à chacune des composantes de X , on voit que X_r est défini. Soit k_r un corps de définition de M_r , contenant k ; soit x un point générique par rapport à k_r , d'une composante Z de X_r ; si Z était multiple sur V_r , x le serait aussi, et serait donc multiple sur V d'après le lemme 2; le lieu U de x sur \bar{k} serait donc multiple sur V . Mais U est contenu dans une composante de X , et est donc de dimension $\leq r - 1$ puisque X est un cycle sur V et qu'une composante de X ne peut (par définition des cycles) être multiple sur V ; d'après le lemme 2, $U \cap M_r$, et par suite Z qui y est contenu, sont alors de dimension $\leq r - r - 1$, ce qui est impossible puisque Z est une composante de X_r qui est de dimension $r - r$. Donc X_r est bien un cycle sur V_r . La relation $X_r = \{X_\mu \cdot M_{\mu r}\}_{P^N}$ résulte immédiatement de l'associativité des intersections (F-VII₆, th. 10, cor.); cela donne en particulier $V_r = \{V_\mu \cdot M_{\mu r}\}_{P^N}$. Alors F-VII₆, th. 18 (ii), appliqué à P^N , V_μ , X_μ et $M_{\mu r}$, montre qu'on a $X_r = \{X_\mu \cdot V_r\}_{V_\mu}$. Enfin la dernière assertion résulte immédiatement de F-VIII₂, th. 4, cor. 1.

5. Le lemme 1 ne renseigne sur le cycle $V \cdot L$ que si L est générique sur un corps de définition de V ; mais cela ne nous suffira pas. Soit P'^N l'espace projectif dual de P^N ; si $w = (w_0, \dots, w_N)$ est un point de P'^N , désignons par L_w l'hyperplan défini par $\sum_i w_i X_i = 0$ dans P^N ; nous aurons besoin de con-

naître des conditions suffisantes pour que $V \cdot L_w$ soit une variété, et aussi des conditions suffisantes pour que $V \cdot L_w$ n'ait pas de composantes multiples. Pour $n = 2$, $N = 3$, le théorème classique de KRONECKER-CASTELNUOVO fournit une réponse à la première question, en géométrie algébrique de caractéristique 0. Les résultats que nous obtiendrons seront moins précis, mais suffisants pour notre objet.

Si V est définie sur le corps k , il en est de même de la plus petite variété linéaire L_0 contenant V ; en effet, si on définit V par un idéal homogène dans $k[X_0, \dots, X_N]$, L_0 sera définie en égalant à 0 l'ensemble des formes linéaires appartenant à cet idéal. Le cycle $V \cdot L_w$ est défini ou non suivant que L_w ne contient pas ou contient L_0 , c'est-à-dire suivant que w n'est pas dans la variété linéaire L'_0 duale de L_0 ou est dans L'_0 . Comme L_0 est de dimension $\geq n$, L'_0 est de dimension $\leq N - n - 1$.

Lemme 3. Soit V^n une sous-variété d'un espace projectif P^N ; soit W^m une sous-variété de l'espace projectif P'^N dual de P^N ; soit k un corps de définition de V et de W . Soit $w = (w_0, \dots, w_N)$ un point générique de W par rapport à k ; soit L_w l'hyperplan $\sum_i w_i X_i = 0$ dans P^N . Alors, si $m > N - n + 1$, le cycle $V \cdot L_w$ est défini et est une variété; si $m > N - n$, il est défini et sans composante multiple.

C'est trivial si $n = 0$ ou 1; nous procéderons par récurrence sur n . D'après ce qu'on a vu plus haut, $V \cdot L_w$ est en tout cas défini si $m \geq N - n$; soient

alors Z_1, \dots, Z_r les composantes de $V \cdot L_w$; on a $V \cdot L_w = \sum_{\varrho} a_{\varrho} Z_{\varrho}$; nous devons

montrer que $m > N - n$ entraîne $a_{\varrho} = 1$ pour tout ϱ , et que $m > N - n + 1$ entraîne de plus $r = 1$. C'est vrai pour $m = N$ d'après le lemme 1; donc nous pouvons supposer $m < N$. Soit H un hyperplan de P^N , générique par rapport à $k(w)$, donné par une équation $\sum_i z_i X_i = 0$, où $z = (z_0, \dots, z_N)$ est un point

de P'^N générique sur $k(w)$. D'après le lemme 1, $V \cdot H$ est une variété \bar{V}^{n-1} ; le cycle \bar{V} est rationnel sur $K = k(z)$, donc \bar{V} est définie sur K . D'après le lemme 1, $\bar{Z}_{\varrho} = Z_{\varrho} \cdot H$ est une variété si $n > 2$, une somme de points distincts si $n = 2$. Mais $\bar{L} = L_w \cdot H$ est une variété linéaire, et on a $H \cdot (V \cdot L_w) = (H \cdot V) \cdot L_w = \bar{V} \cdot L_w$, puis $\{\bar{V} \cdot L_w\}_{P^N} = \{\bar{V} \cdot \bar{L}\}_H$ d'après F-VII₆, th. 18, cor.; donc on a, dans H , $\bar{V} \cdot \bar{L} = \sum_{\varrho} a_{\varrho} \bar{Z}_{\varrho}$. Prenant (X_1, \dots, X_N) comme coordonnées

homogènes dans H , soit $\sum_{i=1}^N \bar{w}_i X_i = 0$ l'équation de \bar{L} dans H ; soit \bar{W} le lieu

du point de coordonnées homogènes $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N)$ par rapport à \bar{K} dans un espace projectif de dimension $N - 1$; soit \bar{m} la dimension de \bar{W} . L'hypothèse de récurrence, appliquée à $\bar{V}, \bar{W}, \bar{L}$, montre que $\bar{m} > (N - 1) - (n - 1) = N - n$ entraîne $a_{\varrho} = 1$ pour tout ϱ , et que $\bar{m} > N - n + 1$ entraîne de plus $r = 1$. Pour achever la démonstration, il suffira de faire voir que $\bar{m} = m$. Pour cela, soit w le point $(0, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N)$ dans P'^N ; comme l'équation de \bar{L} peut s'écrire

$$z_0 \left(\sum_{i=0}^N w_i X_i \right) - w_0 \left(\sum_{i=0}^N z_i X_i \right) = 0$$

les points z, w et \bar{w} sont en ligne droite. Soit w' un point générique par rapport à $K(\bar{w})$ de la droite joignant z et \bar{w} ; si \bar{w} avait une dimension $< m$ sur K , w' aurait une dimension $\leq m$ sur K . Comme w est une spécialisation de w' sur $K(\bar{w})$, et a fortiori sur K , et a la dimension m sur K , w et w' seraient alors spécialisations génériques l'un de l'autre sur K , donc w' serait un point du lieu W de w par rapport à K . La droite joignant z et \bar{w} serait par suite contenue dans W ; mais cela ne peut être car on a $m < N$, donc z n'est pas dans W .

Pour $n = 1$, il n'est pas possible d'améliorer les inégalités du lemme 3; le théorème de KRONECKER-CASTELNUOVO rend vraisemblable qu'on pourrait les améliorer pour $n \geq 2$ à condition d'exclure certaines variétés (variétés réglées, variétés de SEGRE, peut-être d'autres).

6. Si V est contenue dans une variété linéaire L_0 de dimension $N' < N$, on peut considérer L_0 comme un espace projectif de dimension N' , et V comme variété plongée dans ce dernier. Il s'ensuit que, dans les questions qui nous occupent ici, on ne diminue pas la généralité en supposant que V n'est contenue dans aucun hyperplan, ni donc dans aucune sous-variété linéaire de P^N autre que P^N ; cela entraîne que $V \cdot L_w$ est défini quel que soit l'hyperplan L_w . Nous ferons souvent cette hypothèse dans ce qui suit.

On sait qu'au moyen de la méthode des «formes associées» (ou «formes de CHOW») on peut associer à tout cycle positif Z de dimension r dans l'espace projectif P^N une forme à $r + 1$ séries d'indéterminées $U_i^{(e)}$ ($0 \leq i \leq N$,

$0 \leq \varrho \leq r$), de degré d par rapport à chacune d'elles si d est le degré de Z ; à la somme de deux cycles correspond le produit des formes associées; et, si on prend les coefficients de la forme associée à Z comme coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif P^M , les points de P^M ainsi associés aux cycles de dimension r et de degré d forment un «ensemble algébrique fermé» $\mathcal{Z}_{N,r,d}$ dans P^M (c'est-à-dire l'union de sous-variétés de P^M en nombre fini), ensemble qui est normalement algébrique sur le corps premier¹⁾; il s'ensuit que les points de P^N correspondant aux cycles positifs de dimension r et de degré d dans P^N qui ne sont pas des variétés (resp. qui ont au moins une composante multiple) forment aussi un ensemble algébrique fermé $\mathcal{Z}'_{N,r,d}$ (resp. $\mathcal{Z}_{N,r,d}$) normalement algébrique sur le corps premier.

Soit alors V^n une variété de degré d dans P^N , non contenue dans un hyperplan; soit $F(U^{(0)}, \dots, U^{(n)})$ la forme associée à V . Soit w un point du dual P'^N de P^N ; soit L_w l'hyperplan de P^N correspondant à w . Il résulte des définitions que la forme associée au cycle $V \cdot L_w$ est $F(w, U^{(0)}, \dots, U^{(n-1)})$, forme qui n'est pas identiquement nulle puisque $V \cdot L_w$ est défini, et dont les coefficients sont les coordonnées homogènes d'un point de $\mathcal{Z}_{N,n-1,d}$. Les points w de P'^N tels que ce dernier point soit dans $\mathcal{Z}'_{N,n-1,d}$ (resp. dans $\mathcal{Z}_{N,n-1,d}$) forment par conséquent un ensemble algébrique fermé, normalement algébrique sur le plus petit corps de définition de V ; le lemme 3 montre alors que ces composantes sont de dimension $\leq N - n + 1$ (resp. $\leq N - n$). Autrement dit:

Lemme 4. *Soit V^n une sous-variété de l'espace projectif P^N , non contenue dans un hyperplan. Pour tout point w du dual P'^N de P^N , soit L_w l'hyperplan $\sum w_i X_i = 0$. Soit \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}') l'ensemble des points w de P'^N tels que le cycle $V \cdot L_w$ ne soit pas une variété (resp. ait une composante multiple). Alors \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont des ensembles algébriques fermés dans P'^N , normalement algébriques sur tout corps de définition de V ; et les composantes de \mathcal{R} (resp. de \mathcal{R}') sont de dimension $\leq N - n + 1$ (resp. $\leq N - n$).*

7. Les lemmes suivants sont destinés à rendre plus maniable la notion de diviseurs «continuum équivalent», ou, comme nous dirons plutôt, algébriquement équivalents. Je dois à MAX ROSENBLICH la démonstration du lemme 5.

Lemme 5. *Soient a, b (resp. a', b') deux points sur une courbe C (resp. C'). Alors il existe, sur la surface $C \times C'$, une courbe passant par les points $a \times a'$ et $b \times b'$.*

Soient \bar{C}, \bar{C}' des courbes complètes sans points multiples, birationnellement équivalentes respectivement à C et à C' ; on pourra écrire $C = f(\bar{C})$, $C' = f'(\bar{C}')$; \bar{C} et \bar{C}' étant complètes, il y aura des points \bar{a}, \bar{b} sur \bar{C} , \bar{a}', \bar{b}' sur \bar{C}' tels que $a = f(\bar{a})$, $b = f(\bar{b})$, $a' = f'(\bar{a}')$, $b' = f'(\bar{b}')$; alors, si on construit sur $\bar{C} \times \bar{C}'$ une courbe passant par $\bar{a} \times \bar{a}'$ et $\bar{b} \times \bar{b}'$, son image par (f, f') satisfera aux conditions

¹⁾ Rappelons qu'un ensemble algébrique fermé ("bunch of Varieties" dans la terminologie de F.VII) est dit algébrique sur k si toutes ses composantes le sont, et normalement algébrique sur k si de plus celles-ci sont permutées entre elles par tout automorphisme de \bar{k} laissant invariants tous les éléments de k .

du lemme. Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas où C, C' sont complètes sans points multiples. En vertu du théorème de RIEMANN-ROCH, il existe alors sur C une fonction φ non constante, sans pôle en dehors de a et ne s'annulant pas en b ; on peut en effet choisir une telle fonction parmi celles qui ont en a un pôle d'ordre N , dès que N est assez grand. En multipliant φ par une constante, on peut supposer $\varphi(b) = 1$. Soit de même φ' une fonction non constante sur C' , sans pôle en dehors de a' et telle que $\varphi'(b') = 1$. Sur $C \times C'$, soit ψ la fonction définie par

$$\psi(M \times M') = \varphi(M) - \varphi'(M')$$

pour $M \neq a, M' \neq a'$; on a $\psi(b \times b') = 0$. Soit D une composante passant par $b \times b'$ du diviseur $(\psi)_0$ des zéros de ψ ; on va montrer que D passe par $a \times a'$. En effet, comme φ' n'est pas constante, ψ n'induit pas la constante 0 sur $b \times C'$, donc on a $D \neq b \times C'$; par suite D coupe toute courbe $P \times C'$, quel que soit P sur C , en un point au moins. Mais, si a'' est un point de C' autre que a' , φ' y est définie et $\neq \infty$; la relation

$$\psi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot (1 - \varphi^{-1} \varphi')^{-1}$$

montre alors que ψ est définie et a la valeur ∞ en $a \times a''$, donc $a \times a''$ ne peut être sur D . Par suite D coupe $a \times C'$ au seul point $a \times a'$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 6. Soit P un point d'une variété (abstraite) W , définie sur un corps k ; soit M un point générique de W par rapport à $k(P)$. Alors il existe sur W une courbe passant par M et P , ayant en M un point simple; si de plus P est simple sur W , il existe une telle courbe ayant en P un point simple.

Comme M a un représentant sur tout représentant de W , on peut passer à un représentant de W sur lequel P ait un représentant; autrement dit, il suffit de se placer dans le cas où W est une variété affine. Soient n la dimension de W , S^N l'espace affine ambiant; par une translation, on peut amener P en 0; la nouvelle variété W ainsi déduite de l'ancienne sera définie sur $K = k(P)$. Soit L la variété linéaire de dimension $N - n + 1$ définie par

$$\sum_{j=1}^N u_{ij} X_j = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1), \text{ les } u_{ij} \text{ étant } N(n-1) \text{ variables indépendantes}$$

sur K ; soit C une composante de $W \cap L$ passant par 0; si 0 est simple sur W , L est transversale à W en 0, donc C est unique, de dimension 1, et 0 est simple sur C ; en tout cas C est de dimension $d \geq 1$, et est définie sur la clôture algébrique \bar{K}' de $K' = K(u)$; soit $x = (x_1, \dots, x_N)$ un point générique de C par rapport à \bar{K}' . Comme $x \neq 0$, on peut supposer par exemple $x_1 \neq 0$, d'où

$$u_{i1} = - \sum_{h=2}^N u_{ih} x_h / x_1 \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Donc $K(u, x)$ est de dimension $\leq (n-1)(N-1)$ sur $K(x)$, et par suite de dimension $\leq (n-1)(N-1) + v$ sur K si v est la dimension de x sur K . Comme d'autre part $K(u, x)$ est de dimension d sur $K(u)$, donc de dimension $d + (n-1)N$ sur K , on aura $(n-1)(N-1) + v \geq d + (n-1)N$, donc $v \geq d + n - 1$. Comme $d \geq 1$ et $v \leq n$, on a donc $d = 1$ et $v = n$; autrement dit, C est une courbe, et x est générique sur W par rapport à K . Comme M

est aussi générique sur W par rapport à K , il y a donc un isomorphisme σ de $\bar{K}'(x)$ sur une extension de $\bar{K}(M)$ transformant x en M et laissant invariants les éléments de \bar{K} . La courbe C^σ satisfait aux conditions de l'énoncé.

8. Lemme 7. Soient V une variété, W une variété complète, et B un sous-ensemble algébrique fermé de $V \times W$, algébrique (resp. normalement algébrique) sur un corps commun de définition k de V et de W . Soit B_r l'ensemble des points M de V tels $B \cap (M \times W)$ ait au moins une composante de dimension $\geq r$. Alors B_r est un sous-ensemble algébrique fermé de V , algébrique (resp. normalement algébrique) sur k ; et, si Z' est une variété de dimension m contenue dans B_r , il y a une variété Z de dimension $\geq m + r$ contenue dans B et ayant la projection Z' sur V .

Si on suppose le résultat établi pour B algébrique sur k , et que de plus B soit normalement algébrique sur k , il est clair que B_r sera invariant par tout automorphisme de \bar{k} laissant invariants les éléments de k . Il suffit donc de faire la démonstration pour B algébrique sur k . Comme W est complète, l'ensemble B' des points de V projections sur V de points de B est algébrique fermé dans V (d'après F-VII₄, prop. 10 et 11); on procédera par récurrence sur la plus grande des dimensions des composantes de B' ; si celle-ci est 0, le résultat est trivial; on l'admettra donc pour le cas où toutes les composantes de B ont sur V une projection de dimension $< d$, et tout revient alors à faire la démonstration pour le cas où B se réduit à une seule variété X ayant sur V une projection X' de dimension d ; soit $d + m$ la dimension de X . Pour $r \leq m$, le résultat est vrai d'après F-VII₄, prop. 8, 10 et 11; pour le démontrer dans le cas $r \geq m + 1$, on va construire un sous-ensemble algébrique fermé B'' de X' algébrique sur k , ayant toutes ses composantes de dimension $< d$ et tel que $B'_{m+1} \subset B''$, donc $B_r \subset B''$ pour tout $r \geq m + 1$; cela fait, l'application de l'hypothèse de récurrence à $X \cap (B'' \times W)$ suffira pour achever la démonstration. Pour construire B'' , il suffit de considérer séparément chaque représentant de la variété (abstraite) V , donc de faire la démonstration pour le cas où V est une variété affine. Soient W_α ($1 \leq \alpha \leq A$) les représentants de W tels que X ait un représentant dans $V \times W_\alpha$; soit (x, y) un point générique de X par rapport à \bar{k} ; soit (x, y_α) son représentant sur $V \times W_\alpha$; soit $z = (y_1, \dots, y_A)$; alors z est de dimension m sur $k(x)$; quels que soient z_0, \dots, z_m pris parmi les coordonnées de z , il y aura un polynôme $P \in k[X, Z_0, \dots, Z_m]$ tel que $P(x, Z) \neq 0$ et $P(x, z) = 0$; il y a alors, parmi les coefficients de $P(X, Z)$ considéré comme polynôme en Z_0, \dots, Z_m à coefficients dans $k[X]$, un coefficient $F \in k[X]$ tel que $F(x) \neq 0$; pour tout choix de $m + 1$ coordonnées parmi les coordonnées de z , choisissons un tel polynôme F , et soit Φ le produit de tous les polynômes F ainsi obtenus; on aura $\Phi(x) \neq 0$. Montrons qu'on peut prendre pour B'' l'ensemble des points de X' satisfaisant à $\Phi(X) = 0$. En effet, si x' est dans B'_{m+1} , il y a par hypothèse un point (x', y') de X ayant au moins la dimension $m + 1$ sur $k(x')$; y' aura au moins un représentant y'_α qui soit de dimension $\geq m + 1$ sur $k(x')$; z aura une spécialisation z' sur $(x, y_\alpha) \rightarrow (x', y'_\alpha)$ par rapport à k , et il y aura, parmi les coordonnées de z' , $m + 1$ coordonnées algébriquement indépendantes sur $k(x')$; comme elles doivent satisfaire à la relation correspondante $P(x', z') = 0$, x' devra donc

annuler tous les coefficients de $P(X, Z)$ considéré comme polynôme en Z , donc en particulier le polynôme F appartenant au choix en question de $m + 1$ coordonnées de z , et par suite aussi le polynôme Φ .

Corollaire 1. Soient V^n et W deux variétés, et Z^{n+r} une sous-variété de $V \times W$ ayant la projection V sur V ; soit k un corps de définition commun pour V , W et Z . Il existe alors un sous-ensemble algébrique fermé B de V , normalement algébrique sur k , distinct de V , tel que $Z \cap (M \times W)$ n'ait que des composantes de dimension r chaque fois que le point M de V n'est pas dans B .

D'après F-VII₄, prop. 8, toute composante de $Z \cap (M \times W)$ a au moins la dimension r quel que soit M sur V . Supposons d'abord W complète; alors, d'après le lemme 7, il y a un sous-ensemble B de V , normalement algébrique sur k , dont les points soient les points M de V tels que $Z \cap (M \times W)$ ait au moins une composante de dimension $\geq r + 1$; si on avait $B = V$, alors, d'après le lemme 7, il y aurait une sous-variété de Z de dimension $\geq n + r + 1$, ce qui n'est pas le cas; donc $B \neq V$. Si maintenant W est une variété affine, on peut compléter l'espace où elle se trouve plongée en un espace projectif, donc considérer W comme partie ouverte d'une variété complète W^* (c'est-à-dire comme complément sur W^* d'un sous-ensemble algébrique fermé de W^*); le lieu par rapport à k sur $V \times W^*$ d'un point générique de Z par rapport à k sera alors une sous-variété Z^* de $V \times W^*$; appliquant à V , W^* et Z^* ce qui précède, on obtient B tel que $Z^* \cap (M \times W^*)$ n'ait que des composantes de dimension r quand M n'est pas dans B ; mais alors $Z \cap (M \times W)$ n'a à plus forte raison que des composantes de dimension r . Enfin, si W est une variété abstraite quelconque, soient W_α ceux de ses représentants pour lesquels Z a un représentant Z_α sur $V \times W_\alpha$; pour chaque α , soit B_α un sous-ensemble algébrique fermé de V , normalement algébrique sur k , distinct de V , tel que $Z_\alpha \cap (M \times W_\alpha)$ n'ait pas de composante de dimension $> r$ quand M n'est pas dans B_α . Alors la réunion B des B_α satisfait aux conditions du corollaire.

Corollaire 2. Soient V et W des variétés définies sur un corps k ; soit Z un cycle sur $V \times W$, rationnel par rapport à k . Il existe un sous-ensemble algébrique fermé B de V , normalement algébrique sur k , distinct de V , tel que le cycle $Z \cdot (M \times W)$ soit défini pour tout point M de V qui n'est pas dans B .

Par linéarité, et en remplaçant k par \bar{k} , on voit qu'il suffit de considérer le cas où Z est une variété. Si la projection Z' de Z sur V n'est pas V , $Z \cdot (M \times W)$ est défini et égal à 0 chaque fois que M n'est pas dans Z' . Si $Z' = V$, on est ramené au coroll. 1.

Corollaire 3. Soient V^n et W des variétés, et X^n une sous-variété de $V \times W$ ayant la projection V sur V . Alors les sous-variétés de X de dimension $n - 1$ ayant sur V une projection de dimension $< n - 1$ sont en nombre fini; et, si k est un corps de définition de V , W et X , la réunion de ces variétés est normalement algébrique sur k .

En prenant des représentants de W , on se ramène au cas où W est une variété affine; en complétant l'espace affine en un espace projectif, on se ramène au cas où W est complète. Soit alors Y une sous-variété de X de dimension $n - 1$ dont la projection Y' sur V ait une dimension $< n - 1$; d'après F-VII₄, prop. 8,

10 et 11, si M est un point de Y' , $Y \cap (M \times W)$ est non vide et a ses composantes de dimension ≥ 1 ; donc Y' est contenu dans l'ensemble B' des points M de V tels que $X \cap (M \times W)$ ait au moins une composante de dimension ≥ 1 . D'après le lemme 7, B' est un sous-ensemble algébrique fermé de V , normalement algébrique sur k ; et on a $B' \neq V$, car d'après le même lemme, si on avait $B' = V$, il y aurait une sous-variété de X de dimension $\geq n + 1$. Il s'ensuit que $X \cap (B' \times W)$ est un sous-ensemble algébrique fermé de X , distinct de X , normalement algébrique sur k ; comme Y y est contenue, Y est une composante de cet ensemble. Les Y sont donc bien en nombre fini; la dernière assertion du lemme est évidente.

9. Le coroll. 3 ci-dessus est utile dans la théorie des correspondances birationnelles; le coroll. 2 est utile dans l'étude des familles algébriques de cycles sur une variété. Dans cette dernière étude, nous conviendrons d'adopter les notations suivantes. Soient V, W des variétés (abstraites) et Z un cycle sur $V \times W$; une fois pour toutes, nous désignerons par $Z(M)$ le cycle sur V défini par $Z(M) \times M = Z \cdot (V \times M)$, chaque fois que M est un point simple de W tel que $Z \cdot (V \times M)$ soit défini. Le coroll. 2 du lemme 7 dit que $Z(M)$ est défini chaque fois que M n'est pas dans un certain sous-ensemble algébrique fermé de W , distinct de W . Soient X une composante de Z , et X' sa projection sur W . Si $Z \cdot (V \times M)$ est défini, $X \cdot (V \times M)$ doit l'être. Mais, d'après F-VII₄, prop. 8, toute composante de $X \cap (V \times M)$ a au moins la dimension $\dim(X) - \dim(X')$; si elle est simple sur $V \times W$, il faut, pour qu'elle soit propre, qu'elle soit de dimension $\dim(X) - \dim(W)$; on doit donc avoir $X' = W$. Soit Z_0 le cycle ayant pour composantes celles des composantes de Z qui ont la projection W sur W , avec les coefficients qu'elles ont respectivement dans Z ; $Z_0(M)$ est défini quand $Z(M)$ est défini, et on a alors $Z_0(M) = Z(M)$. Par suite, chaque fois qu'il s'agit de cycles de la forme $Z(M)$, on peut supposer, sans diminuer la généralité, que toutes les composantes de Z ont la projection W sur W ; cela implique, bien entendu, que la dimension de Z est au moins égale à celle de W .

Lemme 8. Soient V et W des variétés, W' une sous-variété simple de W , et Z un cycle sur $V \times W$. Soient Z_h les composantes de Z , a_h leurs coefficients dans Z ; soient Z'_h toutes les composantes propres distinctes de $Z_h \cap (V \times W')$ ayant la projection W' sur W . Posons

$$Z' = \sum_{h, h'} i(Z_h \cdot (V \times W'), Z'_{h'}; V \times W) a_h Z'_{h'}.$$

Alors Z' est un cycle sur $V \times W'$; si k est un corps de définition de V, W et W' , par rapport auquel Z soit rationnel, Z' est rationnel par rapport à k ; et, chaque fois que M est un point de W' , simple sur W et sur W' , tel que $Z(M)$ soit défini, $Z'(M)$ est aussi défini et est égal à $Z(M)$.

On notera que, dans cet énoncé, $Z(M)$ et $Z'(M)$ sont définis respectivement par les relations

$$Z(M) \times M = \{Z \cdot (V \times M)\}_{V \times W}, \quad Z'(M) \times M = \{Z' \cdot (V \times M)\}_{V \times W'}.$$

La rationalité de Z' sur k est une conséquence immédiate de F-VI₂, th. 4. Quant au reste, il suffit, par linéarité, de faire la démonstration quand Z

est une variété. Si Z n'a pas la projection sur W , $Z \cdot (V \times M)$ est 0 quand il est défini; si une composante Z'_s de $Z \cap (V \times W')$ a la projection W' sur W , W' doit être contenue dans la projection de Z sur W ; mais alors F-VII₄, prop. 8, montre que Z'_s ne peut être propre; donc en ce cas on a $Z' = 0$, et le lemme est vérifié. Supposons donc que Z ait la projection W sur W ; soient m , m' et $m + r$ les dimensions respectives de W , W' et Z . Soit M un point de W' , simple sur W , tel que $Z(M)$ soit défini; soit X une composante de $Z \cdot (V \times M)$, c'est-à-dire une composante de $Z \cap (V \times M)$ simple sur $V \times W$; X a la dimension r . Soit T une composante de $Z \cap (V \times W')$ contenant X ; alors T est simple sur $V \times W$, et a donc (F-VI₁, th. 1, cor. 1) une dimension $s \geq m' + r$. Si X' est une composante de $T \cap (V \times M)$ contenant X , X' sera contenu dans Z et dans $V \times M$, donc on a $X' = X$; par suite X est une composante de $T \cap (V \times M)$. Soit T' la projection de T sur W ; soit t sa dimension; d'après F-VII₄, prop. 8, la dimension de X est $\geq s - t$; on a donc $r \geq s - t$, d'où $t \geq s - r \geq m'$. Mais on a $T' \subset W'$, donc $t \leq m'$, d'où $t = s - r = m'$ et $T' = W'$; par conséquent, T est l'une des variétés Z'_s ; si on suppose de plus que M est simple sur W' , X sera simple sur $V \times W'$ (F-IV₆, th. 13, cor. 1) et sera composante propre de $T \cap (V \times M)$ sur $V \times W'$. Toute composante de $Z \cdot (V \times M)$ est donc, dans ces conditions, composante propre de l'une des intersections $Z'_s \cap (V \times M)$ sur $V \times W'$. Réciproquement, soit T l'une des Z'_s ; T est simple sur $V \times W$, donc a sur V une projection qui est simple sur V , et est donc simple sur $V \times W'$ (F-IV₄, th. 13, cor. 1), ce qui montre déjà que Z' est un cycle sur $V \times W'$. Soit encore M un point de W' , simple sur W et sur W' ; soit X' une composante de $T \cap (V \times M)$, simple sur $V \times W'$; comme T , composante propre de $Z \cap (V \times W')$ sur $V \times W$, a la dimension $m' + r$, X' a au moins la dimension r ; de plus, toujours d'après F-IV₆, th. 13, cor. 1, X' est simple sur $V \times W$; donc toute composante de $Z \cap (V \times M)$ contenant X' est simple sur $V \times W$, donc propre si $Z \cdot (V \times M)$ est défini, et par suite est alors de dimension r . Si donc on suppose M tel que $Z \cdot (V \times M)$ soit défini, X' en est une composante; et on a montré en même temps que, dans ce cas, $\{T \cdot (V \times M)\}_{V \times W'}$ est défini. En définitive, on a donc montré que, chaque fois que M est un point de W' , simple sur W et sur W' , et que $Z \cdot (V \times M)$ est défini sur $V \times W$, $Z' \cdot (V \times M)$ est défini sur $V \times W'$, et que ces deux cycles ont mêmes composantes; il ne reste donc plus qu'à vérifier que celles-ci ont même coefficient dans les deux cycles; c'est ce qui résulte immédiatement de l'application de F-VI₃, th. 9, à $V \times W$, $V \times W'$, $V \times M$ et Z , compte tenu de ce qu'on a démontré plus haut.

10. Soit V^n une variété (abstraite); soit r un entier $< n$, qui, dans les applications que nous aurons à faire de ceci par la suite, aura toujours la valeur $n - 1$. On va désigner par \mathfrak{G}_a , \mathfrak{G}'_a , \mathfrak{G}''_a , \mathfrak{G}^*_a quatre ensembles de cycles de dimension r sur V , définis comme suit. Soit W^m une variété (abstraite) quelconque; soit Z^{m+r} un cycle sur $V \times W$; si M , N sont deux points simples de W tels que $Z(M)$ et $Z(N)$ soient définis, considérons sur V le cycle $X = Z(N) - Z(M)$. Par \mathfrak{G}_a , nous entendons l'ensemble des cycles qu'on peut obtenir ainsi sur V , pour tous les choix de W , Z , M et N satisfaisant aux conditions ci-dessus. Par \mathfrak{G}'_a (resp. \mathfrak{G}''_a) nous entendons l'ensemble des

cycles X qu'on obtient ainsi lorsqu'on impose de plus à W d'être une courbe (resp. la jacobienne d'une courbe). Par \mathfrak{S}_a^* nous entendrons le sous-groupe du groupe additif des cycles de dimension r sur V qui est engendré par les éléments de \mathfrak{S}_a .

Lemme 9. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}'_a = \mathfrak{S}''_a = \mathfrak{S}_a^*.$$

Montrons d'abord que \mathfrak{S}_a^* est engendré par les éléments de \mathfrak{S}'_a , ou autrement dit que \mathfrak{S}_a est contenu dans le groupe engendré par \mathfrak{S}'_a . En effet, les notations étant comme ci-dessus, soit $Z(N) - Z(M)$ un élément de \mathfrak{S}_a ; soit k un corps de définition de V et W , par rapport auquel Z soit rationnel; soit P un point générique de W par rapport à $k(M, N)$. D'après F.VII₆, th. 12 (i), $Z(P)$ est défini; comme on a

$$Z(N) - Z(M) = (Z(N) - Z(P)) - (Z(M) - Z(P)),$$

il suffira, pour justifier notre assertion, de faire voir que $Z(M) - Z(P)$ est dans \mathfrak{S}'_a ; car alors il s'ensuivra de même que $Z(N) - Z(P)$ est dans \mathfrak{S}'_a . Or, d'après le lemme 6 du n° 7, il y a sur W une courbe C passant par M et P et ayant en M et P des points simples; d'après le lemme 8 du n° 9, il y a alors sur $V \times C$ un cycle Z' tel que $Z'(M) = Z(M)$, $Z'(P) = Z(P)$. On a donc bien $Z(M) - Z(P) \in \mathfrak{S}'_a$. On va montrer maintenant que $\mathfrak{S}'_a = \mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}_a^*$. Soient donc C, C' deux courbes, Z^{r+1} un cycle sur $V \times C$, Z'^{r+1} un cycle sur $V \times C'$, M et N deux points simples sur C et M' et N' deux points simples sur C' tels que $Z(M), Z(N), Z'(M'), Z'(N')$ soient définis; posons

$$X = Z(N) - Z(M), \quad X' = Z'(N') - Z'(M').$$

D'après le lemme 5 du n° 7, il y aura sur $C \times C'$ une courbe D passant par $M \times M'$ et $N \times N'$; D est birationnellement équivalente à une courbe complète Γ sans point multiple, de sorte qu'on peut écrire $D = f(\Gamma)$, f étant une fonction définie sur Γ , à valeurs dans $C \times C'$; il y a alors deux points P, Q sur Γ tels que $f(P) = M \times M'$, $f(Q) = N \times N'$. Soit G la courbe dans $(C \times C') \times \Gamma$ qui se déduit du graphe de f dans $\Gamma \times (C \times C')$ par permutation des deux facteurs $\Gamma, C \times C'$; c'est une courbe sans point multiple qui passe par $M \times M' \times P$ et par $N \times N' \times Q$. Soit $U = Z \times C' \times \Gamma$; soit U' le cycle sur $V \times C \times C' \times \Gamma$ qui se déduit du cycle $Z' \times C \times \Gamma$ sur $V \times C' \times C \times \Gamma$ par permutation des facteurs C, C' dans ce dernier produit. Il est immédiat que l'on a $Z(M) = U(M \times M' \times P)$, $Z'(M') = U'(M \times M' \times P)$, et de même pour $Z(N), Z'(N')$; en posant $T = U - U'$, on aura donc :

$$X - X' = T(N \times N' \times Q) - T(M \times M' \times P).$$

D'après le lemme 8 du n° 9, il y a alors un cycle T' sur $V \times G$ tel que les deux termes du second membre soient égaux respectivement à $T'(N \times N' \times Q)$ et $T'(M \times M' \times P)$; on a donc bien $X - X' \in \mathfrak{S}'_a$. Il reste à faire voir que $\mathfrak{S}'_a \subset \mathfrak{S}_a^*$. Pour cela, soient C une courbe, Z^{r+1} un cycle sur $V \times C$, et M, N deux points simples de C tels que $Z(M), Z(N)$ soient définis; posons $X = Z(N) - Z(M)$. En remplaçant au besoin C par une courbe qui lui soit birationnellement

équivalente, on peut la supposer complète et sans point multiple; soit g son genre. Supposons d'abord $g \neq 0$; soit J la jacobienne de C ; soit f la fonction canonique sur C , à valeurs dans J ; soit k un corps de définition pour V , C , f et J , par rapport auquel Z soit rationnel. Soient M_1, \dots, M_g g points génériques indépendants sur C par rapport à k (M, N); soit $x = \sum_{i=1}^g f(M_i)$; avec les notations de VA, n° 4, on a $k(x) = k(M_1, \dots, M_g)$ (VA, n° 37, th. 18). Soit $m = \sum_{i=1}^g M_i$; c'est un diviseur sur C , rationnel sur $k(x)$ (VA, n° 4, lemme 1). On a $Z(M_i) = pr_V[Z \cdot (V \times M_i)]$, donc

$$\sum_{i=1}^g Z(M_i) = pr_V[Z \cdot (V \times m)];$$

le premier membre est donc un cycle rationnel sur $k(x)$. D'après F-VII₆, th. 12 (iii), il y a alors un cycle U^{r+s} sur $V \times J$, rationnel sur k , dont toutes les composantes aient la projection J sur J et tel que $U(x) = \sum_{i=1}^g Z(M_i)$. Soit $x_0 = \sum_{j=2}^g f(M_j)$, $f' = f + x_0$, et $C' = f'(C)$; f' détermine une correspondance birationnelle partout birégulière entre C et C' , définie sur le corps $k(M_2, \dots, M_g)$ (VA, n° 40). D'après le lemme 8 du n° 9, il y a un cycle U' sur $V \times C'$ tel que $U'[f'(P)] = U[f(P)]$ pour tout point P sur C pour lequel $U[f'(P)]$ est défini, et on peut (n° 9) supposer que toutes les composantes de U' ont la projection C' sur C' . En particulier, on a $f'(M_1) = x$, donc

$$U'[f'(M_1)] = Z(M_1) + \sum_{j=2}^g Z(M_j);$$

comme M_1 est générique sur C par rapport à $k(M_2, \dots, M_g)$, ceci implique, d'après F-VII₆, th. 12 (ii), que, si on identifie C et C' au moyen de f' , U' ne diffère de $Z + (\sum_{j=2}^g Z(M_j)) \times C$ que par des composantes dont la projection sur C n'est pas C ; par suite, M étant tel, par hypothèse, que $Z(M)$ soit défini, on a

$$U'[f'(M)] = Z(M) + \sum_{j=2}^g Z(M_j),$$

et de même pour $U'[f'(N)]$, d'où

$$X = Z(N) - Z(M) = U'[f'(N)] - U'[f'(M)]$$

et enfin $X = U[f'(N)] - U[f'(M)]$ pourvu que les deux termes du second membre soient définis. Pour vérifier ce dernier point, observons que, d'après

VA, n° 39, le point $w = f'(M) = f(M) + \sum_{j=2}^g f(M_j)$ a, par rapport au corps $K = k(M)$, un lieu W de dimension $g - 1$. Supposons que U ait une composante U_0 telle que $U_0 \cdot (V \times w)$ ne soit pas défini; soit $Q \times w$ un point générique, par rapport à la clôture algébrique de $K(w)$, d'une composante de $U_0 \cap (V \times w)$ de dimension $> r$; Q aura donc sur $K(w)$ une dimension $\geq r + 1$, et le lieu

de $Q \times w$ par rapport à \bar{K} sera une sous-variété de U_0 de dimension $\geq r + g$; ce lieu n'est donc autre que U_0 , et par suite U_0 a la projection W sur J , contrairement à la définition de U . De même $U[f'(N)]$ est défini, ce qui achève la démonstration de $X \in \mathfrak{G}_a''$ dans le cas $g \neq 0$. Soit enfin $g = 0$; C est alors la droite projective. Soit A une courbe de genre 1, qu'on peut identifier avec sa propre jacobienne. Soit f une fonction non constante sur A , à valeurs dans la droite projective D ; soit k un corps de définition pour V, A, f , par rapport auquel Z soit rationnel. Soit Γ le graphe de f dans $A \times C$; soient P, Q des points de A tels que $f(P) = M, f(Q) = N$. Soit T le cycle sur $V \times A \times C$ qui se déduit de $Z \times A$ sur $V \times C \times A$ par permutation des facteurs C et A ; il est immédiat qu'on a $T(P \times M) = Z(M), T(Q \times N) = Z(N)$; de plus, d'après le lemme 8 du n° 9, il y a un cycle T' sur $V \times \Gamma$ tel que $T'(P \times M) = T(P \times M)$ et $T'(Q \times N) = T(Q \times N)$, d'où $X = T'(Q \times N) - T'(P \times M)$. Comme on peut identifier Γ avec A au moyen de la projection de Γ sur A , qui est une correspondance birationnelle partout birégulière entre Γ et A , ceci achève la démonstration.

11. Les notations étant celles du début du n° 10, on se bornera désormais à considérer le cas où V^n est une variété complète, sans sous-variété multiple de dimension $n - 1$, et où $r = n - 1$; d'après le lemme 9, \mathfrak{G}_a est alors un sous-groupe du groupe des diviseurs sur V ; on dira que deux diviseurs sur V sont algébriquement équivalents s'ils appartiennent à une même classe suivant \mathfrak{G}_a . On désignera d'autre part par \mathfrak{G}_t le groupe des diviseurs sur V de la forme (f) , où f est une fonction sur V (autre que la constante 0 ou la constante ∞); on dit que deux diviseurs X, Y sur V sont linéairement équivalents si $X - Y \in \mathfrak{G}_t$, ce qu'on écrira aussi $X \sim Y$. Si $X = (f)$, on a $X = (f)_0 - (f)_\infty$, $(f)_c$ étant défini pour tout c par $(f)_c \times c = \Gamma \cdot (V \times c)$, où Γ est le graphe de f (cf. F-VIII₂); ceci montre qu'alors $X \in \mathfrak{G}_a$, donc que $\mathfrak{G}_t \subset \mathfrak{G}_a$. Plus généralement, il résulte de F-VIII₂, th. 5, que si D est la droite projective, et Z un diviseur sur $V \times D$, on a $Z(b) - Z(a) \sim 0$ chaque fois que a, b sont des points de D tels que $Z(a), Z(b)$ soient définis.

Soit Z un diviseur sur $V \times W$; toute composante de Z qui a sur W une projection W' autre que W est nécessairement $V \times W'$. Comme au début du n° 9, soit Z_0 le diviseur obtenu en supprimant, dans l'expression réduite de Z , tous les termes correspondant à de telles composantes; soit Z_1 le diviseur obtenu en supprimant, dans l'expression réduite de Z_0 , tous les termes de la forme $m \cdot (V' \times W)$, où V' est une sous-variété de V . On aura donc $Z_0 - Z_1 = X \times W$, où X est un diviseur sur V . Comme on a vu, on a $Z_0(M) = Z(M)$ chaque fois que $Z(M)$ est défini; et on a, chaque fois que $Z_0(M)$ est défini, $Z_1(M) = Z_0(M) - X$. Par suite, chaque fois que $Z(M), Z(N)$ sont définis, on a $Z_1(N) - Z_1(M) = Z(N) - Z(M)$. Autrement dit, quand on considère sur V un diviseur de la forme $Z(N) - Z(M)$, on peut toujours supposer que Z est un diviseur sur $V \times W$ sans composantes de la forme $V \times W'$ ni $V' \times W$; un tel diviseur sera dit réduit. En particulier, si C est une courbe et Z un diviseur réduit sur $V \times C$, il résulte de F-VII₆, prop. 16, que $Z(M)$ est défini quel que soit M sur C ; d'ailleurs, comme on l'a déjà remarqué, on ne restreint

pas en ce cas la généralité en supposant que C est une courbe complète sans point multiple. Donc :

Lemme 10. *Tout diviseur algébriquement équivalent à 0 sur V est de la forme $Z(N) - Z(M)$, où Z est un diviseur réduit sur le produit $V \times C$ de V et d'une courbe complète C sans point multiple, et où M, N sont deux points de C .*

II. Le premier critère d'équivalence.

Dans les §§ II—III, on désignera par $V = V^n$ une sous-variété de l'espace projectif $P = P^N$, non contenue dans un hyperplan, et sans sous-variété multiple de dimension $n - 1$.

12. Théorème 2. (i) Supposons $n \geq 2$; soient X un diviseur sur V , et k un corps de définition de V par rapport auquel X soit rationnel; soit L un hyperplan générique par rapport à k ; soit $W = V \cdot L$; soit $Y = \{X \cdot L\}_P = \{X \cdot W\}_V$. Alors $X \sim 0$ sur V entraîne $Y \sim 0$ sur W . (ii) Si X, Y, W sont définis comme dans (i), et si $n \geq 3$ ou bien si $n = 2$ et s'il existe un entier $m \neq 0$ tel que $mX \sim 0$, alors $Y \sim 0$ sur W entraîne $X \sim 0$ sur V . (iii) Si $n = 2$, il existe des courbes Γ_i sur V en nombre fini telles que, si X, Y, W sont comme dans (i), $Y \sim 0$ sur W entraîne que X satisfait à une relation $X \sim \sum_i m_i \Gamma_i$, les m_i étant des entiers.

L'assertion (i) est contenue dans le coroll. 2 du lemme 2, n° 4. Supposons donc réciproquement que $Y \sim 0$ sur W . Soient (u'_0, \dots, u'_N) , (u''_0, \dots, u''_N) $2N + 2$ variables indépendantes sur k ; soit t une variable sur $K = k(u', u'')$; posons $u_i = u'_i - tu''_i$ et :

$$L'(X) = \sum_i u'_i X_i, \quad L''(X) = \sum_i u''_i X_i, \quad L(X) = L'(X) - t L''(X) = \sum_i u_i X_i.$$

Comme le corps $k(u, u', t) = k(u', u'', t)$ est de dimension $2N + 3$ sur k , les u_i, u'_i et t sont $2N + 3$ variables indépendantes sur K . En particulier, on peut supposer qu'on a pris pour L (dans l'énoncé du th. 2) l'hyperplan $L(X) = 0$. Posons $R(X) = L'(X)/L''(X)$; R est une fonction sur P ayant $K = k(u', u'')$ pour corps de définition, à valeurs dans la droite projective D , et définie en tout point de P sauf sur la variété linéaire M de dimension $N - 2$ définie par $L'(X) = 0, L''(X) = 0$. Comme V et les composantes de X sont algébriques sur k et que W et les composantes de Y le sont sur $k(u)$, le lemme 1 du n° 3 montre qu'aucune de ces variétés ne peut être contenue dans l'hyperplan $L'(X) = 0$ qui est générique sur $k(u)$, ni a fortiori dans M . Soit alors Q la variété (non complète) qu'on obtient en enlevant M de P ; la fonction R est partout définie sur Q ; soit Q' son graphe dans $Q \times D$; la projection de Q' sur Q est une correspondance birationnelle T partout birégulière entre Q' et Q , définie sur le corps K ; soient L', V', W', X', Y' les variétés et cycles sur Q' qui correspondent à L, V, W, X, Y par la réciproque de T . Il est immédiat (par exemple en vertu du critère de multiplicité 1) que, si z est le point de D de coordonnées homogènes (z', z'') , $Q' \cdot (Q \times z)$ est la sous-variété de Q' à laquelle correspond par T , dans Q , la variété définie par

$$z' L'(X) - z'' L''(X) = 0;$$

en particulier, on a $L' = Q' \cdot (Q \times t)$. Comme T est birégulière, on a :

$$W' = \{V' \cdot L'\}_{Q'}, \quad Y' = \{X' \cdot L'\}_{Q'} = \{X' \cdot W'\}_{V'}.$$

d'où, d'après F-VII₆, th. 18 (ii):

$$W' = \{V' \cdot (Q \times t)\}_{Q \times D}, \quad Y' = \{X' \cdot (Q \times t)\}_{Q \times D}.$$

Par hypothèse, on a $Y = (\varphi)$ sur W , φ étant une fonction sur W qu'on peut supposer définie sur le corps $k(u)$ (F-VIII₃, th. 10, cor. 1) puisque les cycles W et Y sont rationnels sur $k(u)$ et que par suite $k(u)$ est un corps de définition pour W (F-VII₆, prop. 14). On a donc $Y' = (\varphi')$, où φ' est la fonction $\varphi \circ T$ sur W' ; φ' est définie sur le corps $k(u, u', u'') = K(t)$. Soit x un point générique de W par rapport à $k(u)$; le point correspondant de W' est $x' = x \times R(x)$; il est générique sur $W' = V' \cdot (Q \times t)$ par rapport à $K(t)$; d'après F-VI₃, th. 11, il est donc générique sur V' par rapport à K . Posons $w = \varphi(x) = \varphi'(x')$; on a $w \in k(x) \subset K(x) = K(x')$; il y a donc des fonctions ψ sur V et ψ' sur V' , ayant K pour corps de définition, telles que $w = \psi(x) = \psi'(x')$; posons $X_1 = (\psi)$ et $X'_1 = (\psi')$; les cycles X_1, X'_1 sont rationnels sur K . D'après le lemme 1 du n° 3 et le coroll. 1 du lemme 2 du n° 4, toute sous-variété de W de dimension $n - 2$ est simple sur W et sur V ; il en est donc de même pour W' et V' ; par suite, d'après F-VIII₂, th. 4, cor. 1, on a $\{X'_1 \cdot W'\}_{V'} = (\varphi') = Y'$, donc, d'après F-VII₆, th. 18 (ii), $X'_1 \cdot (Q \times t) = Y' = X' \cdot (Q \times t)$, les intersections étant prises ici dans $Q \times D$. D'après F-VII₆, th. 12 (ii), il s'ensuit que toutes les composantes du cycle $X' - X'_1$ ont des projections de dimension 0 sur D ou autrement dit sont contenues dans des variétés $Q \times z$. Considérons une composante quelconque Z du cycle $X - X_1$ sur V ; elle est de dimension $n - 1$ et ne peut donc être contenue dans M , puisque, d'après le lemme 1, $V \cap M$ est de dimension $n - 2$; sa transformée Z' par T^{-1} est donc une composante de $X' - X'_1$, donc contenue dans une variété $Q \times z$; il s'ensuit que Z est contenue dans un hyperplan $z' L'(X) - z'' L''(X) = 0$. Si on désigne par u', u'' les points (u'_0, \dots, u'_N) et (u''_0, \dots, u''_N) de l'espace projectif P' dual de P , ce dernier hyperplan correspond à un point v de la droite Δ joignant u' et u'' dans P' ; désignons-le par L_v . On a donc montré que toute composante Z de $X - X_1$ est une composante d'un cycle de la forme $V \cdot L_v$, où v est un point de Δ .

Appliquons le lemme 4 du n° 6; \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' étant définis comme dans ce lemme, les composantes de \mathfrak{R} sont de dimension $\leq N - n + 1 \leq N - 1$, et celles de \mathfrak{R}' de dimension $\leq N - n \leq N - 2$; et elles sont algébriques sur le plus petit corps de définition k_0 de V . Comme la droite Δ est générique sur k dans P' , le lemme 2 du n° 4 montre qu'elle est sans point commun avec \mathfrak{R}' , sans point commun avec \mathfrak{R} si \mathfrak{R} n'a que des composantes de dimension $\leq N - 2$, et a avec \mathfrak{R} des points communs en nombre fini si \mathfrak{R} a des composantes de dimension $N - 1$. Nous distinguerons alors trois cas :

(a) Les composantes de \mathfrak{R} sont de dimension $\leq N - 2$; il en est nécessairement ainsi si $n \geq 3$. Alors, quel que soit v sur Δ , $V \cdot L_v$ est une variété; donc $X - X_1$ est combinaison linéaire de cycles $V \cdot L_v$. Mais tous les cycles de la forme $V \cdot L_v$, où v désigne un point quelconque de P' , sont linéairement

équivalents les uns aux autres; en effet, si $H(X) = 0$, $H'(X) = 0$ sont les équations de deux hyperplans H, H' dans P , $H - H'$ est le diviseur de la fonction $H(X)/H'(X)$ dans P , et $V \cdot H - V \cdot H'$ est donc, d'après F.VIII₂, th. 4, cor. 1, le diviseur de la fonction induite par celle-là sur V . Comme $X_1 \sim 0$ sur V , il s'ensuit donc qu'on a $X \sim m(V \cdot L')$ sur V , L' étant l'hyperplan $L'(X) = 0$ et m étant un entier. Mais alors on a $m \cdot (V \cdot L' \cdot L) \sim Y \sim 0$ sur V , ce qui est impossible d'après F.VIII₂, th. 2, à moins que $m = 0$. On a donc bien $X \sim 0$.

(b) Supposons que \mathfrak{R} ait des composantes de dimension $N - 1$, ce qui implique $n = 2$; soient v_1 les points d'intersection de \mathfrak{R} et Δ ; soient Y_e toutes les composantes distinctes des cycles $V \cdot L_{v_1}$; les v_1 et les Y_e sont algébriques sur $k_0(u', u'')$. D'après ce qu'on a vu, $X - X_1$ est une combinaison linéaire des Y_e et de variétés $V \cdot L_e$; mais chacune de celles-ci est linéairement équivalente à l'un quelconque des cycles $V \cdot L_{v_1}$, donc à une somme de variétés Y_e ; comme $X_1 \sim 0$, X est donc linéairement équivalent à une combinaison linéaire des Y_e .

Supposons choisis une fois pour toutes deux points a', a'' de P' , génériques indépendants par rapport à k_0 ; soient b_μ les points d'intersection de \mathfrak{R} avec la droite joignant a' et a'' ; soient Γ_i toutes les composantes distinctes des cycles $V \cdot L_{b_\mu}$. Soient encore \bar{u}', \bar{u}'' deux points génériques indépendants de P' sur $k(u', u'', a', a'')$. Il y a un isomorphisme σ de la clôture algébrique de $\bar{k}(u', u'')$ sur celle de $\bar{k}(\bar{u}', \bar{u}'')$ qui laisse invariants les éléments de \bar{k} et transforme u', u'' en \bar{u}', \bar{u}'' ; il y a d'autre part un isomorphisme τ de la clôture algébrique de $k_0(u', u'', \bar{u}', \bar{u}'')$ sur celle de $k_0(a', a'', \bar{u}', \bar{u}'')$ qui laisse invariants les éléments de la clôture algébrique de $k_0(\bar{u}', \bar{u}'')$ et transforme u', u'' en a', a'' . Comme X est linéairement équivalent à un cycle de la forme $\sum_e m_e Y_e$, son transformé par σ , qui est X lui-même, est linéairement équivalent à $\sum_e m_e Y_e^\sigma$; on a donc $\sum_e m_e (Y_e - Y_e^\sigma) \sim 0$. Comme les Y_e sont algébriques sur $k_0(u', u'')$ et que les Y_e^σ le sont donc sur $k_0(\bar{u}', \bar{u}'')$, le transformé par τ du premier membre de cette dernière relation est donc ~ 0 ; comme τ laisse les Y_e^σ invariants et transforme les Y_e dans les Γ_i , $\sum_e m_e Y_e^\sigma$ est donc linéairement équivalent à une combinaison linéaire des Γ_i ; X est donc linéairement équivalent à cette combinaison linéaire. Cela démontre (iii).

(c) Les hypothèses étant celles de (b), supposons de plus qu'on ait $mX \sim 0$ avec $m \neq 0$, donc $mX = (\theta)$, θ étant une fonction sur V ayant k pour corps de définition. Alors on a, de même que plus haut, $mX' = (\theta')$, où θ' est la fonction $\theta \circ T$ sur V' , définie sur le corps K . Soit η' la fonction induite par θ' sur W' ; elle est définie sur le corps $K(t)$; x et x' étant comme plus haut, on aura $\theta(x) = \theta'(x') = \eta'(x')$. De même que plus haut, on peut appliquer F.VIII₂, th. 4, cor. 1, qui donne:

$$(\eta') = \{mX' \cdot W'\}_{V'} = mY' = (\varphi^m),$$

donc $\eta' \varphi'^{-m}$ est une constante sur W' ; autrement dit, on a $\eta'(x') \varphi'(x')^{-m} \in K(t)$, c'est-à-dire $\theta'(x') \psi'(x')^{-m} = \lambda(t)$, λ étant une fonction sur D ayant K

pour corps de définition. Cela s'écrit aussi $\theta(x) \psi(x)^{-m} = \lambda[R(x)]$. Dans cette relation, θ , ψ et $\lambda \circ R$ sont des fonctions sur V ayant K pour corps de définition, et x est générique sur V par rapport à K ; on a donc $\theta \psi^{-m} = \lambda \circ R$; le second membre est d'ailleurs la fonction induite sur V par la fonction $\lambda \circ R$ définie dans P . Il est immédiat que cette dernière a pour diviseur une combinaison linéaire d'hyperplans L_v correspondant à des points v de Δ ; donc le diviseur de la fonction qu'elle induit sur V est combinaison linéaire de cycles $V \cdot L_v$; autrement dit, le diviseur $m(X - X_1)$ de $\theta \psi^{-m}$ sur V est une telle combinaison linéaire. Mais, comme Δ n'a aucun point commun avec \Re' , les cycles $V \cdot L_v$ sont sans composantes multiples; ils sont aussi deux à deux sans composante commune, car une telle composante serait contenue dans $V \cap M$ qui est de dimension $n - 2$; une combinaison linéaire de cycles $V \cdot L_v$ ne peut donc être multiple de m , dans le groupe des diviseurs sur V , que si tous les coefficients sont multiples de m . Autrement dit, $X - X_1$ est lui-même combinaison linéaire de cycles $V \cdot L_v$; comme dans le cas (a), on en conclut que $X \sim 0$ sur V . Cela achève la démonstration.

On notera en vue de ce qui suit qu'avec les notations ci-dessus les courbes Γ_i construites dans le cas (b) sont algébriques sur $k_0(a', a'')$.

13. Proposition 1. Soit k_0 le plus petit corps de définition de V^n . Soit X un diviseur sur V ; soit k un corps contenant k_0 par rapport auquel X soit rationnel; soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P , générique par rapport à k ; soit C la courbe $V \cdot L$. Alors, si le diviseur $\{X \cdot L\}_P = \{X \cdot C\}_P$ est ~ 0 sur C , il y a un diviseur X_0 sur V , à composantes algébriques sur k_0 , tel que $X \sim X_0$.

Nous pouvons supposer que L est intersection de $n - 1$ hyperplans L_v ($1 \leq v \leq n - 1$) appartenant à des points w_v du dual P' de P , génériques indépendants dans P' sur le corps k ; soit w_n un point générique de P' sur $k(w_1, \dots, w_{n-1})$.

Soit k' le plus petit corps de définition commun de V et des composantes de X ; c'est un corps de type fini sur k_0 , donc on peut écrire $k' = k_0(t)$, avec $t = (t_1, \dots, t_m)$. Comme $k \supset k_0$, la clôture algébrique \bar{k} de k contient celle \bar{k}_0 de k_0 ; mais \bar{k} est corps de définition commun de V et des composantes de X et contient donc $k' = k_0(t)$, et par suite aussi $\bar{k}_0(t)$. Les hypothèses de l'énoncé restent satisfaites si on y remplace k par $\bar{k}_0(t)$; on peut donc supposer qu'on a $k = \bar{k}_0(t)$. Soit T le lieu du point t par rapport à \bar{k}_0 dans l'espace affine S^m . D'après F-VII₆, th. 12 (iii), il y a un diviseur Z sur $V \times T$, rationnel sur \bar{k}_0 , tel que $X \times t = Z \cdot (V \times t)$; avec les notations du § I, n° 8, cela s'écrit $X = Z(t)$.

Soit M l'intersection des hyperplans L_1, \dots, L_{n-2} ; c'est une variété linéaire de dimension $N - n + 2$, générique sur k ; d'après le coroll. 1 du lemme 2, n° 4, $W = V \cdot M$ est une surface sans courbe multiple, définie sur le corps $k_0(w_1, \dots, w_{n-2})$; on va lui appliquer le th. 2 du n° 12. Compte tenu de la remarque qui termine le n° 12, on voit qu'il y a sur W des courbes Γ_i en nombre fini, algébriques sur $k_0(w_1, \dots, w_n)$ et a fortiori sur $K = \bar{k}_0(w_1, \dots, w_n)$, ayant les propriétés énoncées dans le th. 2 (iii). Posons

$Y = \{X \cdot M\}_P$; d'après le coroll. 2 du lemme 2, n° 4, Y est un diviseur sur W , et on a $Y = \{X \cdot W\}_V$ et $\{Y \cdot L_{n-1}\}_P = \{X \cdot L\}_P$; comme par hypothèse le second membre de cette dernière relation est ~ 0 sur C , le th. 2 (iii) permet de conclure que $Y \sim \sum_i m_i \Gamma_i$, les m_i étant des entiers.

Mais, comme w_1, \dots, w_n sont des points génériques indépendants de P' sur $k = \bar{k}_0(t)$, t est générique sur T par rapport à K ; si donc t' est un point générique de T sur $K(t)$, il y a un isomorphisme σ de $K(t)$ sur $K(t')$ laissant invariants les éléments de K et transformant t en t' . Alors σ laisse invariants W , les Γ_i et Z , et transforme $X = Z(t)$ en $X^\sigma = Z(t')$ et Y en $Y^\sigma = \{X^\sigma \cdot W\}_V$. On a alors $Y^\sigma \sim \sum_i m_i \Gamma_i \sim Y$.

Soit maintenant M_ν l'intersection des hyperplans L_1, \dots, L_ν , donc $M_0 = P$, $M_{n-2} = M$ et $M_{n-1} = L$. Soit $V_\nu = V \cdot M_\nu$, donc $V_0 = V$, $V_{n-2} = W$, $V_{n-1} = C$. Si on applique le lemme 2 du n° 4 et ses corollaires, et le th. 2 (ii), on voit par récurrence sur ν que, si X_1 est un diviseur sur V rationnel par rapport à un corps de définition k_1 de V , et si w_1, \dots, w_{n-2} sont génériques indépendants dans P' par rapport à k_1 , alors $X_1 \cdot V_\nu \sim 0$ sur V_ν entraîne $X_1 \sim 0$ sur V pourvu que $\nu \leq n-2$. Comme t, t' sont génériques indépendants sur T par rapport à K , w_1, \dots, w_n sont génériques indépendants dans P' par rapport à $\bar{k}_0(t, t')$; X est rationnel sur $\bar{k}_0(t)$ et X^σ sur $\bar{k}_0(t')$; prenant $k_1 = \bar{k}_0(t, t')$, $X_1 = X - X^\sigma$, $\nu = n-2$, on voit qu'on a $X - X^\sigma \sim 0$ sur V puisque $Y - Y^\sigma \sim 0$ sur W . Il y a donc sur V une fonction φ , définie sur le corps $\bar{k}_0(t, t')$, telle que $(\varphi) = X - X^\sigma$.

Soit x un point générique de V par rapport à $\bar{k}_0(t, t')$; posons $z = \varphi(x)$; on a $z \in \bar{k}_0(t, t', x)$; donc il y a une fonction Φ sur $V \times T \times T$, ayant \bar{k}_0 pour corps de définition, telle que $z = \Phi(x, t, t')$. D'après F-VIII₂, th. 1, cor. 3, on a :

$$(\Phi) \cdot (V \times t \times t') = (\varphi) \times t \times t' = (X - X^\sigma) \times t \times t';$$

puisque $X = Z(t)$, $X^\sigma = Z(t')$, on aura donc, en posant $Z' = Z \times T$, et en désignant par Z'' le cycle qui se déduit du cycle Z' sur $V \times T \times T$ par la permutation des deux derniers facteurs du produit $V \times T \times T$:

$$(\Phi) \cdot (V \times t \times t') = (Z' - Z'') \cdot (V \times t \times t').$$

D'après F-VII₆, th. 12 (i), il s'ensuit que $(\Phi) - Z' + Z''$ n'a que des composantes dont la projection sur $T \times T$ est de dimension $< 2 \dim(T)$, et est donc de la forme $V \times U$, où U est un diviseur sur $T \times T$, rationnel sur \bar{k}_0 puisqu'il en est ainsi de (Φ) , Z' et Z'' . En vertu du lemme 7, cor. 2, du n° 8 et de F-IV₁, prop. 3, il y a un point simple s sur T , algébrique sur k_0 , tel que $Z(s)$ et $U \cdot (T \times s)$ soient définis; comme $t \times s$ est un point générique de $T \times s$ sur \bar{k}_0 , ce point n'est donc dans aucune composante de U . On a

$$Z' \cdot (V \times t \times s) = (Z \times T) \cdot (V \times t \times s) = Z(t) \times t \times s = X \times t \times s;$$

de même, en échangeant les deux derniers facteurs de $V \times T \times T$, on voit qu'on a $Z'' \cdot (V \times t \times s) = Z(s) \times t \times s$. Comme $(V \times U) \cdot (V \times t \times s) = 0$, on voit donc que $(\Phi) \cdot (V \times t \times s)$ est défini et égal à $[X - Z(s)] \times t \times s$. D'après

F-VIII₂, th. 4, cor. 1, on en conclut que ce dernier cycle est le diviseur de la fonction induite par Φ sur $V \times t \times s$. On a donc $X - Z(s) \sim 0$ sur V ; comme $Z(s)$ est rationnel sur \bar{k}_0 , cela démontre la proposition.

Corollaire. Dans le th. 2 (iii), on peut prendre les courbes Γ_i algébriques sur le plus petit corps de définition k_0 de V .

En effet, supposons les Γ_i choisies simplement de manière à posséder la propriété du th. 2 (iii). Soit \mathfrak{G} le groupe de diviseurs sur V engendré par les Γ_i ; soit \mathfrak{G}' le sous-groupe de \mathfrak{G} formé des $U \in \mathfrak{G}$ qui sont linéairement équivalents à un diviseur rationnel sur \bar{k}_0 . Comme \mathfrak{G} est un groupe abélien libre de type fini, il en est de même de \mathfrak{G}' ; soit (U_j) un système de générateurs de \mathfrak{G}' ; pour chaque j , soit U'_j un diviseur $\sim U_j$ et rationnel sur \bar{k}_0 . Avec les notations du th. 2, $Y \sim 0$ entraîne, d'après le th. 2 (iii), une relation $X \sim U$ avec $U \in \mathfrak{G}$, et aussi d'après la prop. 1, une relation $X \sim X_0$ avec X_0 rationnel sur \bar{k}_0 ; donc on a $U \in \mathfrak{G}'$, de sorte que U et par suite X sont linéairement équivalents à une combinaison linéaire des U'_j . En remplaçant les Γ_i par les composantes des U'_j , on satisfait donc à la fois au th. 2 (iii) et au corollaire ci-dessus.

14. Théorème 3. Soit k_0 le plus petit corps de définition de V . Il existe sur V un ensemble fini de diviseurs D_α , rationnels sur \bar{k}_0 , ayant les propriétés suivantes: (a) $\sum_\alpha m_\alpha D_\alpha \sim 0$ entraîne que $m_\alpha = 0$ quel que soit α ; (b) soit X un diviseur sur V ; soit k un corps de définition de V par rapport auquel X soit rationnel; soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$, générique par rapport à k ; soit $C = V \cdot L$; alors, pour que le diviseur $\{X \cdot L\}_P = \{X \cdot C\}_V$ soit ~ 0 sur C , il faut et il suffit qu'il y ait des entiers m_α tels que $X \sim \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$.

Soient L_1, \dots, L_{n-1} des hyperplans correspondant à des points génériques indépendants w_1, \dots, w_{n-1} de P' sur k_0 ; soient $M_\nu = L_1 \cap \dots \cap L_\nu$ et $V_\nu = V \cdot M_\nu$. En vertu du th. 2 (iii) et du coroll. de la prop. 1, il y a sur V_{n-2} des courbes Γ_i , algébriques sur $k_0(w_1, \dots, w_{n-2})$, ayant les propriétés du th. 2 (iii); comme L_{n-1} est un hyperplan générique sur ce même corps, les cycles $\{\Gamma_i \cdot L_{n-1}\}_P$ sont définis et sont des diviseurs sur la courbe V_{n-1} . Soit \mathfrak{G} le groupe des diviseurs sur V_{n-2} engendré par les Γ_i ; soit \mathfrak{G}_1 le sous-groupe de \mathfrak{G} formé des $U \in \mathfrak{G}$ tels que $\{U \cdot L_{n-1}\}_P \sim 0$ sur V_{n-1} ; soit \mathfrak{G}_2 le sous-groupe de \mathfrak{G}_1 formé des $U \in \mathfrak{G}_1$ tels qu'il existe un diviseur D sur V , rationnel sur \bar{k}_0 , satisfaisant à $\{D \cdot V_{n-2}\}_V \sim U$; soit \mathfrak{G}_3 le sous-groupe de \mathfrak{G}_2 formé des $U \in \mathfrak{G}_2$ qui sont ~ 0 sur V_{n-2} . D'après le th. 2 (i), tout élément de \mathfrak{G} qui est ~ 0 sur V_{n-2} appartient à \mathfrak{G}_1 et par suite à \mathfrak{G}_2 , donc à \mathfrak{G}_3 . Puisque \mathfrak{G} est abélien libre de type fini, il en est de même de $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$. Si $U \in \mathfrak{G}_1$ et $mU \in \mathfrak{G}_3$, m étant un entier $\neq 0$, le th. 2 (ii) montre que $U \in \mathfrak{G}_3$; autrement dit, le groupe $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_3$ n'a pas d'élément d'ordre fini. On sait que dans ces conditions on peut écrire $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}'_1 \times \mathfrak{G}_3$, \mathfrak{G}'_1 étant un sous-groupe de \mathfrak{G}_1 convenablement choisi; comme $\mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3$, on aura donc $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}'_2 \times \mathfrak{G}_3$, avec $\mathfrak{G}'_2 = \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}'_1$; $\mathfrak{G}'_1, \mathfrak{G}'_2$ sont abéliens libres de type fini. Soit (U_α) un système libre de générateurs de \mathfrak{G}'_2 ; pour chacun, d'après la définition de \mathfrak{G}_2 , on peut choisir un diviseur D_α sur V , rationnel sur \bar{k}_0 , tel que $\{D_\alpha \cdot V_{n-2}\}_V \sim U_\alpha$ sur V_{n-2} . On va montrer que les D_α ont les propriétés énoncées dans le th. 3. Soit $D = \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$ une

combinaison linéaire des D_α ; comme dans la démonstration de la prop. 1, on voit par récurrence sur v , pour $0 \leq v \leq n-2$, au moyen du th. 2 (ii), que, pour que $D \sim 0$ sur V , il faut et il suffit que $\{D \cdot V_v\}_V \sim 0$ sur V_v , donc en définitive que $\{D \cdot V_{n-2}\}_V \sim 0$ sur V_{n-2} , ou autrement dit que $U = \sum_{\alpha} m_{\alpha} U_{\alpha} \sim 0$

sur V_{n-2} c'est-à-dire $U \in \mathfrak{G}_3$; comme $\mathfrak{G}_2' \cap \mathfrak{G}_3 = \{0\}$, $U \in \mathfrak{G}_3$ entraîne $U = 0$, donc $m_{\alpha} = 0$ quel que soit α ; les D_{α} possèdent donc bien la propriété (a). Soient de nouveau $D = \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$, $U = \sum_{\alpha} m_{\alpha} U_{\alpha}$; posons $D' = \{D \cdot V_{n-2}\}_V$,

d'où $D' \sim U$; d'après le th. 2 (i), on a $\{D' \cdot V_{n-1}\}_{V_{n-2}} \sim \{U \cdot V_{n-1}\}_{V_{n-2}}$ sur V_{n-1} ; par définition de \mathfrak{G}_1 , le second membre est ~ 0 sur V_{n-1} ; d'après le coroll. 2 du lemme 2, n° 4, le premier membre n'est autre que $\{D \cdot V_{n-1}\}_V = \{D \cdot M_{n-1}\}_P$; on a donc $\{D \cdot M_{n-1}\}_P \sim 0$ sur V_{n-1} . Soit maintenant L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$, générique sur un corps de définition k de V et par suite a fortiori sur k_0 ; il y a alors un isomorphisme σ d'un corps de définition K de M_{n-1} contenant \bar{k}_0 sur un corps de définition K' de L contenant \bar{k}_0 qui laisse invariants tous les éléments de \bar{k}_0 et transforme V_{n-1} en L ; σ laisse invariants les D_{α} et transforme donc $\{D \cdot M_{n-1}\}_P$ en $\{D \cdot L\}_P$; comme le premier de ces diviseurs est ~ 0 sur V_{n-1} , le second l'est sur $C = V \cdot L$; si donc X est un diviseur, rationnel sur k , tel que $X \sim D$ sur V , on aura $\{X \cdot C\}_V \sim 0$ sur C d'après le coroll. 2 du lemme 2, n° 4; cela démontre que la condition dans (b) est suffisante. Soit réciproquement X un diviseur sur V , rationnel par rapport à k , tel que $\{X \cdot C\}_V \sim 0$ sur C ; d'après la prop. 1, il y aura un diviseur X_0 , rationnel par rapport à \bar{k}_0 , tel que $X \sim X_0$ sur V , d'où $\{X_0 \cdot C\}_V \sim 0$ d'après le coroll. 2 du lemme 2, n° 4. Posons $X_v = \{X_0 \cdot M_v\}_P = \{X_0 \cdot V_v\}_V$ pour $0 \leq v \leq n-1$; l'isomorphisme σ^{-1} , appliqué à $\{X_0 \cdot C\}_V \sim 0$, montre qu'on a $X_{n-1} \sim 0$ sur V_{n-1} ; le th. 2 (iii), appliqué à V_{n-2} , X_{n-2} , montre alors qu'il y a un $U \in \mathfrak{G}$ tel que $X_{n-2} \sim U$ sur V_{n-2} ; d'après le th. 2 (i) on a $U \in \mathfrak{G}_1$, et par suite $U \in \mathfrak{G}_2$ par définition de \mathfrak{G}_2 ; comme $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2' \times \mathfrak{G}_3$, on peut écrire $U = U' + U''$, avec $U' \in \mathfrak{G}_2'$, $U'' \in \mathfrak{G}_3$; comme alors $U'' \sim 0$ sur V_{n-2} , on a $U' \sim U \sim X_{n-2}$ sur V_{n-2} . Par définition des D_{α} , il y a donc une combinaison linéaire $D = \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$ des D_{α} telle que $X_{n-2} \sim \{D \cdot V_{n-2}\}_V$, donc, en posant $Y_0 = X_0 - D$ et $Y_v = \{Y_0 \cdot V_v\}_V$, $Y_{n-2} \sim 0$ sur V_{n-2} . Comme précédemment, on voit, au moyen du th. 2 (iii) et par récurrence sur v pour $0 \leq v \leq n-2$, que $Y_v \sim 0$ sur V_v , entraîne $Y_0 \sim 0$ sur V . On a donc bien $Y_0 \sim 0$ sur V , c'est-à-dire $X_0 \sim D$ ou encore $X \sim D$, ce qui achève la démonstration.

III. Le second critère d'équivalence (forme provisoire)

15. Soit φ une fonction définie sur V , à valeurs dans une variété abélienne A ; d'après VA, n° 15, th. 6, φ est définie en tout point simple de V . Soit X un diviseur sur V ; soit k un corps de définition pour V , A et φ , par rapport auquel X soit rationnel. Soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P , générique par rapport à k ; soit $C = V \cdot L$; C est une courbe sans point multiple, ne passant par aucun point multiple de V , de sorte que φ est définie en tout point de C . Soit L définie par les équations $\sum_{j=0}^N u_{ij} X_j = 0$ ($1 \leq i \leq n-1$),

où les u_i sont $(n-1)(N+1)$ variables indépendantes sur k ; alors $Y = \{X \cdot L\}_P$ est un cycle de dimension 0 sur V , ou encore un diviseur sur C , rationnel sur $k(u)$; si $Y = \sum y_r$, les y_r étant des points de C , φ est défini en chacun des y_r ;

soit $w = \sum \varphi(y_r)$, c'est-à-dire, avec les notations de VA, n° 16, $w = S[\varphi(Y)]$;

d'après VA, n° 7, th. 1, w est rationnel sur $k(u)$; si donc u est considéré comme point générique sur k de l'espace affine S^M à $M = (n-1)(N+1)$ dimensions, on peut écrire $w = \psi(u)$, où ψ est une application de cet espace dans A ayant k pour corps de définition. Mais une telle fonction est nécessairement constante (VA, n° 19, th. 8, cor.); sa valeur constante est alors rationnelle sur k , c'est-à-dire qu'on a $k(w) = k$. Soit alors L' une variété linéaire de dimension

$N - n + 1$ dans P , définie par $\sum_{i=0}^N u_{ij} X_j = 0$ ($1 \leq i \leq n-1$), telle que

$Y' = \{X \cdot L'\}_P$ soit défini et que les composantes de Y' soient simples sur V ; on va montrer qu'alors $S[\varphi(Y')]$ est encore égal à w . En effet, soit x générique sur L par rapport à $k(u)$; soit Ω le lieu de $x \times u$ sur k dans $P \times S^M$; on vérifie facilement que $\Omega \cdot (P \times u') = L' \times u'$, d'où

$$Y' \times u' = (X \cdot L') \times u' = (X \times S^M) \cdot (L' \times u') = (X \times S^M) \cdot [\Omega \cdot (P \times u')].$$

Mais il est facile de voir aussi que $\Theta = (X \times S^M) \cdot \Omega$ est défini; de F-VII₆, th. 10, cor., on conclut alors que $Y' \times u' = \Theta \cdot (P \times u')$ et en particulier, pour $u' = u$, que $Y \times u = \Theta \cdot (P \times u)$. Il résulte alors de F-VII₆, th. 13, que Y' est l'unique spécialisation de Y par rapport à k sur $u \rightarrow u'$; par suite, $S[\varphi(Y')]$ est une spécialisation de $w = S[\varphi(Y)]$ sur k et n'est donc autre que w puisque $k(w) = k$. Il s'ensuit en particulier que, si V , X et φ sont donnés, w est indépendant du choix de k et de L ; une fois pour toutes, nous conviendrons, dans ce qui suit, de désigner par $w = \bar{\varphi}(X)$ le point $w = S[\varphi(Y)]$ de A construit comme il a été dit. Nous pouvons résumer comme suit les résultats qu'on vient d'obtenir:

Théorème 4. Soient X un diviseur sur V , et φ une application de V dans une variété abélienne A . Alors il existe un point $\bar{\varphi}(X)$ de A et un seul tel que l'on ait $\bar{\varphi}(X) = S[\varphi(Y)]$ pour tout cycle Y de la forme $Y = \{X \cdot L\}_P$, où L est une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P telle que tous les composants de Y soient simples sur V . De plus, si k est un corps de définition de V , A et φ par rapport auquel X soit rationnel, $\bar{\varphi}(X)$ est rationnel sur k .

Convenons désormais de dire que toute courbe C sur V de la forme $C = V \cdot L$, où L est une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P telle que $V \cdot L$ soit une courbe sans point multiple dont tous les points soient simples sur V , est une courbe typique de V . Alors nous pouvons énoncer le corollaire suivant du th. 4:

Corollaire 1. Soient X , A et φ comme dans le th. 4; soit C une courbe typique de V telle que $X \cdot C$ soit défini sur V . Alors on a $\bar{\varphi}(X) = S[\varphi(X \cdot C)]$; et, si $X \cdot C \sim 0$ sur C , on a $\bar{\varphi}(X) = 0$.

Soit en effet $C = V \cdot L$, L étant une variété linéaire de dimension $N - n + 1$; il résulte de F-VII₆, th. 18, cor., que $\{X \cdot L\}_P$ est défini et égal à $\{X \cdot C\}_V$; et φ est définie sur C (VA, n° 15, th. 6). La dernière assertion résulte alors de VA, n° 23, th. 10.

Corollaire 2. Les hypothèses et notations étant celles du th. 4, $X \sim 0$ sur V entraîne $\bar{\varphi}(X) = 0$; et l'application $X \rightarrow \bar{\varphi}(X)$ détermine un homomorphisme du groupe des classes de diviseurs sur V au sens de l'équivalence linéaire dans le groupe additif des points de A .

En effet, prenons L générique par rapport à un corps k ayant les propriétés énoncées dans le th. 4, et soit $C = V \cdot L$; le coroll. 2 du lemme 2, n° 4, montre que, si $X \sim 0$, toutes les hypothèses du coroll. 1 du th. 4 sont satisfaites, donc qu'on a $\bar{\varphi}(X) = 0$. Le reste est immédiat.

16. Théorème 5. Soit φ une application de V dans une variété abélienne A . Soient W une variété (abstraite) et Z un diviseur sur $V \times W$. Alors il existe une application ψ de W dans A telle que l'on ait $\psi(M) = \bar{\varphi}[Z(M)]$ chaque fois que M est un point simple de W et que $Z(M)$ est défini; et, si k est un corps de définition pour V , A , φ et W , par rapport auquel Z soit rationnel, c'est un corps de définition pour ψ .

Le corps k étant pris comme ci-dessus, le point $z = \bar{\varphi}[Z(M)]$ sur A est rationnel sur $k(M)$; si en particulier on prend M générique sur W par rapport à k , il y aura donc une application ψ de W dans A , définie sur le corps k , telle que $\psi(M) = \bar{\varphi}[Z(M)]$. Alors, si M' est simple sur W , $\psi(M')$ est défini; nous avons à faire voir que $\psi(M') = \bar{\varphi}[Z(M')]$ lorsque $Z(M')$ est défini. En procédant par linéarité, et remplaçant au besoin k par \bar{k} , on voit qu'il suffit de considérer le cas où Z est une variété. Soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P , définie par $\sum_i u_{ij} X_j = 0$ ($1 \leq i \leq n - 1$),

où les u_{ij} sont $(n - 1)(N + 1)$ variables indépendantes sur $k(M, M')$. Soit $C = V \cdot L$; C est une courbe définie sur le corps $k(u)$ (cf. F-VII₆, prop. 14), et on voit, au moyen de F-V₁, prop. 2, qu'un point générique de C par rapport à $k(u)$ est générique sur V par rapport à k ; il s'ensuit qu'un point générique de $C \times W$ par rapport à $k(u)$ est générique sur $V \times W$ par rapport à k et ne peut donc être dans Z . Par suite (F-VII₆, prop. 16), le cycle

$$T = \{Z \cdot (C \times W)\}_{V \times W}$$

est défini. En vertu de F-VII₆, th. 10, cor., on a donc:

$$\begin{aligned} T \cdot (V \times M') &= [Z \cdot (V \times M')] \cdot (C \times W) = [Z(M') \times M'] \cdot (C \times W) \\ &= [Z(M') \cdot C] \times M'; \end{aligned}$$

dans cette relation, le dernier membre est défini d'après le coroll. 2 du lemme 2, n° 4, et cela entraîne que les troisième et deuxième membres le sont aussi. Cela peut s'écrire $T(M') = Z(M') \cdot C$; on aura en particulier $T(M) = Z(M) \cdot C$. Mais, par définition de $\bar{\varphi}$, on a

$$\bar{\varphi}[Z(M')] = S\{\varphi[Z(M') \cdot C]\}.$$

On a donc $\bar{\varphi}[Z(M')] = S\{\varphi[T(M')]\}$, et de même pour M . Mais il résulte de F-VII₆, th. 13, que $T(M')$ est l'unique spécialisation de $T(M)$ sur $M \rightarrow M'$ par rapport à $k(u)$; donc $\bar{\varphi}[Z(M')]$ est la spécialisation de $\psi(M) = \bar{\varphi}[Z(M)]$ sur $M \rightarrow M'$ par rapport à $k(u)$, et a fortiori par rapport à k ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Soit φ une application dans une variété abélienne A d'une courbe complète Γ sans point multiple. Soient W une variété et Z un diviseur sur $\Gamma \times W$. Alors il existe une application ψ de W dans A telle que l'on ait $\psi(M) = S\{\varphi[Z(M)]\}$ pour tout point simple M de W tel que $Z(M)$ soit défini; et, si k est un corps de définition pour Γ , A , φ et W , par rapport auquel Z soit rationnel, c'est un corps de définition pour ψ .

En effet, c'est là un cas particulier du th. 5 si on tient compte du fait que toute courbe complète sans point multiple peut être plongée dans un espace projectif. Il n'y aurait aucune difficulté à démontrer le corollaire directement sans plonger Γ dans un espace projectif, en suivant pas à pas la démonstration du th. 5.

17. Après ces préliminaires, nous pouvons aborder la démonstration du second critère d'équivalence. Une première forme, incomplète et provisoire, en est la suivante:

Proposition 2. Soient D_α des diviseurs sur V ayant les propriétés énoncées dans le th. 3. Soit X un diviseur algébriquement équivalent à 0 sur V , tel que l'on ait $\overline{\varphi}(X) = 0$ pour toute application φ de V dans une variété abélienne. Alors il y a des entiers $m \neq 0$ et m_α tels que $mX \sim \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$.

D'après le lemme 10 du n° 11, on peut écrire $X = Z(N) - Z(M)$, Z étant un diviseur réduit sur le produit $V \times \Gamma$ de V et d'une courbe complète Γ sans point multiple, et M, N étant deux points de Γ . Soient J la jacobienne de Γ , et f l'application canonique de Γ dans J . Soit k un corps de définition de V, Γ, J et f , par rapport auquel Z, M et N soient rationnels. Soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$ dans P , générique par rapport à k ; soit $C = V \cdot L$. Comme dans la démonstration du th. 5, on voit que $T = Z \cdot (C \times \Gamma)$ est défini et que l'on a $Z(M) \cdot C = T(M)$, où $T(M)$ est défini comme d'habitude par $T(M) \times M = \{T \cdot (V \times M)\}_{V \times \Gamma}$; mais ce dernier cycle s'écrit aussi $\{T \cdot (C \times M)\}_{C \times \Gamma}$, comme il résulte de F-VII₆, th. 18, cor., et du fait que tout point de C est simple sur C et sur V . Si donc φ est une application de V dans une variété abélienne, on aura

$$\overline{\varphi}(X) = S\{\varphi[T(N) - T(M)]\}.$$

Soit maintenant x un point de C ; soit W le lieu de x par rapport à \bar{k} ; si W était de dimension $\leq n - 2$, L n'aurait aucun point commun avec W ; donc W est de dimension $n - 1$ ou n . Soit P un point générique de Γ par rapport à $\bar{k}(x)$; comme toute composante de Z est algébrique sur k , une telle composante ne peut contenir $x \times P$ sans contenir le lieu $W \times \Gamma$ de $x \times P$ sur \bar{k} , ce qui n'est pas puisque Z est supposé réduit; donc aucune composante de Z ne contient $x \times \Gamma$; par suite, aucune composante de T n'est de la forme $x \times \Gamma$. D'après F-VII₆, th. 18, cor., on en conclut que l'on a, quel que soit x sur C , $\{Z \cdot (x \times \Gamma)\}_{V \times \Gamma} = \{T \cdot (x \times \Gamma)\}_{C \times \Gamma}$. Posons $\{T \cdot (x \times \Gamma)\}_{C \times \Gamma} = x \times T^*(x)$ pour tout x sur C ; posons aussi $\{Z \cdot (y \times \Gamma)\}_{V \times \Gamma} = y \times Z^*(y)$ pour tout y sur V tel que le premier membre soit défini. On aura donc $Z^*(x) = T^*(x)$ pour tout x sur C .

Mais, d'après le coroll. du th. 5, n° 16, il y a une application φ de V dans J , définie sur k , telle que $\varphi(y) = S\{f[Z^*(y)]\}$ pour tout point simple y de V tel que $Z^*(y)$ soit défini. On va appliquer l'hypothèse de notre proposition à cette fonction φ . D'après ce qui précède, on a, pour tout x sur C , $\varphi(x) = S\{f[T^*(x)]\}$. Désignons par τ la classe de T considéré comme diviseur sur $C \times \Gamma$, c'est-à-dire comme correspondance entre C et Γ ou encore (VA, n° 43) comme homomorphisme dans J de la jacobienne J_C de C . Le th. 22 de VA, n° 43, montre que l'extension linéaire à J_C de la fonction induite par φ sur C n'est autre que τ , et que, si g est l'application canonique de C dans J_C , on a

$$S[\varphi(m)] = S\{f[T^*(m)]\} = \tau S[g(m)]$$

quel que soit le diviseur m de degré 0 sur C . Le même théorème montre qu'on a, pour $m = T(N) - T(M)$:

$$S[g(m)] = \tau' S[f(N - M)] = \tau'[f(N) - f(M)],$$

d'où $\overline{\varphi}(X) = \tau \tau'[f(N) - f(M)]$ d'après l'expression obtenue plus haut pour $\overline{\varphi}$. L'hypothèse de notre proposition donne donc $\tau \tau'[f(N) - f(M)] = 0$. D'après le coroll. 3 du th. 1, n° 2, cela entraîne qu'il y a $m \neq 0$ tel que $m \tau'[f(N) - f(M)] = 0$, c'est-à-dire $m S[g(m)] = 0$, donc $m \sim 0$ sur C d'après VA, n° 38, th. 19. Cela s'écrit $m[Z(N) - Z(M)] \cdot C \sim 0$, d'où la conclusion en vertu du th. 3.

18. Il résulte en même temps de la démonstration ci-dessus que, si Z est tel que $\overline{\varphi}[Z(N) - Z(M)] = 0$ quels que soient M, N sur Γ , la fonction $\tau \tau' \circ f$ est constante sur Γ , donc que $\tau \tau'$ qui en est l'extension linéaire est 0, d'où $\tau = \tau' = 0$ d'après le coroll. 1 du th. 1, n° 2, puis $Z(N) - Z(M) \sim \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$. Mais on a un résultat plus précis:

Théorème 6. Soient W une variété et Z un diviseur sur $V \times W$. Supposons que, pour toute application φ de V dans une variété abélienne, l'application φ de W dans celle-ci définie comme dans le th. 5 soit constante. Alors on a $Z(M) \sim Z(N)$ chaque fois que $Z(M), Z(N)$ sont définis.

Soit K un corps de définition de W ; soit P générique sur W par rapport à $K(M, N)$; il suffira de démontrer que $Z(M) \sim Z(P)$, car alors on aura de même $Z(N) \sim Z(P)$. Au moyen des lemmes 6 (n° 7) et 8 (n° 9), on voit alors qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où W est une courbe Γ ; raisonnant comme à la fin du n° 11, on voit qu'on peut supposer Γ complète et sans point multiple, et Z réduit. Ce qui précède montre alors qu'avec les hypothèses du th. 6 tout diviseur de la forme $Z(N) - Z(M)$ est linéairement équivalent à un diviseur $\sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$. Soit k un corps de définition pour V et Γ ,

par rapport auquel Z et les D_{α} soient rationnels; soient P, Q, R trois points génériques indépendants de Γ par rapport à k . On a une relation $Z(P) - Z(R) \sim \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$; si on lui applique l'isomorphisme de $k(P, R)$ sur $k(Q, R)$ qui laisse invariants les éléments de $k(R)$ et transforme P en Q , on obtient $Z(Q) - Z(R) \sim \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha}$; donc on a $Z(P) \sim Z(Q)$. Soit g la fonction sur V ,

ayant $k(P, Q)$ pour corps de définition, telle que $(g) = Z(P) - Z(Q)$; soit x un point générique de V par rapport à $k(P, Q)$; soit h la fonction sur $V \times \Gamma$ ayant $k(P)$ pour corps de définition et telle que $h(x \times Q) = g(x)$. D'après F-VIII₂, th. 1, cor. 4, on a $(h) \cdot (V \times Q) = Z(P) - Z(Q)$, donc, d'après F-VII₆, th. 12 (ii), $(h) = Z(P) \times \Gamma - Z + V \times a$, où a est un diviseur sur Γ , rationnel par rapport à $k(P)$; en remplaçant au besoin $h(x \times Q)$ par $h(x \times Q) \lambda(Q)$, où λ est une fonction définie sur Γ , on peut supposer de plus que M, N ne sont pas des composantes de a . Alors h induit sur $V \times M$ une fonction h_0 telle que $(h_0) = [Z(P) - Z(M)] \times M$, d'où il s'ensuit que $Z(P) \sim Z(M)$ sur V ; de même $Z(P) \sim Z(N)$. Donc $Z(M) \sim Z(N)$.

Corollaire 1. Soient W une variété, Z un diviseur sur $V \times W$, et C une courbe typique sur V . Supposons qu'il existe un corps de définition k de V et W , par rapport auquel Z soit rationnel, tel que $Z(M) \cdot C$ soit défini et ~ 0 sur C quel que soit M générique sur W par rapport à k . Alors on a $Z(N) \sim Z(N')$ sur V chaque fois que N, N' sont des points de W tels que $Z(N), Z(N')$ soient définis.

Soit φ une application de V dans une variété abélienne; d'après le coroll. 1 du th. 4, n° 15, on a $\overline{\varphi}[Z(M)] = 0$ pour tout M générique sur V par rapport à k , donc $\varphi(M) = 0$ si φ est la fonction définie au moyen du th. 5; en prenant M générique par rapport à un corps de définition de φ qui contienne k , cela implique $\varphi = 0$, d'où la conclusion en vertu du th. 6.

Corollaire 2. Soit k un corps de définition de V ; soit X un diviseur sur V , satisfaisant à une relation $mX \sim X_0$, où m est un entier $\neq 0$ et X_0 un diviseur rationnel sur k . Alors il y a un diviseur X_1 rationnel sur \bar{k} tel que $X \sim X_1$.

Soit K le plus petit corps de définition commun des composantes de X qui contienne \bar{k} ; K est de type fini sur \bar{k} et peut donc s'écrire comme $K = \bar{k}(t)$ avec $t = (t_1, \dots, t_m)$. Soit W le lieu de t sur \bar{k} ; d'après F-VII₆, th. 12 (iii), il existe un diviseur Z sur $V \times W$, rationnel par rapport à \bar{k} , tel que $X = Z(t)$; on va montrer que Z a la propriété énoncée dans le th. 6 du n° 18. Soit φ une application de V dans une variété abélienne A ; soit k' un corps de définition de A et φ contenant \bar{k} ; d'après le th. 5 du n° 16, il y a une application ψ de W dans A , définie sur k' , telle que $\psi(u) = \overline{\varphi}[Z(u)]$ pour tout point u sur W pour lequel $Z(u)$ est défini. D'après le th. 4 du n° 15, le point $a = \overline{\varphi}(X_0)$ est rationnel par rapport à k' ; d'après le coroll. 2 de ce théorème, on a $m\psi(t) = a$. Mais, d'après VA, n° 49, prop. 24, les points w de A qui satisfont à $mw = a$, qui sont les projections sur A de l'intersection de $A \times a$ et du graphe de $m\delta_A$, sont en nombre fini et algébriques sur k' ; donc $\psi(t)$ est algébrique sur k' et par suite rationnel sur k' puisque k' est un corps de définition de ψ ; ψ est donc une fonction constante. D'après le th. 6 du n° 18, on a donc $Z(t) \sim Z(u)$ chaque fois que $Z(u)$ est défini. Mais, d'après le coroll. 2 du lemme 7, n° 8, et F-IV₁, prop. 3, on peut choisir un point u sur W , algébrique sur k , tel que $Z(u)$ soit défini; pour un tel point, posons $X_1 = Z(u)$; on aura bien $X \sim X_1$.

IV. Le second critère d'équivalence (forme définitive).

19. Nous commencerons par quelques résultats généraux, indépendants du contenu des §§ II et III ci-dessus.

Proposition 3. Si X est un diviseur algébriquement équivalent à 0 sur une variété abélienne A , on a $X = 0$.

Cette dernière relation a le sens défini dans VA, n° 57, p. 107. L'hypothèse, d'après le lemme 9 du n° 10, équivaut à dire qu'on a

$$X = Z(v) - Z(u) = pr_A [Z \cdot (A \times v) - Z \cdot (A \times u)],$$

Z étant un diviseur sur le produit $A \times J$ de A et d'une jacobienne J , et u, v étant des points de J tels que $Z(u), Z(v)$ soient définis. Il est immédiat qu'on a alors, quel que soit t sur A ,

$$X_t - X = pr_A [T \cdot (A \times 0)],$$

T étant le diviseur sur $A \times J$ défini par

$$T = Z_{(t, -v)} - Z_{(t, -u)} - Z_{(0, -v)} + Z_{(0, -u)},$$

où $Z_{(t, w)}$ désigne comme d'habitude (VA, n° 11) le transformé de Z par la translation sur $A \times J$ qui amène $(0, 0)$ en (t, w) . Mais alors, d'après VA, n° 57, th. 30, coroll. 2, on a $T \sim 0$ sur $A \times J$, et par suite $X_t - X \sim 0$ sur A d'après F.VIII₂, th. 4, coroll. 1; t étant arbitraire, cela démontre la proposition.

Corollaire 1. Si X est un diviseur sur une variété abélienne A , et s'il existe un entier $m \neq 0$ tel que $mX \in \mathfrak{G}_a$ sur A , on a $X = 0$.

En effet, d'après la prop. 3, on a $mX = 0$, c'est-à-dire (d'après VA, n° 57, th. 30, coroll. 1) $\lambda'_m X = 0$ pour tout homomorphisme λ d'une jacobienne dans A , ou autrement dit (d'après VA, n° 45) $m \lambda'_X = 0$, donc enfin $\lambda'_X = 0$ d'après VA, n° 49, prop. 24; comme il en est ainsi quel que soit λ , le coroll. 1 du th. 30, VA, n° 57, montre qu'on a bien $X = 0$.

Réciproquement, on peut montrer que, si A est une variété abélienne donnée, il existe un entier $m \neq 0$ (qu'on peut même prendre de la forme p^r , où p est la caractéristique, donc égal à 1 si celle-ci est 0) tel que $X = 0$ entraîne $mX \in \mathfrak{G}_a$. D'après la prop. 3, les relations $X = 0$, $X \in \mathfrak{G}_a$ sont donc équivalentes en géométrie algébrique de caractéristique 0. Il en est de même, quelle que soit la caractéristique, sur toute variété jacobienne, en vertu de la prop. 3 ci-dessus et de VA, n° 62, th. 32, coroll. 2. Il serait fort intéressant de savoir si ce résultat reste valable sur toute variété abélienne.

Proposition 4. Soient U une variété (abstraite) et A une variété abélienne; soit Z un diviseur sur $U \times A$; pour $a \in A$, désignons par Z_a le transformé de Z par la transformation birationnelle de $U \times A$ en soi-même qui transforme $M \times u$ en $M \times (u + a)$ quels que soient M sur U et u sur A . On a alors, quels que soient u, v sur A :

$$Z_{u+v} - Z_u - Z_v + Z \sim 0.$$

Soient M, N des points simples de U tels que les cycles

$$Z \cdot (M \times A) = M \times S, \quad Z \cdot (N \times A) = N \times T$$

soient définis; comme alors S et T sont algébriquement équivalents sur A , on a $S = T$ d'après la prop. 3. Il est immédiat de plus qu'on a alors

$$Z_u \cdot (M \times A) = M \times S_u,$$

où S_u désigne comme d'habitude le transformé de S par la translation sur A qui amène 0 en u . Posons dans ces conditions

$$X = Z_u - Z - U \times (T_u - T).$$

On aura, d'après ce qu'on vient de voir:

$$\text{pr}_A[X \cdot (M \times A)] = S_u - S - (T_u - T) = (S - T)_u - (S - T).$$

Le dernier membre est ~ 0 puisque $S - T = 0$. Il en sera ainsi en particulier si on prend pour M un point générique de U par rapport à $k(u, N)$, k étant un corps de définition pour U et A par rapport auquel Z soit rationnel. Posons $K = k(u, N)$; il y aura donc sur A une fonction φ , ayant $K(M)$ pour corps de définition, telle que $X \cdot (M \times A) = M \times (\varphi)$. Soit x un point générique de A par rapport à $K(M)$; posons $z = \varphi(x)$; on aura $z \in K(M, x)$, et il y aura donc une fonction ψ sur $U \times A$, ayant K pour corps de définition, telle que $z = \psi(M, x)$. D'après F-VIII₃, th. 1, coroll. 3, on aura dans ces conditions

$$X \cdot (M \times A) = (\psi) \cdot (M \times A).$$

Comme X et (ψ) sont rationnels sur K , et M générique par rapport à K , cela entraîne (F-VII₃, th. 12 (ii)) que toute composante W de $X - (\psi)$ a sur U une projection $W' \neq U$; comme on a alors $W \subset W' \times A$, et que, si $U \times A$ est de dimension d , W est de dimension $d - 1$ tandis que $W' \times A$ est de dimension $< d$, il s'ensuit qu'on a $W = W' \times A$, et par conséquent $X - (\psi) = R \times A$, où R est un diviseur sur U , donc en définitive:

$$Z_u - Z \sim U \times (T_u - T) + R \times A.$$

Appliquons à cette relation la transformation birationnelle de $U \times A$ qui transforme tout point $P \times w$ en $P \times (w + v)$; celle-ci transforme Z_u en Z_{u+v} , Z en Z_v , $U \times T_u$ en $U \times T_{u+v}$, $U \times T$ en $U \times T_v$, et laisse $R \times A$ invariant. On a donc:

$$Z_{u+v} - Z_v - (Z_u - Z) \sim U \times [T_{u+v} - T_v - (T_u - T)],$$

ce qui achève la démonstration en vertu de VA, n° 57, th. 30, coroll. 2, et de F-VIII₃, th. 1, coroll. 4.

Corollaire 1. Les hypothèses et notations étant celles de la prop. 4, soient m_i des entiers, u_i des points de A , et posons $m = \sum_i m_i$, $u = \sum_i m_i u_i$; on a alors:

$$\sum_i m_i Z_{u_i} \sim Z_u + (m - 1) Z.$$

En effet, la prop. 4 peut s'interpréter en disant que la correspondance entre u et la classe (par rapport à l'équivalence linéaire \sim sur $U \times A$) du diviseur $Z_u - Z$ est un homomorphisme du groupe additif des points de A dans le groupe additif des classes de diviseurs sur $U \times A$. Avec les notations du corollaire, on a donc bien

$$Z_u - Z \sim \sum_i m_i (Z_{u_i} - Z).$$

De plus, U , A et Z étant comme il est dit dans la prop. 4, les notations générales introduites au n° 9 nous imposent de désigner par $Z(u)$ le diviseur

sur U défini par $Z \cdot (U \times u) = Z(u) \times u$ chaque fois que u est tel que le premier membre ait un sens; mais, lorsqu'il en est ainsi, il est immédiat qu'on a aussi:

$$Z_{-u} \cdot (U \times 0) = Z(u) \times 0.$$

Il résulte alors immédiatement de la prop. 4 et de son coroll. 1, combinés avec F-VIII₂, th. 4, coroll. 1, qu'on a ce qui suit:

Corollaire 2. *Les hypothèses et notations étant celles de la prop. 4 et du coroll. 1, on a*

$$Z(u+v) - Z(u) - Z(v) + Z(0) \sim 0,$$

$$\sum_i m_i Z(u_i) \sim Z(u) + (m-1)Z(0),$$

pourvu que tous les cycles figurant dans ces relations soient définis.

Corollaire 3. *Soient X un diviseur sur U , et m un entier $\neq 0$, tels qu'on ait $mX \in \mathfrak{S}_a$ sur U . Alors il y a sur U un diviseur X' tel que $X - X' \in \mathfrak{S}_a$ et que $mX' \sim 0$.*

En effet, d'après le lemme 9 du n° 10, on peut écrire $mX = Z(v) - Z(u)$, où Z est un diviseur sur le produit $U \times J$ de U et d'une jacobienne J et où u, v sont tels que $Z(u), Z(v)$ soient définis. Soit $w \in J$ tel que $mw = v - u$; d'après le coroll. 2, on satisfera aux conditions imposées en prenant

$$X' = X - Z(t+w) + Z(t),$$

t étant un point de J tel que le second membre soit défini.

20. Revenons maintenant à l'étude de la variété V^n plongée dans l'espace projectif P^N et satisfaisant aux hypothèses énoncées au début du § II.

Avant de donner les énoncés définitifs que nous avons en vue, nous démontrerons encore un résultat provisoire:

Proposition 5. *Soient k un corps de définition de V , et X un diviseur sur V , rationnel par rapport à k , algébriquement équivalent à 0. Supposons que, pour toute variété linéaire L de dimension $N - n + 1$, générique sur k , $\{X \cdot L\}_P$ soit un diviseur ~ 0 sur $C = V \cdot L$. Alors il y a un entier $m \neq 0$ tel que $mX \sim 0$ sur V .*

On observera que, si $\{X \cdot L\}_P \sim 0$ sur la courbe $V \cdot L$ pour une variété linéaire L générique sur k , il en sera de même pour toute autre variété linéaire générique sur k , comme on le verrait facilement au moyen d'un automorphisme convenable du domaine universel; mais, comme nous avons en vue un résultat encore plus précis, nous n'aurons pas besoin de cette remarque. D'après le lemme 9 du n° 10, notre hypothèse sur X permet d'écrire X sous la forme $X = Z(v) - Z(u)$, où Z est un diviseur sur le produit $V \times J$ de V et d'une jacobienne J , et où u, v sont des points de J tels que $Z(u), Z(v)$ soient définis. Soit K un corps de définition de J , contenant k et par rapport auquel Z soit rationnel; prenons L générique par rapport à $K(u, v)$. Comme dans la démonstration du th. 5 du n° 16, on voit qu'il y a sur C un point x qui est générique sur V par rapport à $K(u, v)$; alors, si $x \times u$ était contenu dans une composante de Z , son lieu $V \times u$ par rapport à $K(u, v)$ serait contenu dans cette composante, et $Z(u)$ ne serait pas défini. Donc aucune composante de Z

ne peut contenir $C \times u$, ni de même $C \times v$, ni à plus forte raison $C \times J$. Soit t un point de J tel que $C \times t$ ne soit contenu dans aucune composante de Z ; alors $Z \cdot (C \times t)$ sera défini sur $V \times J$ (F-VII₆, prop. 16), et on aura, par associativité (F-VII₆, th. 10 (v)):

$$(V \times t) \cdot [Z \cdot (C \times J)] = [(V \times t) \cdot Z] \cdot (C \times J) = [Z(t) \cdot C] \times t.$$

Si on pose $T = Z \cdot (C \times J)$, on aura, d'après F-VII₆, th. 18, coroll.:

$$\{T \cdot (V \times t)\}_{V \times J} = \{T \cdot (C \times t)\}_{C \times J},$$

donc, en désignant par $T(t) \times t$ le cycle défini par le second membre de cette dernière relation, $T(t) = Z(t) \cdot C$, notre calcul montrant que $Z(t)$ et $T(t)$ sont définis chaque fois que $C \times t$ n'est contenu dans aucune composante de Z .

Soient J_C la jacobienne de C et g l'application canonique de C dans J_C ; soit K' un corps de définition pour L, C, J_C et g , contenant $K(u, v)$. Si w est générique sur J par rapport à K' , aucune composante de Z ne contient $C \times w$, sans quoi elle contiendrait un point générique de $C \times w$ par rapport à $K'(w)$, et par suite le lieu $C \times J$ de ce point par rapport à la clôture algébrique de K' qui est un corps de définition pour cette composante. Comme $S[g(T(w))]$ est rationnel sur $K'(w)$, il y a une application f de J dans J_C , définie sur K' , telle que $f(w) = S[g(T(w))]$. D'après F-VII₆, th. 13, chaque fois que $T(t)$ est défini, c'est l'unique spécialisation de $T(w)$ sur $w \rightarrow t$ par rapport à K' , ce qui implique que $T(t)$ a même degré que $T(w)$, donc que $Z(t) \cdot C - Z(w) \cdot C$ est de degré 0, et aussi que $f(t) = S[g(T(t))]$ puisque f est définie en t (VA, n° 15, th. 6). Autrement dit, chaque fois que $C \times t$ n'est contenu dans aucune composante de Z , on a:

$$f(t) = S[g(Z(t) \cdot C)].$$

Mais, d'après VA, n° 20, th. 9, $f_0(w) = f(w) - f(0)$ est un homomorphisme de J dans J_C ; soit N le noyau de cet homomorphisme. D'après VA, n° 25, th. 11, N admet un sous-groupe B d'indice fini m qui est une sous-variété abélienne de J . Comme par hypothèse on a $\{X \cdot C\}_V \sim 0$ sur C , on a $f(v) - f(u) = 0$ (VA, n° 38, th. 19), donc, en posant $a = v - u$, $a \in N$ et par suite $ma \in B$. D'après le coroll. 2 de la prop. 4, n° 19, on a

$$mX \sim Z(w + ma) - Z(w),$$

w étant comme ci-dessus, et tout revient à faire voir que le second membre est ~ 0 . En vertu du lemme 8, n° 9, il y a un diviseur Z' sur $V \times B$ tel que, pour tout point b de B tel que $Z(w + b)$ soit défini, $Z'(b)$ soit défini et égal à $Z(w + b)$; en particulier, on aura $Z'(0) = Z(w)$, $Z'(ma) = Z(w + ma)$. Prenons b générique sur B par rapport à un corps de définition K'' de B contenant $K'(w)$; si $C \times (w + b)$ était contenu dans une composante de Z , celle-ci contiendrait un point générique de $C \times (w + b)$ par rapport à $K''(b)$, donc le lieu $C \times B_0$ de ce point par rapport à la clôture algébrique de $K''(b)$, donc aussi $C \times w$, ce qui n'est pas le cas. Il s'ensuit donc qu'on a:

$$S\{g[Z'(b) \cdot C]\} = S\{g[Z(w + b) \cdot C]\} = f(w + b) = f(w)$$

puisque b est dans le noyau de l'homomorphisme f_0 ; cela s'écrit aussi

$$S\{g[Z'(b) \cdot C]\} = S\{g[Z'(0) \cdot C]\}.$$

Comme on a vu que $Z'(b) \cdot C$, $Z'(0) \cdot C$ ont même degré, le th. 19 de VA, n° 38, montre que dans ces conditions ces diviseurs sont linéairement équivalents sur C . Le diviseur $Z' - Z'(0) \times B$ satisfait donc aux hypothèses du coroll. 1 du th. 6, n° 18; en vertu de ce corollaire, on a donc $Z'(b') \sim Z'(b'')$ chaque fois que b' , b'' sont des points de B tels que les deux membres soient définis; en prenant $b' = ma$, $b'' = 0$, on obtient bien $Z'(ma) - Z'(0) \sim 0$.

Corollaire. Si les D_α sont des diviseurs sur V ayant les propriétés énoncées dans le th. 3 (n° 14), $\sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$ ne peut être algébriquement équivalent à 0 que si les m_α sont tous nuls.

En effet, si $X = \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$ est algébriquement équivalent à 0, on peut appliquer à X la prop. 5; il y aura donc un entier $m \neq 0$ tel que $\sum m m_\alpha D_\alpha \sim 0$, d'où $m m_\alpha = 0$ pour tout α .

21. Nous pouvons maintenant énoncer sous leur forme définitive les critères d'équivalence que nous avons en vue.

Théorème 7. Soit X un diviseur algébriquement équivalent à 0 sur V , tel que l'on ait $\bar{\varphi}(X) = 0$ pour toute application φ de V dans une variété abélienne. Alors il y a un entier $m \neq 0$ tel que $mX \sim 0$.

En effet, d'après la prop. 2, on a alors une relation $mX \sim \sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$. Mais alors $\sum_\alpha m_\alpha D_\alpha$ est algébriquement équivalent à 0, donc est 0 d'après le coroll. de la prop. 5.

Corollaire 1. Soit C une courbe typique sur V ; soit X un diviseur algébriquement équivalent à 0 sur V . Alors, si $X \cdot C$ est défini et est ~ 0 sur C , il y a un entier $m \neq 0$ tel que $mX \sim 0$.

En effet, X satisfait alors aux hypothèses du th. 7.

Corollaire 2. Soit L une variété linéaire de dimension $N - n + 1$, générique sur le plus petit corps de définition de V ; soit $C = V \cdot L$. Soit X un diviseur sur V . Alors, s'il y a un entier $m \neq 0$ tel que mX soit algébriquement équivalent à 0 sur V , et si $X \cdot C$ est défini et est ~ 0 sur C , on a $X \sim 0$ sur V .

En effet, d'après le coroll. 1 appliqué à mX , il y a alors un entier $m' \neq 0$ tel que $mm'X \sim 0$. D'après le coroll. 2 du th. 6, n° 18, il y a donc un diviseur X_0 , à composantes algébriques sur le plus petit corps de définition de V , tel que $X \sim X_0$. Mais alors $\{X_0 \cdot L\}_P$, ou autrement dit $\{X_0 \cdot C\}_V$, est défini; comme on a $X \sim X_0$ sur V et $X \cdot C \sim 0$ sur C , on a $X_0 \cdot C \sim 0$ sur C d'après F-VIII, th. 4, coroll. 1. On peut alors appliquer à X_0 le th. 3 du n° 14, ce qui montre qu'on a une relation $X_0 \sim \sum n_\alpha D_\alpha$. Mais alors on a $mm' \sum n_\alpha D_\alpha \sim 0$, donc tous les n_α sont nuls.

(Eingegangen am 16. November 1953.)

Zur algebraischen Geometrie 17. Lokale Dimension und Satz von ECKMANN.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Unter der *lokalen Dimension* eines Polynomideals H (oder der Nullstellenvielfältigkeit V des Ideals) in einem Punkte O versteht man die höchste Dimension einer irreduziblen Vielfältigkeit, die O enthält und in V enthalten ist. Ist die lokale Dimension 0 oder -1 , so bedeutet das, daß O ein isolierter Punkt oder gar kein Punkt von V ist. Dafür soll in § 1 ein algebraisches Kriterium hergeleitet werden. Das Kriterium heißt

$$(H, P^r) = (H, P^{r+1}),$$

wobei P das zu O gehörige Primideal und r ein genügend hoher Exponent ist.

Mit Hilfe dieses Kriteriums wird in § 2 bewiesen, daß die lokale Dimension eines Ideals in O bei einer Spezialisierung der Koeffizienten der Basispolynome des Ideals niemals abnehmen kann.

Ein zweiter, ganz kurzer Beweis dieses Satzes verwendet keine Idealtheorie, dafür aber den Begriff Cayleyform einer Kette.

Auf Grund dieses Spezialisierungssatzes soll in § 3 ein Satz von ECKMANN¹⁾, spezialisiert für Polynome, aber verallgemeinert für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper, bewiesen werden. Es seien h_1, \dots, h_n Polynome in x_1, \dots, x_n , welche die Bedingungen

$$x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n = 0$$

identisch erfüllen. Ist der Grundkörper K der Körper der komplexen Zahlen und ist n ungerade, so besagt der Satz von ECKMANN, daß es auf jeder Sphäre

$$\sum \bar{x}_j x_j = R^2$$

eine gemeinsame Nullstelle der h_j gibt. Der Satz gilt sogar für stetige Funktionen h_j der x_k , die nur auf der Sphäre definiert sind. Sind die h_j aber Polynome, so folgt aus dem Satz von ECKMANN, daß der Koordinatenanfangspunkt O keine isolierte Nullstelle des Ideals $H = (h_1, \dots, h_n)$ sein kann, d. h. daß die lokale Dimension von H in O mindestens Eins beträgt. Umgekehrt, wenn die lokale Dimension mindestens Eins beträgt, so gibt es einen irreduziblen Teil der Nullstellenvielfältigkeit V , der sich zusammenhängend von O bis ins Unendliche erstreckt und daher mit jeder Sphäre um O einen Punkt gemeinsam hat. Der Satz von ECKMANN für Polynome ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß die lokale Dimension mindestens Eins beträgt.

Diese Aussage hat aber nicht nur im komplexen Körper, sondern in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper K einen Sinn. Für den Fall homogener

¹⁾ B. ECKMANN: Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen. Comment. Math. Helv. 15 (1942), S. 1, Satz IV.

Formen h_1, \dots, h_n hat W. HABICHT sie bewiesen²⁾. Sie soll nun für beliebige Polynome als richtig nachgewiesen werden.

In § 1 wird eine bemerkenswerte Beweismethode von DEDEKIND verwendet. Sie dient bei DEDEKIND und ebenso später bei KRULL³⁾ dazu, unter gewissen Voraussetzungen aus $P^r = P^{r+1}$ auf $P^r = 0$, oder allgemeiner aus $A = AP$ auf $A = 0$ zu schließen, wobei A ein beliebiges Ideal und P ein vom Einheitsideal E verschiedenes Primideal ist. Wird der DEDEKINDsche Beweis auf den Restklassenring E/Q' angewandt, wo Q' ein durch P teilbares Primärideal ist, so folgt, daß man aus $P^r = 0$ (P^{r+1}, Q') und $P \neq E$ auf $P^r = 0$ (Q') schließen kann.

Der Beweis in § 3 ist dem Beweise von HABICHT sehr ähnlich. Auch hier wird der Satz zuerst für den „allgemeinen Fall“, sodann durch Spezialisierung der Koeffizienten für jeden speziellen Fall bewiesen. Für die Spezialisierung verwendet HABICHT Resultantensysteme, während hier der Spezialisierungssatz von § 2 zur Anwendung kommt.

§ 1. Ein Kriterium für positive lokale Dimension.

Es sei $E = L[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynombereich über einem beliebigen Körper L . Es seien h_1, \dots, h_m Polynome aus E , und es sei H das Ideal (h_1, \dots, h_m) . Wird H als Durchschnitt von Primäridealen dargestellt:

$$(1) \quad H = [Q_1, Q_2, \dots, Q_t],$$

so kann man die lokale Dimension von H in O definieren als die höchste Dimension eines Ideals Q_k in (1), das O als Nullstelle hat. Dabei können wir O als Nullpunkt der Koordinaten annehmen; das zugehörige Primideal ist dann

$$P = (x_1, \dots, x_n).$$

Es gibt nun zwei Fälle:

Fall 1. Diejenigen Q_k , die O als Nullstelle haben, sind nulldimensional und haben daher O als einzige Nullstelle. In diesem Fall ist H höchstens nulldimensional in O . Auch der Fall, daß kein Q_k die Nullstelle O hat, fällt darunter.

Fall 2. Mindestens ein Q_k ist mehr als nulldimensional und hat O als Nullstelle. In diesem Fall ist H mindestens eindimensional in O .

Wir wollen nun ein algebraisches Kriterium aufstellen, das es gestattet, zwischen den Fällen 1 und 2 zu entscheiden. Das Kriterium ist im Grunde längst bekannt, aber, wie ich glaube, in der Literatur nicht leicht zu finden. Das Kriterium ist in den folgenden beiden Sätzen enthalten:

Satz 1. Ist H in O höchstens nulldimensional, so ist für genügend großes r

$$(2) \quad (H, P^r) = (H, P^{r+1}).$$

Satz 2. Gilt umgekehrt (2) für ein r , so ist H in O höchstens nulldimensional.

²⁾ W. HABICHT: Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme. Comment. Math. Helv. 18 (1946), S. 154.

³⁾ W. KRULL: Idealtheorie. Ergebn. d. Math. IV 3, S. 36.

Beweis 1. In (1) mögen etwa Q_1, \dots, Q_s die Nullstelle O haben, die übrigen Q_k nicht. Dann können wir statt (1) schreiben

$$(3) \quad H = [Q, R]$$

mit

$$Q = [Q_1, \dots, Q_s], \quad R = [Q_{s+1}, \dots, Q_t].$$

Eine genügend hohe Potenz P^r ist durch Q_1, \dots, Q_s , also durch Q teilbar:

$$(4) \quad P^r \equiv 0 (Q).$$

P^r und R haben keine gemeinsame Nullstelle; ihr größter gemeinsamer Teiler ist also das Einheitsideal:

$$(5) \quad E = (P^r, R).$$

Multipliziert man (5) mit Q , so folgt

$$Q = (P^r Q, R Q)$$

und daher

$$Q \equiv 0 (P^r, H).$$

Umgekehrt ist (P^r, H) teilbar durch Q , also hat man [wie in Mod. Alg. II, 2. Aufl., § 86, Gleichung (2)]

$$(6) \quad Q = (P^r, H)$$

und ebenso

$$(7) \quad Q = (P^{r+1}, H).$$

Aus (6) und (7) folgt unmittelbar die Behauptung (2).

Beweis 2. Aus (2) folgt

$$(8) \quad P^r \equiv 0 (H, P^{r+1}).$$

Nun sei Q' irgendeines von den Primäridealen Q_i aus (1), das O als Nullstelle hat. Wir wollen zeigen, daß Q' ein Teiler von P^r ist. Daraus folgt dann, daß Q' keine Nullstellen außer O hat.

Aus (8) folgt

$$(9) \quad P^r \equiv 0 (Q', P^{r+1}).$$

Nun sei $P^r = (u_1, u_2, \dots, u_h)$. Dann kann man statt (9) schreiben

$$u_i \equiv \sum p_{ik} u_k \pmod{Q'}$$

oder

$$(10) \quad \sum (\delta_{ik} - p_{ik}) u_k \equiv 0 \pmod{Q'},$$

wobei die p_{ik} zu P gehören. Ist D die Determinante der $\delta_{ik} - p_{ik}$, so folgt

$$(11) \quad D u_k \equiv 0 \pmod{Q'}.$$

Entwicklung der Determinante D ergibt

$$D = 1 + \dots,$$

wobei die Glieder ... alle durch P teilbar sind. Also folgt, daß D nicht Null wird im Punkte O , und daraus weiter, daß D nicht teilbar ist durch das zu Q' gehörige Primideal P' . Somit folgt aus (11)

$$u_k \equiv 0 (Q'),$$

d. h.

$$P^r \equiv 0 (Q').$$

Damit ist alles bewiesen.

Das durch die Sätze 1 und 2 gegebene Kriterium soll nun in ein Rangkriterium umgeformt werden. Die Anzahl der modulo (H, Pr) linear unabhängigen Polynome ist immer endlich, da es nur endlich viele Monome X_1, \dots, X_m vom Grade $< r$ gibt und alle höheren Monome $\equiv 0 \pmod{Pr}$ sind. Diese Anzahl sei δ_r . Wenn (H, Pr) ein echter Teiler von (H, Pr^{r+1}) ist, so ist natürlich $\delta_r < \delta_{r+1}$. Das Kriterium (2) kann somit auch als

$$\delta_r = \delta_{r+1}$$

geschrieben werden, und die Sätze 1 und 2 können so ausgedrückt werden:

Satz 3. Ist H in O höchstens nulldimensional, so ist δ_r von einem gewissen Index r an konstant:

$$\delta_r = \delta_{r+1} = \delta_{r+2} = \dots$$

Satz 4. Ist dagegen H in O mindestens eindimensional, so wächst δ_r immerfort an:

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots$$

Wird mit Polynomen modulo Pr gerechnet, so bedeutet das, daß alle Glieder vom Grade r und höher vernachlässigt werden. Die Monome X_1, \dots, X_m sind linear unabhängig \pmod{Pr} und bilden eine Basis für alle Polynome \pmod{Pr} . Der lineare Rang der Algebra E/Pr ist also gleich der Anzahl ω , genauer $\omega(r)$.

Alle Polynome im Ideal $H \pmod{Pr}$ werden erhalten, indem man h_1, \dots, h_m mit allen Monomen X_1, \dots, X_m multipliziert, die entstehenden $m\omega$ -Produkte durch Weglassung der Glieder vom Grade r und höher mod Pr reduziert und aus den so reduzierten Polynomen $Y_1, \dots, Y_{m\omega}$ Linearkombinationen $\sum c_j Y_j$ bildet. Die Anzahl der linear-unabhängigen unter den Y_j sei $\varrho(r)$. Man kann $\varrho(r)$ als Rang einer Matrix A erhalten, indem man für $j = 1, 2, \dots, m\omega$

$$(12) \quad Y_j = \sum a_{jk} X_k$$

schreibt.

Die a_{jk} sind die Elemente der „dialytischen Matrix“ A . SYLVESTER und HURWITZ haben in ihrer Resultantentheorie die dialytische Matrix schon benutzt. MACAULAY war geradezu ein Meister auf diesem Instrument⁴⁾.

Die Anzahl δ_r der modulo (H, Pr) linear unabhängigen Polynome ist nun offenbar die Differenz

$$(13) \quad \delta_r = \omega(r) - \varrho(r).$$

Dabei ist $\varrho(r)$ der Rang der Matrix A und $\omega(r)$ die Anzahl ihrer Spalten.

§ 2. Das Verhalten der lokalen Dimension bei Spezialisierung.

Die Koeffizienten der Polynome h_1, \dots, h_m mögen einem Erweiterungskörper L des Grundkörpers K angehören. Wir nennen die Koeffizienten t und nehmen an, es sei eine Spezialisierung $t \rightarrow t'$ gegeben, bei der alle algebraischen Relationen $f(t) = 0$ mit Koeffizienten aus K erhalten bleiben. Man

⁴⁾ F. S. MACAULAY: Algebraic Theory of Modular Systems. Cambridge Tracts in Math. 19 (1916).

kann sich z. B. vorstellen, daß die Koeffizienten t Polynome in Unbestimmten u mit Koeffizienten aus K sind und daß die Spezialisierung $t \rightarrow t'$ dadurch erhalten wird, daß die u durch irgendwelche Elemente u' eines Erweiterungskörpers L' von K ersetzt werden.

Satz 5. Bei einer Spezialisierung $t \rightarrow t'$ wird die lokale Dimension von V in irgendeinem Punkte B niemals kleiner.

Der Satz gilt auch dann, wenn bei einer Spezialisierung $t \rightarrow t'$ der Punkt B mitspezialisiert wird, so daß alle algebraischen Gleichungen $f(t, B) = 0$ erhalten bleiben. Wir wollen aber der Bequemlichkeit halber für B den Koordinatenanfangspunkt O wählen. Der allgemeine Fall kann darauf zurückgeführt werden, indem der Anfangspunkt nach B verschoben wird.

Beweis. Die lokale Dimension von V in O sei vor der Spezialisierung d , nach der Spezialisierung d' . Wir nehmen $d' < d$ an und wollen einen Widerspruch herleiten.

Ist $d' = 0$, so folgt der Widerspruch sofort aus der Formel (13) des § 1. Der Rang einer Matrix kann nämlich bei einer Spezialisierung niemals größer werden, also kann δ_r niemals kleiner werden. Ist nun $d' = 0$ und $d > 0$, so strebt nach Satz 4 δ_r gegen ∞ , während nach Satz 3 δ_r beschränkt bleiben würde. Das ist ein Widerspruch.

Ist $d' > 0$, so kann man d und d' je um eine Einheit vermindern, indem man zu den Polynomen h_1, \dots, h_m noch eine allgemeine Linearform hinzufügt. Setzt man das Verfahren fort, so wird schließlich $d' = 0$ und man erhält wie oben einen Widerspruch.

Wir geben nun noch einen zweiten *Beweis des Satzes 5*, der die Idealtheorie vermeidet, dafür aber mit der Cayleyform arbeitet.

Wir machen zunächst die Polynome h_1, \dots, h_m homogen in x_0, x_1, \dots, x_n . Ist nun die lokale Dimension gleich d , so gibt es eine d -dimensionale Kette z im projektiven Raum, die den Punkt O enthält und in den Hyperflächen $h_i = 0$ enthalten ist. Sind z_0, \dots, z_N die Koordinaten dieser Kette (d. h. die Koeffizienten ihrer zugeordneten Form), so kann man die Bedingungen, daß z eine Kette darstellt und daß diese den Punkt O enthält und in allen $h_i = 0$ enthalten ist, durch homogene Gleichungen in den z und t ausdrücken⁵⁾:

$$(14) \quad F_j(z, t) = 0.$$

Die Spezialisierung $t \rightarrow t'$ kann zu einer gleichzeitigen Spezialisierung $(z, t) \rightarrow (z', t')$ fortgesetzt werden, bei der (14) erhalten bleibt:

$$(15) \quad F_j(z', t') = 0.$$

Es gibt also eine Kette z' von der Dimension d , die den Punkt O enthält und in den spezialisierten Hyperflächen $h'_i = 0$ enthalten ist. Das heißt aber: die lokale Dimension von V' in O ist mindestens d .

⁵⁾ Siehe CHOW und VAN DER WAERDEN: ZAG 9 (Math. Ann. 113) oder ZAG 18 in diesem Annalenheft.

§ 3. Der Satz von ECKMANN für Polynome.

Als Vorbereitung dient

Satz 6. Polynome h_1, \dots, h_n in x_1, \dots, x_n , welche die Bedingung

$$(16) \quad x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n = 0$$

erfüllen, lassen sich immer so darstellen:

$$(17) \quad h_i = \sum f_{ik} x_k \text{ mit } f_{ik} = -f_{ki} \text{ und } f_{ii} = 0.$$

Beweis. Der von W. HABICHT für Formen gegebene Beweis (l. c.², S. 167) gilt ohne weiteres für Polynome.

Werden die Polynome f_{ik} als allgemeine Polynome irgendeines Grades, also mit lauter unbestimmten Koeffizienten angesetzt, so sprechen wir vom *allgemeinen Fall*, sonst von einem *speziellen Fall*.

Der Satz von ECKMANN bezieht sich auf ungerade Dimensionen n . Wir betrachten aber zunächst den Fall, daß n gerade ist.

Satz 7. Für gerade n im allgemeinen Fall ist die lokale Dimension des Ideals (h_1, \dots, h_n) im Koordinatenanfangspunkt O Null.

Beweis: Wäre die lokale Dimension im allgemeinen Fall positiv, so müßte sie nach Satz 5 bei jeder Spezialisierung der Koeffizienten der Polynome f_{ik} positiv bleiben. Wir spezialisieren nun die Polynome $f_{ik} = -f_{ki}$ zu Konstanten $c_{ik} = -c_{ki}$, deren Determinante nicht Null ist. Da die Dimension gerade ist, ist das immer möglich. Die Gleichungen

$$(18) \quad \sum c_{ik} x_k = 0$$

haben dann nur die Nulllösung, also ist die lokale Dimension Null. Also muß sie auch vor der Spezialisierung Null gewesen sein.

Nach diesen Vorbereitungen kann der Satz von ECKMANN für Polynome bewiesen werden:

Satz 8. Für ungerade n ist die lokale Dimension des Ideals (h_1, \dots, h_n) im Koordinatenanfangspunkt stets positiv.

Wir brauchen nur den allgemeinen Fall zu behandeln; durch Spezialisierung folgt der Satz dann für jeden speziellen Fall nach Satz 5.

Die f_{ik} seien also allgemeine Polynome irgendeines Grades und die h_i seien durch (17) definiert.

Die Gleichungen

$$(19) \quad h_2 = 0, h_3 = 0, \dots, h_n = 0$$

haben sicher die Lösung $(0, \dots, 0)$, die wir O genannt haben. Die Gleichung $h_2 = 0$ hat eine $(n-1)$ -dimensionale Lösungsvielfältigkeit. Nimmt man noch $h_3 = 0$ hinzu, so sind alle Bestandteile des Schnittes mindestens $(n-2)$ -dimensional. So weiterschließend, findet man schließlich, daß alle Bestandteile der durch (19) definierten Vielfältigkeit mindestens eindimensional sind. Der Punkt O ist also in einem mindestens eindimensionalen irreduziblen Teil J der Vielfältigkeit (19) enthalten.

Dieser Teil J liegt nicht in der Hyperebene $x_1 = 0$. Setzt man nämlich in (17) $x_1 = 0$ und beschränkt man sich auf h_2, \dots, h_n , so hat man genau den „allgemeinen Fall“ in $(n-1)$ -Dimensionen vor sich, und nach Satz 7 ist in diesem Fall die lokale Dimension des Ideals (h_2, \dots, h_n) im Punkte O Null.

Auf J sind h_2, h_3, \dots, h_n alle Null. Nach (16) ist dann auch das Produkt $x_1 h_1$ Null. Aber x_1 ist nicht Null auf J , wie wir eben gesehen haben. Also gilt $h_1 = 0$ auf J . Die lokale Dimension des Ideals (h_1, h_2, \dots, h_n) im Punkte O ist also positiv, q.e.d.

(Eingegangen am 11. März 1954.)

Zur algebraischen Geometrie 18. Ketten in mehrfach-projektiven Räumen.

Von

B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Ein *zweifach projektiver Raum* $S_{m,n}$ ist die Gesamtheit aller Punktepaare (x, y) , wobei x aus einem projektiven S_m und y aus einem projektiven S_n entnommen wird. Eine *Vielfältigkeit* in $S_{m,n}$ wird durch homogene Gleichungen definiert, die in den x und y einzeln homogen sind. Diese Begriffe wurden in ZAG 1 (Math. Ann. 108, S. 121) schon eingeführt. Die Vielfältigkeiten in $S_{m,n}$ heißen auch *Korrespondenzen*. Irreduzibilität und Dimension werden für sie genau so definiert wie für Vielfältigkeiten im S_n . Siehe auch ZAG 6 (Math. Ann. 110, S. 138).

Aus irreduziblen Vielfältigkeiten von derselben Dimension kann man *Ketten*, d. h. formale Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten bilden. Solche Ketten in $S_{m,n}$ wurden in ZAG 16 (Math. Ann. 125, S. 321) als Hilfsmittel benutzt. Es wurde gesagt, daß auch diese Ketten ihre Koordinaten haben, für welche ähnliche Sätze gelten wie für die Koordinaten von Ketten in S_n . Insbesondere wurden in ZAG 16, § 4 unter 1., 2., 3. die folgenden drei Sätze benutzt:

Satz 1. Ist K eine Kette in $S_{m,n}$ und C eine Kette in S_m , so kann die Relation zwischen K und C , die darin besteht, daß von den Punktepaaren (x, y) von K immer der erste Punkt zu C gehört, durch homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten von K und C ausgedrückt werden.

Satz 2. Die Bedingung, daß ein Punktepaar (x, y) auf einer Kette K liegt, kann durch homogene Gleichungen zwischen den x und y und den Koordinaten von K ausgedrückt werden.

Satz 3. Sind K und L Ketten in $S_{m,n}$, so kann die Relation, die besagt, daß alle Punkte von K zu L gehören, durch homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten von K und L ausgedrückt werden.

In allen diesen Fällen sind unter „homogene Gleichungen“ universell gültige homogene Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, die nur von den Gradzahlen der Ketten abhängen, zu verstehen. Die in diesen Gleichungen vorkommenden Ketten und Punkte dürfen also beliebig spezialisiert werden, ohne daß die Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren.

Eine formale Definition der Kettenkoordinaten wurde in ZAG 16 nicht gegeben und die Beweise der Sätze 1—3 wurden nur angedeutet. Einem von CHEVALLEY (Math. Reviews 14, S. 1012) geäußerten Wunsch entsprechend, sollen diese Definition und diese Beweise nun gegeben werden.

Es ist bekannt, daß durch die Abbildung

$$(1) \quad z_{ik} = x_i y_k$$

der Raum $S_{m,n}$ eineindeutig auf eine Bildvielfältigkeit U' in $S_{m+n+m+n}$ abgebildet werden kann. Die Gleichungen von U' lauten

$$(2) \quad z_{ik} z_{jl} = z_{il} z_{jk}.$$

Einer Vielfältigkeit V in $S_{m,n}$ entspricht dabei wieder eine Vielfältigkeit V' auf U' . Ist nämlich

$$(3) \quad f_k(x, y) = 0$$

ein System von Gleichungen für V , so kann man zunächst dafür sorgen, daß die Gleichungen (3) den gleichen Grad in den x wie in den y haben. Hat z. B. eine der Gleichungen (3) den Grad 3 in den x und 5 in den y , so multipliziert man die Gleichung der Reihe nach mit x_0^2 , mit x_1^2 , . . . , mit x_m^2 und erhält so $m+1$ neue Gleichungen, die in den x und in den y den gleichen Grad 5 haben und zusammen der Ausgangsgleichung äquivalent sind. Ersetzt man nun in diesen Gleichungen die Produkte $x_i y_k$ durch z_{ik} und fügt noch die Gleichungen (2) hinzu, so erhält man die Gleichungen von V' .

Umgekehrt entspricht jeder V' auf U' eine V in $S_{m,n}$. Ein System von Gleichungen für V erhält man nämlich durch Einsetzen von (1) in die Gleichungen von V' .

Einer Kette K in $S_{m,n}$ entspricht demnach eine Kette K' auf U' und umgekehrt. Wir definieren nun: *Die Koordinaten von K sind die von K' .*

Die Sätze 2 und 3 folgen nun unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen für den projektiven Raum:

Satz 2'. Die Bedingung, daß ein Punkt z auf einer Kette K' liegt, kann durch homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten des Punktes und der Kette ausgedrückt werden.

Satz 3'. Die Bedingung, daß eine Kette K' auf einer Kette L' liegt, kann durch homogene Gleichungen zwischen den Koordinaten von K' und L' ausgedrückt werden.

Satz 2' ist genau Satz 3 der gemeinsamen Arbeit ZAG 9 von CHOW und mir (Math. Ann. 113, S. 699). Die Gleichungen mögen heißen

$$(4) \quad g_j(k', z) = 0.$$

Um Satz 2 zu erhalten, braucht man nur (1) in (4) einzusetzen.

Der Beweis von Satz 3' ist im zweiten Absatz von § 2 der erwähnten Arbeit ZAG 9 enthalten. Da dieselbe Beweismethode auch Satz 1 ergeben wird, will ich den Beweis hier noch einmal geben.

Es seien $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$ die Schnittpunkte von K' mit d allgemeinen Hyperbenen $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$, wobei g der Grad und d die Dimension der Kette K' ist. Die p und u haben die drei Bedingungen von ZAG 9, Satz 1 zu erfüllen, die durch die dortigen Gleichungen (2), (3), (5) ausgedrückt werden. Nun füge man noch die Bedingungen hinzu, die nach Satz 2' ausdrücken, daß die Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$ alle auf L' liegen. Diese Bedingungen garantieren, daß alle Punkte von K' auf L' liegen. Sodann bilde man aus dem gesamten homogenen Gleichungssystem nach Mod. Alg. II, § 80 das Resultantensystem zunächst nach $p^{(1)}$, dann von den Resultanten wieder die Resultanten nach $p^{(2)}$, usw. bis alle $p^{(i)}$ eliminiert sind. Schließlich ordnet man die erhaltenen

Resultanten nach Potenzprodukten der Unbestimmten $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$ und setzt alle Koeffizienten Null. So erhält man die gesuchten Gleichungen zwischen den Koordinaten der Ketten K' und L' .

Aus Satz 3' ergibt sich unmittelbar Satz 3.

Der Beweis des Satzes 1 wird genau so geführt, wie der von Satz 3, nur muß man vorher die Gleichungen von C nach Satz 2' aufstellen. Sie mögen lauten

$$(5) \quad h_i(c, x) = 0,$$

wobei die c die Koordinaten von C sind. Diese Gleichungen kann man zunächst wieder gleichgradig in den x und y machen und dann die Produkte $x_i y_k$ durch z_{ik} ersetzen. So erhält man Gleichungen

$$(6) \quad H_j(c, z_{ik}) = 0,$$

die, mit (2) kombiniert, die Gleichungen des Bildes C' der Gesamtheit aller der Punktepaare (x, y) ergeben, deren Punkte x auf C liegen. In diese Gleichungen setzt man die Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$ von K' ein und verfährt weiter wie im Beweis des Satzes 3'.

(Eingegangen am 11. März 1954.)

Über das Anwachsen der C_κ -Mittel von LAPLACE-Integralen auf vertikalen Geraden.

Von

ALEXANDER PEYERIMHOFF in Gießen.

Ein LAPLACE-STIELTJES-Integral $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ ($\alpha(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall) heißt C_κ -summierbar ($\kappa \geq 0$) an einer Stelle $s = s_0$, wenn der $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\kappa} \int_0^x (x-t)^\kappa e^{-s_0 t} d\alpha(t)$ existiert. Es gibt stets eine Zahl β_κ ($-\infty \leq \beta_\kappa \leq +\infty$), so daß ein vorgegebenes LAPLACE-STIELTJES-Integral für alle s mit $\Re s > \beta_\kappa$, dagegen für kein s mit $\Re s < \beta_\kappa$ C_κ -summierbar ist. Für $\Re s > \beta_\kappa$ stellt der C_κ -Limes eine analytische Funktion $f(s)$ dar ($s = \sigma + i\tau$) und es gilt für $f(s)$ die Beziehung $\mu(\sigma) \leq \kappa + 1$ ¹⁾. Hier liegt nun die Frage nahe, ob diese Abschätzung verbessert werden kann, insbesondere wird man fragen, ob eine Verbesserung für die beiden wichtigsten Spezialfälle der LAPLACE-STIELTJES-Integrale, nämlich für eigentliche LAPLACE-Integrale ($\alpha(t)$ totalstetig in jedem endlichen Intervall) und für DIRICHLET-Reihen ($\alpha(t) = \text{Treppenfunktion}$) möglich ist. Für eigentliche LAPLACE-Integrale hat Herr DOETSCH auf diese Fragestellung kürzlich besonders hingewiesen²⁾.

Für DIRICHLET-Reihen wurde die Frage von BOHR³⁾ negativ beantwortet für beliebige $\kappa \geq 0$ durch die Konstruktion einer gewöhnlichen DIRICHLET-Reihe mit $\beta_\kappa = -\kappa$ ($\kappa \geq 0$), $\mu(\sigma) = 1 - \sigma$ für $\sigma \leq +1$ und $\mu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geq 1$. Herr JANSSON⁴⁾ gab für die Fälle $\kappa = 0$ und $\kappa = 1$ DIRICHLET-Reihen und eigentliche LAPLACE-Integrale an mit $\mu(\sigma) = 1$ für $\sigma > \beta_0$ bzw. $\mu(\sigma) = 2$ für $\sigma > \beta_1$. Diese Beispiele zeigen, daß $\mu(\sigma)$ die Grenze auch wirklich erreichen kann. Ferner geht aus ihnen hervor, daß es DIRICHLET-Reihen und eigentliche LAPLACE-Integrale ohne Beschränktheithalbebene gibt. Für diesen Sachverhalt (bei Integralen) gab Herr BLOCH kürzlich ein weiteres Beispiel⁵⁾.

Wir werden im folgenden die Frage für eigentliche LAPLACE-Transformationen mit beliebigem $\kappa \geq 0$ negativ beantworten⁶⁾. Darüber hinaus werden

¹⁾ $\mu(\sigma)$ bedeutet den fin aller Zahlen ξ mit $f(\sigma + i\tau) = o(|\tau|^\xi)$ für $|\tau| \rightarrow \infty$.

²⁾ DOETSCH [7], Probleme auf S. 175 und 333.

³⁾ BOHR [3, 4, 5, 6].

⁴⁾ JANSSON [11].

⁵⁾ BLOCH [2].

⁶⁾ Es genügt, wenn wir für alle κ mit $0 \leq \kappa < 1$ Gegenbeispiele angeben können, da das Produkt von zwei für $\Re s > 0$ C_{κ_1} bzw. C_{κ_2} summierbaren LAPLACE-Integralen als $C_{\kappa_1 + \kappa_2 + 1}$ -summierbares Integral für $\Re s > 0$ dargestellt werden kann. Dieser Sachverhalt wird von JANSSON [11] für den Fall $\mu(\sigma) = 2$ ausgenützt. Wir werden von dieser Bemerkung keinen Gebrauch machen, da der allgemeine Fall ohne wesentlichen Mehraufwand direkt behandelt werden kann.

wir zeigen, daß keine Abschätzung der Form $f(\sigma + i\tau) = O(1) \frac{\tau^{\kappa+1}}{\eta(\tau)}$ ($\tau \rightarrow \infty$) mit unbeschränkter Funktion $\eta(\tau)$ für ein beliebiges $\sigma > \beta_\kappa$ richtig ist. Es gibt sogar Funktionen mit $f(\sigma + i\tau) \neq O(1) \frac{\tau^{\kappa+1}}{\eta(\tau)}$ für alle rationalen $\sigma > \beta_\kappa$ (und allgemeiner für beliebig liegende, abzählbar viele $\sigma > \beta_\kappa$). Gleichzeitig wird aus unseren Überlegungen hervorgehen, daß bei DIRICHLET-Reihen für ganzes κ die Dinge ganz entsprechend liegen.

Zum Nachweis der Existenz von Gegenbeispielen verwenden wir einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis. Wir werden zunächst in § 1 eine Klasse von Funktionenräumen konstruieren, aus denen wir die Gegenbeispiele entnehmen. Wir schätzen die Norm eines gewissen linearen Funktionals in diesen Räumen nach unten ab (Lemma 3) und können daraus in § 2 fast unmittelbar die Existenz von Gegenbeispielen erschließen⁷⁾.

1. Die Räume $E(\lambda, k)$.

1. 1. Wir gehen aus von einer Folge $\{\lambda_n\}$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \lambda_0 \geq 0, \quad \Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0 \quad (n \geq 0), \quad \lambda_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

und erklären für jedes n und eine beliebige ganze Zahl $k \geq 0$ eine Treppenfunktion $a_{\lambda_n}^k(t) = \sum_{\vartheta_v < t} (-1)^v \binom{k+1}{v}$ mit $\vartheta_v = \vartheta_v(n) = \lambda_n + v \frac{|\Delta \lambda_n|}{k+1}$ ($v = 0, 1, \dots, k+1$).

Weiter sei

$$(2) \quad f_{\lambda_n}^k(x) = \int_0^x (x-t)^k d a_{\lambda_n}^k(t) = \sum_{\vartheta_v(n) < x} (-1)^v \binom{k+1}{v} (x - \vartheta_v)^k.$$

Lemma 1. Die Funktionen $f_{\lambda_n}^k(x)$ besitzen folgende Eigenschaften

$$(3) \quad f_{\lambda_n}^k(x) = 0 \quad \text{für } x \leq \lambda_n \quad \text{und} \quad x > \lambda_{n+1},$$

$$(4) \quad |f_{\lambda_n}^k(x)| \leq K |\Delta \lambda_n|^k, \quad \text{wo die Konstante } K \text{ nur von } k \text{ abhängt.}$$

Beweis. Für $x \leq \lambda_n$ ist (3) selbstverständlich und für $x > \lambda_{n+1}$ ist nach (2)

$$f_{\lambda_n}^k(x) = \sum_{v=0}^{k+1} (-1)^v \binom{k+1}{v} (x - \vartheta_v)^k = \Delta \lambda_n^{k+1} (x - \lambda_n)^k = 0 \left(h = \frac{\Delta \lambda_n}{k+1} \right),$$

da die $(k+1)$ -te Ableitung von x^k verschwindet. Die Abschätzung (4) kann wegen (3) unmittelbar aus der Definition (2) abgelesen werden.

1. 2. Den Raum aller Funktionen

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{f_{\lambda_n}^k(x)}{|\Delta \lambda_n|^k}$$

mit (komplexen) beschränkten Folgen $\{c_n\}$ bezeichnen wir mit $E(\lambda, k)$.

Lemma 2. Erklärt man für jedes $\varphi \in E(\lambda, k)$ eine Norm durch $\|\varphi\| = \overline{\lim}_{x \geq 0} |\varphi(x)|$, so ist $E(\lambda, k)$ ein BANACH-Raum.

⁷⁾ Die im folgenden auftretenden eigentlichen LAPLACE-Integrale sind im LEBESGUE-Sinn zu verstehen. Betrachtet man allgemeiner DENJOY-Integrale, so läßt sich im Falle $\kappa = 0$ die Existenz von Gegenbeispielen aus einem Satz von SARGENT [13] folgern.

Beweis. Erklärt man die Addition zweier Elemente und die Multiplikation eines Elementes mit einer (komplexen) Zahl in natürlicher Weise, so ist $E(\lambda, k)$ ein linearer Raum und wegen (3) und (4) ist $\|\varphi\| < \infty$ für jedes $\varphi \in E(\lambda, k)$. Eine einfache Überlegung zeigt nun, daß durch $\sup_{x \geq 0} |\varphi(x)|$ tatsächlich eine Norm erklärt wird. Die Vollständigkeit von $E(\lambda, k)$ schließlich folgt unmittelbar aus dem CAUCHYSCHEN Konvergenzprinzip (der Raum der beschränkten Folgen ist vollständig).

1. 3. Für jede Zahl $\sigma > 0$ wird durch

$$(6) \quad \Phi_\tau(\varphi(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt \quad (\varphi \in E(\lambda, k), s = \sigma + i\tau)$$

ein lineares Funktional in $E(\lambda, k)$ erklärt.

Lemma 3. Erfüllt $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (1) und ist außerdem $|\Delta \lambda_n| = O(1)$, so gilt für die Norm des linearen Funktionals (6) die Abschätzung

$$(7) \quad \|\Phi_\tau\| \geq C(\sigma) e^{-\lambda_n \sigma} \quad (\sigma > 0),$$

wo $n_0 = n_0(\tau)$ die kleinste Zahl n mit $h_n \leq \frac{1}{|\tau|}$ für $m \geq n$ ($h_n = \frac{|\Delta \lambda_n|}{k+1}$) und $C(\sigma) > 0$ ist.

Beweis. Durch Einsetzen von (2) in (5) folgt nach einfacher Rechnung [beachte (3)] aus (6) die Beziehung

$$\Phi_\tau(\varphi(t)) = \frac{\Gamma(k+1)}{\sigma^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n \sigma} \frac{(1 - e^{-h_n \sigma})^{k+1}}{|\Delta \lambda_n|^k}.$$

Für $n \geq n_0$ ist nun

$$|1 - e^{-h_n \sigma}| = |s| \left| \int_0^{h_n} e^{-su} du \right| \geq |s| \left| \int_0^{h_n} e^{-\sigma u} \cos u \tau du \right| \geq \delta |s| h_n e^{-h_n \sigma} \quad (\delta = \cos 1 > 0).$$

Setzt man nun^{a)} $c_n = \text{sign}(1 - e^{-h_n \sigma})^{k+1} e^{-\lambda_n \sigma}$, so gilt für die zugehörige Funktion $\varphi(t)$ wegen (3) und (4) eine Abschätzung $\|\varphi\| \leq K$ und es ist

$$\begin{aligned} |\Phi_\tau(\varphi(t))| &= \frac{\Gamma(k+1)}{|s|^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma} \frac{|1 - e^{-h_n \sigma}|^{k+1}}{|\Delta \lambda_n|^k} \\ &\geq C \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-\lambda_{n+1} \sigma} |\Delta \lambda_n| \geq C_1(\sigma) \int_{\lambda_{n_0}}^{\infty} e^{-u \sigma} du^b) = \frac{C_1(\sigma)}{\sigma} e^{-\lambda_{n_0} \sigma}. \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt die Behauptung (7) unmittelbar wegen

$$|\Phi_\tau(\varphi(t))| \leq \|\Phi_\tau\| \|\varphi\| \leq K \|\Phi_\tau\|.$$

1. 4. Aus (5) und (2) folgt, daß jedes $\varphi(x) \in E(\lambda, k)$ dargestellt werden kann durch

$$(8) \quad \varphi(x) = \int_0^x (x-t)^k d\alpha_k(t) \quad (k \geq 0 \text{ ganz});$$

^{a)} Für $\alpha \neq 0$ ist $\text{sign } \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$.

^{b)} Hier ist zu beachten, daß $|\Delta \lambda_n| = O(1)$ ist.

dabei ist $\alpha_k(t) = \sum c_n \frac{a_{\lambda_n}^k(t)}{|\Delta \lambda_n|^k}$ eine Treppenfunktion mit Sprungstellen $t = \mu_n$ ($n = 0, 1, \dots$), wo die Folge $\{\mu_n\}$ aus allen $\vartheta_\nu(n)$ ($n = 0, 1, \dots, \nu = 0, 1, \dots, k$) nach wachsender Größe geordnet besteht. Die Folge $\{\mu_n\}$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (1).

Für $k > 0$ kann (2) umgeformt werden zu

$f_{\lambda_n}^k(x) = k \int_0^x (x-t)^{k-1} a_{\lambda_n}^k(t) dt$, d. h. $f_{\lambda_n}^k(x)$ ist k -faches Integral einer gewissen Treppenfunktion ($\Gamma(k+1) a_{\lambda_n}^k(t)$). Für jedes $\kappa > 0$ mit $k-1 < \kappa \leq k$ ($k \geq 1$ ganz) können wir $f_{\lambda_n}^k(x)$ auch als κ -faches Integral einer in jedem endlichen Intervall integrierbaren (und für nicht ganze κ sogar stetigen) Funktion darstellen in der Gestalt $f_{\lambda_n}^k(x) = \kappa \int_0^x (x-t)^{\kappa-1} a_{\lambda_n}^\kappa(t) dt$. Hier darf für $a_{\lambda_n}^\kappa(t)$ z. B.

die Funktion $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(k-\kappa+1)} \sum_{\vartheta_\nu(n) < x} (-1)^\nu \binom{k+1}{\nu} (x-\vartheta_\nu)^{k-\kappa}$ gewählt werden, wie eine einfache Rechnung zeigt. Nach Wahl einer Zahl $\kappa > 0$ kann also jedes $\varphi \in E(\lambda, k)$ ($k-1 < \kappa \leq k$, $k \geq 1$ ganz) dargestellt werden in der Gestalt

$$(9) \quad \varphi(x) = \kappa \int_0^x (x-t)^{\kappa-1} \alpha_\kappa(t) dt \quad \left(\kappa > 0, \alpha_\kappa(t) = \sum c_n \frac{a_{\lambda_n}^\kappa(t)}{|\Delta \lambda_n|^\kappa} \right).$$

2. Anwendung der Räume $E(\lambda, k)$.

Wir verwenden im folgenden die Räume $E(\lambda, k)$ zum Beweis der in der Einleitung genannten Behauptungen.

2.1. Lemma 4. Ist $\eta(\tau) > 0$ ($\tau > 0$) eine unbeschränkte Funktion für $\tau \rightarrow \infty$, so gibt es zu jedem $k \geq 0$ einen Raum $E(\lambda, k)$ und ein $\varphi(x) \in E(\lambda, k)$ mit

$$(10) \quad \eta(\tau) \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt \neq 0 \quad (1) \quad \text{für } \tau \rightarrow \infty \text{ und alle rationalen } \sigma > 0.$$

Beweis. Es sei $\{\tau_\nu\}$ ($\nu = 3, 4, \dots$) eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $\eta(\tau_\nu) > \nu$. Wir setzen $\xi_\nu = \log_2 \nu$ und schalten zwischen ξ_ν und $\xi_{\nu+1}$ gewisse Zahlen $\omega_i = \omega_i(\nu)$ ($i = 0, 1, \dots, j(\nu)$, $\omega_{i+1} > \omega_i$, $\omega_0 = \xi_\nu$, $\omega_{j(\nu)} = \xi_{\nu+1}$) ein, so daß $\omega_{i+1} - \omega_i \leq \frac{1}{\tau_\nu}$ ist. Ordnet man die $\omega_i(\nu)$ ($\nu = 3, 4, \dots$, $i = 0, 1, \dots, j(\nu) - 1$) nach wachsender Größe, so entsteht eine Folge $\{\lambda_n\}$, welche (1) und $|\Delta \lambda_n| = O(1)$ erfüllt mit $\lambda_{n_\nu}(\tau_\nu) \leq \log_2 \nu$ (für jedes $k \geq 0$). Im Raum $E(\lambda, k)$ sind nun die Normen der linearen Funktionale $\varphi_\tau(\varphi(t)) = \eta(\tau) \Phi_\tau(\varphi(t))$ nicht beschränkt, da nach (7) gilt

$$\|\varphi_{\tau_\nu}\| = \eta(\tau_\nu) \|\Phi_{\tau_\nu}\| \geq C(\sigma) \eta(\tau_\nu) e^{-\lambda_{n_\nu}(\tau_\nu)\sigma} \geq C(\sigma) \frac{\nu}{(\log \nu)^\sigma} \rightarrow \infty \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

Nach einem bekannten Satz¹⁰⁾ gibt es also ein $\varphi \in E(\lambda, k)$, so daß (10) gilt.

¹⁰⁾ Vgl. BANACH [1] S. 81, th 7. Dieser Satz gilt auch für komplexe Räume und Funktionale (vgl. HILLE [10], Kap. II).

2. 2. Aus Lemma 4 können wir nun die angekündigten Ergebnisse über LAPLACE-Integrale unmittelbar ableiten.

Satz 1. Ist $\eta(\tau) > 0$ ($\tau > 0$) eine unbeschränkte Funktion für $\tau \rightarrow \infty$, so gibt es zu jeder Zahl $\kappa \geq 0$ ein für $\Re s > 0$ zum Wert $f(s)$ C_κ -summierbares LAPLACE-Integral $\int_0^\infty e^{-st} a(t) dt$ mit

$$(11) \quad f(\sigma + i\tau) \neq O(1) \frac{\tau^{\kappa+1}}{\eta(\tau)} \text{ für } \tau \rightarrow \infty \text{ und alle rationalen } \sigma > 0.$$

Beweis. Es sei $r \geq 0$ ganz und $r < \kappa + 1 \leq r + 1$. Nach Lemma 4 gibt es in einem Raum $E(\lambda, r + 1)$ ein Element φ , für das (10) gilt. Nach (9) kann dieses φ dargestellt werden durch $\varphi(x) = (\kappa + 1) \int_0^x (x - t)^\kappa \alpha(t) dt$. Wegen $\varphi(x) = O(1)$ ist das Integral $\int_0^\infty e^{-st} \alpha(t) dt$ für $\Re s > 0$ C_κ -summierbar und sein C_κ -Limes $f(s)$ wird dort gegeben durch $\frac{s^{\kappa+1}}{\Gamma(\kappa + 2)} \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt^{11)}$, so daß (11) erfüllt ist für diese Funktion.

Satz 2. Ist $\eta(\tau) > 0$ ($\tau > 0$) eine unbeschränkte Funktion für $\tau \rightarrow \infty$, so gibt es zu jeder ganzen Zahl $k \geq 0$ eine für $\Re s > 0$ zum Wert $f(s)$ (μ, k) -summierbare DIRICHLET-Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-\mu_n s}$ mit

$$(12) \quad f(\sigma + i\tau) \neq O(1) \frac{\tau^{\kappa+1}}{\eta(\tau)} \text{ für } \tau \rightarrow \infty \text{ und alle rationalen } \sigma > 0.$$

Beweis. Nach Lemma 4 gibt es in einem Raum $E(\lambda, k)$ ein φ , für das (10) gilt. Nach 1.4, (8) kann dieses φ dargestellt werden durch $\varphi(x) = \int_0^x (x - t)^\kappa d\alpha(t)$, wo $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ eine DIRICHLET-Reihe vom Typ $\{\mu_n\}$ ist. Diese DIRICHLET-Reihe ist für $\Re s > 0$ (μ, k) -summierbar zum Wert $\frac{s^{\kappa+1}}{\Gamma(k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt^{12)}$, so daß (12) erfüllt ist für diese Reihe.

Bemerkung: Der Beweis von Lemma 4 lehrt, daß dieses Lemma und damit auch die Sätze 1 und 2 richtig sind für beliebig gegebene abzählbar viele $\sigma > 0$.

2. 3. Wir haben bisher allgemein die Existenz von Gegenbeispielen nachgewiesen. Das wesentliche Hilfsmittel war ein funktionalanalytischer Satz beim Beweis von Lemma 4. Diesen Satz kann man vermeiden und Gegenbeispiele durch eine Konstruktion finden. Die Verhältnisse liegen hier ganz analog wie beim Beweis des bekannten Satzes von TOEPLITZ, wo funktional-

¹¹⁾ Vgl. DOETSCH [7], S. 315 Satz 2 für $\kappa > 0$; in diesem Fall ist $\varphi(x) = o(x^\kappa)$, also $\int_0^\infty e^{-st} \alpha(t) dt$ für $s = 0$ C_κ -summierbar. Für $\kappa = 0$ ergibt sich diese Darstellung durch partielle Integration.

¹²⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [9], S. 39 th. 24 und die Bemerkungen in der vorangehenden Fußnote.

analytische Beweise genau den bei Lemma 4 verwendeten Satz heranziehen¹³⁾ und konstruktive Beweise auf der Methode des „gleitenden Buckels“ beruhen¹⁴⁾. Die Ergebnisse dieses Paragraphen lehren, aus welchen Räumen wir bei der Durchführung einer Konstruktion die Gegenbeispiele entnehmen können.

Wenn wir in den Sätzen 1 und 2 nicht ein beliebiges $\eta(\tau)$ zulassen, sondern uns nur mit der Frage beschäftigen, ob die Abschätzung $\mu(\sigma) \leq \kappa + 1$ verbessert werden kann, so können wir in übersichtlicher Weise solche Räume $E(\lambda, k)$ angeben, in denen die Gegenbeispiele vorkommen. Zur Verneinung dieser Frage dürfen wir in Lemma 4 den Raum $E(\log(n+1), k)$ wählen. Für ein passendes φ aus diesem Raum ist nämlich (10) für $\eta(\tau) = \tau^\sigma$ erfüllt, wenn $\sigma < \varepsilon$ ist, da $n_0(\tau) < \frac{\tau}{k+1}$, also $\lambda_{n_0} < \log\left(\frac{\tau}{k+1} + 1\right)$ und $\tau^\sigma e^{-\sigma \lambda_{n_0}(\tau)} \geq \frac{\tau^\sigma}{\left(\frac{\tau}{k+1} + 1\right)^\sigma} \neq O(1)$ ist für $\sigma < \varepsilon$ und $\tau \rightarrow \infty$. Im Falle der

DIRICHLET-Reihen kann also für $k=0$ eine gewöhnliche DIRICHLET-Reihe mit $\beta_0 = 0$ und $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mu(\sigma) = 1$ gefunden werden (vgl. den Beweis von Satz 2).

Derartige Beispiele gab BOHR¹⁵⁾. In ähnlicher Weise erkennt man, daß zur Angabe von Beispielen mit $\mu(\sigma) = \kappa + 1$, $\sigma > 0$ ($\beta_\kappa = 0$) bei Lemma 4 die Räume $E(\log_2(n+3), k)$ ausreichen¹⁶⁾.

Literatur.

- [1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] BLOCH, P. H.: Über eine LAPLACE-Transformierte, welche in keiner Halbebene beschränkt ist. *Compositio Math.* **9**, 289—292 (1951). — [3] BOHR, H.: Bidrag til de DIRICHLET'ske Raekkers Theori. Kopenhagen 1910. — [4] BOHR, H.: Über das Koeffizientendarstellungsproblem DIRICHLETScher Reihen. *Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd.* **20**, Nr 2 (1942). — [5] BOHR, H.: Zur Theorie der DIRICHLETSchen Reihen. *Math. Zeitschr.* **52**, 709—722 (1950). — [6] BOHR, H.: On the summability function and the order function of Dirichlet series. *Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd.* **27**, Nr 4 (1952). — [7] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I. Birkhäuser, Basel 1950. — [8] HARDY, G. H.: Divergent series, Oxford 1949. — [9] HARDY, G. H. und M. RIESZ: The general theory of DIRICHLET's series. Cambridge 1915. — [10] HILLE, E.: Funktional analysis and semi groups. New York 1948. — [11] JANSSON, T.: Über die Größenordnung DIRICHLETScher Reihen. *Arkiv för Math., Astr. och Fys.* **15**, Nr 6 (1921). — [12] KNOPP, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. *Rendiconti Roma* (5) **11**, 269—298 (1952). — [13] SARGENT, W. L. C.: On some theorems of Hahn, Banach and Steinhaus. *Journ. Lond. Math. Soc.* **28**, 438—451 (1953).

(Eingegangen am 17. Januar 1954.)

¹³⁾ Vgl. z. B. BANACH [1], S. 91, (th. 5, s. 80 folgt aus th. 7, s. 81) KNOPP [12], S. 274—276.

¹⁴⁾ Vgl. z. B. HARDY [8], S. 43—46. Hinweise zur Anwendung dieser Methode bei DIRICHLET-Reihen finden sich bei BOHR [4], S. 8—9.

¹⁵⁾ BOHR [3, 4, 5, 6]; die Bedingung $\sigma < \varepsilon$ ist selbstverständlich; da bei gewöhnlichen DIRICHLET-Reihen mit $\beta_0 = 0$ stets $\mu(\sigma) \leq 1 - \sigma$ ($0 < \sigma \leq 1$) ist.

¹⁶⁾ Solche Räume verwendet JANSSON [11].

Über die Existenz einer Normalform analytischer HAMILTONscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.

Von

CARL LUDWIG SIEGEL in Göttingen.

1. Einleitung.

Es sei

$$(1) \quad \frac{dx_k}{dt} = P_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

ein System von m Differentialgleichungen erster Ordnung für m Funktionen x_1, \dots, x_m der reellen Variablen t , deren rechte Seiten P_1, \dots, P_m durch konvergente Potenzreihen in x_1, \dots, x_m mit reellen konstanten Koeffizienten gegeben sind. Die konstanten Glieder dieser Potenzreihen seien sämtlich gleich 0, so daß also der Nullpunkt $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$ eine Gleichgewichtslösung von (1) liefert. Übt man eine den Nullpunkt erhaltende konvergente umkehrbare Potenzreihen-Substitution

$$(2) \quad y_k = F_k(x_1, \dots, x_m) \quad (k = 1, \dots, m)$$

mit reellen konstanten Koeffizienten aus, so geht (1) über in

$$(3) \quad \frac{dy_k}{dt} = Q_k,$$

wobei in

$$(4) \quad Q_k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_i} P_i$$

die Variablen x_1, \dots, x_m mittels der inversen Substitution durch y_1, \dots, y_m auszudrücken sind. Ist umgekehrt das System (3) mit irgendwelchen konvergenten Potenzreihen Q_k in y_1, \dots, y_m gegeben, so kann man nach der Existenz einer konvergenten Substitution (2) fragen, welche (1) in (3) überführt, also nach einer Lösung der partiellen Differentialgleichungen (4) durch konvergente Reihen F_1, \dots, F_m .

Eine notwendige Bedingung für die Transformierbarkeit von (1) in (3) erhält man durch Lösung des entsprechenden linearen Problems, indem man die Potenzreihen P_k, F_k, Q_k durch ihre Bestandteile ersten Grades ersetzt. Sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{F}, \mathfrak{Q}$ die Matrizen aus den Koeffizienten dieser linearen Formen, so folgt aus (4) die Beziehung $\mathfrak{Q}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{P}$, und es ergibt sich damit das charakteristische Polynom $P(\lambda) = |\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{P}|$ als eine Invariante gegenüber der Gruppe Γ aller Transformationen (2). Man ordne noch dem Polynom $P(\lambda) = \lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \dots + p_m$ im m -dimensionalen euklidischen Raum den Punkt p mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten p_1, \dots, p_m zu. In einer kürzlich

erschienenen Untersuchung [1] wurde nachgewiesen, daß im allgemeinen $P(\lambda)$ bereits das volle Invariantensystem von (1) bezüglich Γ ergibt. Gehört nämlich p nicht einer gewissen Ausnahmemenge vom LEBESGUESchen Maße 0 an, so läßt sich durch eine geeignete konvergente Substitution $x_k \rightarrow F_k(x_1, \dots, x_m) = x_k + \dots$ das System (1) in das linearisierte System

$$(5) \quad \frac{dx_k}{dt} = L_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

überführen, wobei L_k den linearen Teil von P_k bedeutet. Die Ausnahmemenge läßt sich folgendermaßen arithmetisch näher beschreiben. Es gehören nämlich zu ihr höchstens solche Punkte p , für welche der mit den entsprechenden Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $P(\lambda) = 0$ gebildete Ausdruck

$$\frac{\log(|\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m|^{-1})}{\log(|g_1| + \dots + |g_m| + 1)} = q(g_1, \dots, g_m)$$

beliebig große Werte annimmt, wenn für g_1, \dots, g_m alle Systeme ganzer Zahlen außer 0, \dots , 0 gesetzt werden. An dem genannten Satze über die Transformation von (1) in (5) ist bemerkenswert, daß seine Aussage von den Gliedern höheren Grades in den P_k ganz unabhängig ist.

Durch die Bedingung der Beschränktheit der Quotienten $q(g_1, \dots, g_m)$ wird insbesondere der Fall ausgeschlossen, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ linear abhängig sind, daß also eine nicht-triviale Relation $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m = 0$ mit geeigneten ganzen g_1, \dots, g_m besteht. Dies tritt nun aber gerade immer in dem besonders wichtigen Fall auf, daß es sich um ein HAMILTONsches System von Differentialgleichungen handelt, da dann bekanntlich die Eigenwerte in Paare entgegengesetzt gleicher zerfallen. Andererseits weiß man seit langer Zeit, daß sich für HAMILTONsche Systeme durch eine kanonische Potenzreihen-Substitution doch eine gewisse Normalform herstellen läßt, wobei aber die Frage der Konvergenz dieser Substitution bisher nur in ganz speziellen Fällen entschieden wurde.

Es sei H eine konvergente Potenzreihe in den $2n$ Variablen x_k, y_k ($k = 1, \dots, n$) mit reellen Koeffizienten, deren lineare Glieder fortfallen, und es seien in geeigneter Anordnung $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ die zu dem HAMILTONschen System

$$(6) \quad \frac{dx_k}{dt} = H_{y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -H_{x_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

gehörigen Eigenwerte. Es werde vorausgesetzt, daß keine nicht-triviale Relation $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0$ mit ganzen g_1, \dots, g_n besteht. Dann läßt sich eine kanonische Potenzreihen-Substitution $x_k \rightarrow u_k, y_k \rightarrow v_k$ ($k = 1, \dots, n$) mit reellen oder komplexen Koeffizienten so angeben, daß H eine Potenzreihe in den n Produkten $u_k v_k = \omega_k$ allein wird. Im Falle der Konvergenz dieser Substitution ist die Integration des transformierten Systems

$$\frac{du_k}{dt} = H_{v_k}, \quad \frac{dv_k}{dt} = -H_{u_k}$$

wegen

$$H_{v_k} = u_k H_{\omega_k}, \quad H_{u_k} = v_k H_{\omega_k}$$

sofort auszuführen. Sind nämlich ξ_k, η_k die Anfangswerte von u_k, v_k für $t = 0$, so ergibt sich ω_k als die Konstante $\xi_k \eta_k$ und

$$u_k = \xi_k e^{H \omega_k t}, \quad v_k = \eta_k e^{-H \omega_k t} \quad (k = 1, \dots, n),$$

womit die allgemeinen Lösungen x_k, y_k in rein trigonometrischer Form gefunden sind.

Dieses Verfahren ist in anderer Gestalt zuerst in den Arbeiten von DE LAUNAY [2] und LINDSTEDT [3] zur Himmelsmechanik aufgetreten und wurde später von POINCARÉ [4] näher untersucht. Dort wird vorausgesetzt, daß $H = H_0 + \nu H_1 + \nu^2 H_2 + \dots$ außer von den $2n$ Variablen x_k, y_k auch noch von einem Störungsparameter ν analytisch abhängt und daß H_0 bereits eine Funktion der n Produkte $x_k y_k$ allein ist. Nach Einführung von Polarkoordinaten integrierte nun POINCARÉ die JACOBI-HAMILTONsche partielle Differentialgleichung durch eine gewisse Potenzreihe in ν , welche dann zu den Lösungen in rein trigonometrischer Form führt. Andererseits zeigte er aber, daß unter bestimmten Voraussetzungen über H_0 und H_1 das HAMILTONsche System (6) kein in den x_k, y_k und ν analytisches Integral haben kann, das von H unabhängig ist, und konnte hieraus den Schluß ziehen, daß die für die Lösungen gefundenen trigonometrischen Reihen nicht konvergieren, wenn sie als Potenzreihen in ν geschrieben werden. Nach Vorarbeiten von WHITTAKER [5] wurde sodann die direkte kanonische Potenzreihen-Transformation einer von ν unabhängigen HAMILTONschen Funktion in die Normalform durch BIRKHOFF [6] und CHERRY [7] gegeben, wobei allerdings die Realitätsuntersuchung übergangen wurde. Vor allem aber blieb im vorliegenden Falle die Konvergenzfrage bis jetzt unbeantwortet, da das POINCARÉsche Ergebnis sich auf variables ν bezieht. Man kann zwar durch die Substitution $x_k = \nu \hat{x}_k, y_k = \nu \hat{y}_k, H(x, y) = \nu^2 \hat{H}(\hat{x}, \hat{y})$ einen Parameter ν hereinbringen und damit auf einen speziellen Fall des von POINCARÉ behandelten Problems kommen; doch zeigt sich dabei, daß jene Voraussetzungen über H_0 und H_1 dann nicht erfüllt sind und deshalb auf diese Weise keine Aussage über Divergenz entsteht. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, unter genau anzugebenden Voraussetzungen zu beweisen, daß die kanonische Transformation eines HAMILTONschen Systems in die Normalform im allgemeinen divergiert. Dies Resultat ist von BIRKHOFF und anderen Sachverständigen als „höchst wahrscheinlich“ bezeichnet worden; trotzdem erscheint es nun nach dem neuerdings gefundenen Satze über das System (1) nicht mehr so völlig plausibel.

Beim Divergenzbeweise werden wir uns auf den Fall beschränken, daß $n = 2$ ist und die Eigenwerte λ_1, λ_2 rein imaginär sind. Die Annahme der linearen Unabhängigkeit besagt dann, daß der Quotient $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ eine irrationale reelle Zahl ist. Man kann zunächst durch eine vorbereitende kanonische lineare Substitution mit komplexen Koeffizienten erreichen, daß die neuen Variablen x_k, y_k ($k = 1, 2$) konjugiert komplex sind und H nach Fortlassung des konstanten Gliedes eine mit $\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2$ beginnende rein imaginäre Potenzreihe wird, die also der Bedingung $H(x, y) = -H(y, x)$ genügt. Damit haben in H die Anfangsglieder bereits die gewünschte Normalform. Aus der

formalen — konvergenten oder divergenten — Transformierbarkeit in die vollständige Normalform erhält man für jedes natürliche $s > 2$ die Existenz einer konvergenten kanonischen Potenzreihen-Substitution $x_k \rightarrow x_k + \dots$, $y_k \rightarrow y_k + \dots$ ($k = 1, 2$), welche in H bei allen Gliedern kleineren als s -ten Grades die Normalform liefert. Also kann man weiter $H = F + G$ voraussetzen, wo $F = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots$ ein Polynom in den zwei Variablen $z_k = x_k y_k$ vom Grade $< \frac{s}{2}$ mit rein imaginären Koeffizienten und $G(x, y) = -\bar{G}(y, x)$ eine mit Gliedern s -ten Grades beginnende konvergente Potenzreihe in x_1, y_1, x_2, y_2 bedeuten. Es werde noch angenommen, daß F nicht ein Polynom in $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ allein ist, d. h. daß $\lambda_2 F_{z_1} - \lambda_1 F_{z_2}$ nicht identisch verschwindet; dann ist insbesondere $s > 4$. Indem man ferner x_k, y_k, H durch $r x_k, r y_k, r^{-2} H(r x, r y)$ mit genügend kleinem $r > 0$ ersetzt, kann man erreichen, daß alle Koeffizienten von $H - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2$ absolut ≤ 1 sind. Wir halten nunmehr F fest und fassen sämtliche Koeffizienten von G als komplexe Unbestimmte a vom absoluten Betrage $|a| \leq 1$ auf, die nur der Realitätsbedingung $G(x, y) = -\bar{G}(y, x)$ zu genügen haben, und können sodann von dem Raum \mathfrak{H} der Funktionen $H = F + G$ mit den Koordinaten a sprechen. Eine Folge in \mathfrak{H} möge konvergent heißen, wenn alle Folgen entsprechender Koordinaten konvergieren. Unsere oben aufgestellte Behauptung, daß im allgemeinen keine konvergente kanonische Transformation in die Normalform existiert, läßt sich jetzt schärfer formulieren.

Satz: *Es gibt abzählbar unendlich viele analytisch unabhängige Potenzreihen Φ_1, Φ_2, \dots in den unendlich vielen Variablen a , welche für $|a| \leq 1$ absolut konvergieren, mit folgender Eigenschaft: Ist ein Punkt H aus \mathfrak{H} konvergent in die Normalform transformierbar, so verschwinden in ihm fast alle Φ_l ($l = 1, 2, \dots$). Diese H bilden in \mathfrak{H} eine Teilmenge erster Kategorie und ihr Komplement ist eine in \mathfrak{H} dichte Menge zweiter Kategorie.*

Der Satz ergibt also für die Existenz einer konvergenten kanonischen Transformation in die Normalform die notwendige Bedingung, daß die Koeffizienten von H in einem festen System von abzählbar unendlich vielen unabhängigen analytischen Gleichungen alle bis auf endlich viele erfüllen müssen. Zur Vereinfachung der Bezeichnung werden wir den Beweis nur für $s = 5$ durchführen; die Übertragung auf $s > 5$ macht keinerlei gedankliche Schwierigkeit. Beim Beweise wird wesentlich die Voraussetzung benutzt werden, daß λ_1 und λ_2 beide rein imaginär sind. Er läßt sich nicht auf den Fall reeller λ_1, λ_2 ausdehnen. Für den übrigen Fall eines nichtreellen Quotienten hat CHERRY [7] einen Beweis für die Konvergenz der Transformation in die Normalform angegeben, der jedoch an einer wichtigen Stelle lückenhaft ist. Es sei noch erwähnt, daß bereits früher [8] Beispiele von konvergenten $H = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots$ mit rein imaginären λ_1, λ_2 und irrationalem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ gegeben wurden, die nicht konvergent in die Normalform überführbar sind und für welche sogar das HAMILTONsche System (6) überhaupt kein von H unabhängiges analytisches Integral besitzt. Hierbei war aber speziell

für $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ eine Zahl mit außerordentlich rasch konvergierender Kettenbruchentwicklung zu wählen, und es erscheinen deshalb die entsprechend konstruierten H unter allen HAMILTONSchen Funktionen als Ausnahmen von ähnlicher Art wie etwa die LIOUVILLESchen Zahlen unter den reellen. Auch für das am Anfang betrachtete System (1) lassen sich mit $m = 2$ und reellen λ_1, λ_2 analoge Ausnahmen konstruieren, für welche der Kettenbruch von $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ so stark konvergiert, daß die Transformation in die lineare Normalform (5) wegen der dabei auftretenden kleinen Nenner notwendigerweise divergent wird. Unser erwähntes früheres Resultat ließ also noch die Möglichkeit offen, daß für die Transformation HAMILTONScher Systeme in die Normalform ein ähnlicher Satz gelten könnte wie für beliebige Systeme erster Ordnung. Daß nun bei diesen die Konvergenz der Transformation die Regel und bei jenen die Ausnahme ist, wird erst durch das Ergebnis der vorliegenden Arbeit sichergestellt. Bemerkenswert ist schließlich, daß für den Fall eines positiven Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ die reelle Funktion iH im Nullpunkt ein Extremum im engeren Sinne hat und daß daraus nach dem DIRICHLETSchen Satze die Stabilität des Gleichgewichts folgt. Dies zeigt, daß man aus der Divergenz der Transformation in die Normalform nicht auf Instabilität schließen kann.

Bekanntlich lassen sich die HAMILTONSchen Differentialgleichungen (6) um einen Freiheitsgrad erniedrigen, indem man nur die Lösungen mit demselben Werte von H betrachtet und t eliminiert. Im Falle $n = 2$ erhält man so ein HAMILTONSches System

$$(7) \quad \frac{dx}{du} = K_y, \quad \frac{dy}{du} = -K_x$$

mit einem Freiheitsgrad, wobei K außer von x und y noch periodisch von der neuen unabhängigen Variablen u abhängt. Für ein solches System ist nun ebenfalls die formale kanonische Transformation in eine einfache Normalform bekannt [6], falls K eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe in x, y mit periodischen Koeffizienten ist und noch eine gewisse Bedingung über Irrationalität erfüllt wird. Man kann unseren Beweis auf diesen Fall übertragen und direkt zeigen, daß im allgemeinen jene Transformation divergiert. Wie POINCARÉ zuerst bemerkt hat, läßt sich ferner die Diskussion der Stabilität der Gleichgewichtslösung $x = 0, y = 0$ von (7) zurückführen auf die Untersuchung einer inhaltstreuen analytischen Abbildung der Ebene auf sich in der Umgebung eines Fixpunktes. Solche Abbildungen sind dann von BIRKHOFF [9] eingehend studiert worden, und er hat insbesondere durch formale Potenzreihen-Transformation der Koordinaten eine einfache Normalform der Abbildung gewonnen. Im interessantesten Falle, dem sog. elliptischen, würde aus der Konvergenz der Transformation folgen, daß in den neuen Koordinaten alle zum Fixpunkt konzentrischen Kreise mit genügend kleinem Radius bei der Abbildung invariant bleiben, woraus sich dann die Stabilität ergäbe. Eine Übertragung unseres Beweises zeigt nun aber, daß im allgemeinen für den elliptischen Fall der analytischen Abbildung eine konvergente Trans-

formation in die Normalform unmöglich ist. Die beiden Übertragungen erfordern keine neuen Hilfsmittel und werden weiterhin nicht durchgeführt.

Da bisher noch kein vollständiger Beweis für die formale Transformierbarkeit HAMILTONscher Systeme in die Normalform unter Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse veröffentlicht wurde, so wird ein solcher in den folgenden 3 Abschnitten dargestellt. Der eigentliche Divergenzbeweis ist funktionentheoretischer Natur und beruht auf der näheren Untersuchung gewisser Scharen langperiodischer Lösungen der Differentialgleichungen. Der einfache grundlegende Gedanke wird im 5. Abschnitt auseinandergesetzt. In den Einzelheiten ist dann die Durchführung etwas mühsam, da die auftretenden Potenzreihen unendlich vieler Variablen eine sorgfältige Untersuchung der Konvergenz notwendig machen. Die wesentliche Idee findet sich in etwas anderer Gestalt bereits bei POINCARÉ [10], der darauf seinen ersten Beweis für die Divergenz der rein trigonometrischen Lösungen in der Himmelsmechanik gründete. Hierzu muß aber gesagt werden, daß dieser POINCARÉsche Beweis sowie auch sein zweiter, der den Satz von der Nichtexistenz analytischer Integrale benutzt, noch nicht in der Vollständigkeit durchgeführt worden ist, wie es für die Anwendung auf das Dreikörperproblem nötig wäre. Vielleicht darf man jetzt zum 100. Geburtstag des großen Mathematikers die Hoffnung aussprechen, daß auch sein Werk über Himmelsmechanik von den kommenden Generationen wieder stärker beachtet und weitergeführt werde.

2. Die Eigenwerte.

Es sei H eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe der Variablen $x_k, y_k (k = 1, \dots, n)$ mit reellen Koeffizienten, in welcher das konstante und die linearen Glieder fehlen. Man setze zur Abkürzung $z_k = x_k, z_{k+n} = y_k (k = 1, \dots, n)$ und schreibe den quadratischen Bestandteil von H in der Form

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} s_{kl} z_k z_l$$

mit $s_{kl} = s_{lk}$. Betrachtet man in dem HAMILTONschen System (6) die linearen Glieder der rechten Seiten, so haben sie die 2 n -reihige Matrix $\mathfrak{P} = \mathfrak{I} \mathfrak{E}$, wenn

$$\mathfrak{E} = (s_{kl}), \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{I}$$

gesetzt wird und hierin \mathfrak{E} die n -reihige Einheitsmatrix bedeutet. Wegen $\mathfrak{I}' = -\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$ ist dann

$$(8) \quad \mathfrak{P}' = -\mathfrak{I}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{I}, \quad (\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{P})' = \mathfrak{I}^{-1} (\lambda \mathfrak{E} + \mathfrak{P}) \mathfrak{I}.$$

also das charakteristische Polynom $|\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{P}| = |-\lambda \mathfrak{E} + \mathfrak{P}|$ eine gerade Funktion von λ . Für die 2 n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ können wir daher $\lambda_{k+n} = -\lambda_k (k = 1, \dots, n)$ annehmen. Wir setzen voraus, daß sie sämtlich voneinander verschieden sind; dann sind sie insbesondere $\neq 0$. Ist λ_k nicht rein imaginär, so können wir noch $\bar{\lambda}_k = \lambda_l$ wählen, wo l ebenfalls ein Index der

Reihe $1, \dots, n$ ist und natürlich $l = k$ für reelles λ_k . Dann ist auch $\bar{\lambda}_{k+n} = \lambda_{l+n}$.

Es gibt eine umkehrbare komplexe Matrix \mathfrak{C} , so daß $\mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \mathfrak{Q}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ wird. Für die Spalten c_k ($k = 1, \dots, 2n$) von \mathfrak{C} gilt dann $c_k \lambda_k = \mathfrak{P} c_k$, und sie sind nur bis auf willkürliche komplexe skalare Faktoren $d_k \neq 0$ festgelegt. Wegen der ersten Formel (8) und $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$ folgt

$$-\mathfrak{C}' \mathfrak{P}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \mathfrak{Q} \mathfrak{C}'.$$

Bedeutet noch \mathfrak{Q}_1 die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 & 0 \\ 0 & -\mathfrak{Q}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q} \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{Q} \mathfrak{C})' = -\mathfrak{C}' \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{Q} \mathfrak{C} = -\mathfrak{Q},$$

$$\mathfrak{C} \mathfrak{C}' \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \mathfrak{Q} \mathfrak{C} \mathfrak{C}',$$

und folglich genügt die Matrix $\mathfrak{M} = (\mathfrak{C} \mathfrak{C}' \mathfrak{C}^{-1})^{-1}$ ebenso wie \mathfrak{C} der Gleichung $\mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{M} = \mathfrak{Q}$. Daher ist $\mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix. Zerlegt man nun

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_2 \end{pmatrix}$$

in zwei Diagonalmatrizen n -ten Grades, so erhält man schließlich

$$(9) \quad \mathfrak{C}' \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \mathfrak{C} \mathfrak{M} \mathfrak{D} = \mathfrak{C}' \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{D}_1 \\ -\mathfrak{D}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

und weil links eine alternierende Matrix steht, so gilt $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$. Durch Bildung der Determinante in (9) wird ersichtlich, daß die n Zahlen $c'_k \mathfrak{C} c_{k+n} = d_k$ ($k = 1, \dots, n$) sämtlich $\neq 0$ sind.

Für reelles λ_k sei c_k reell gewählt, wobei noch ein reeller skalarer Faktor $\neq 0$ willkürlich ist. Ist λ_k weder reell noch rein imaginär und $\bar{\lambda}_k = \lambda_l$, so wähle man $c_l = \bar{c}_k$, wobei noch ein komplexer skalarer Faktor $\neq 0$ in c_k willkürlich ist. In beiden Fällen kann man die Faktoren so bestimmen, daß für $k \leq n$ dann $d_k = 1$ wird, wenn nicht λ_k rein imaginär ist. Im letzteren Falle ist aber $\lambda_{k+n} = -\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, und dann wähle man $c_{k+n} = -i \bar{c}_k$, wobei noch ein komplexer skalarer Faktor $\neq 0$ in c_k frei ist. Jetzt wird aber die Zahl

$$d_k = -i c'_k \mathfrak{C} c_k = -i c'_k \mathfrak{C}' c_k = i \bar{c}'_k \mathfrak{C} c_k = \bar{d}_k$$

reell und kann durch geeignete Wahl des skalaren Faktors in c_k zu ± 1 gemacht werden, also zu 1, indem man eventuell noch λ_k und λ_{k+n} vertauscht. Es folgt $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}' \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$, so daß sich \mathfrak{C} als symplektische Matrix erweist. Außerdem gilt

$$\mathfrak{C}' \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{P} \mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1} \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man mit $\hat{\mathfrak{z}}$ die Spalte aus den Elementen z_1, \dots, z_{2n} , so ist die lineare Substitution $\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{C} \mathfrak{z}$ kanonisch und führt die quadratische Form

$$H_2 = \frac{1}{2} \hat{\mathfrak{z}}' \mathfrak{C} \hat{\mathfrak{z}} \text{ über in die Normalform}$$

$$H_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k y_k.$$

Damit die ursprüngliche Spalte $\hat{\mathfrak{z}}$ reell werde, muß jetzt die Bedingung $\mathfrak{C} \mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{C}} \bar{\mathfrak{z}}$ erfüllt sein.

3. Die Normalform von H .

Es sei w eine Potenzreihe in den $2n$ Variablen $x_k, \eta_k (k = 1, \dots, n)$ mit unbestimmten komplexen Koeffizienten, die mit dem speziellen quadratischen Bestandteile

$$(10) \quad w_2 = \sum_{k=1}^n x_k \eta_k$$

beginnt. Bekanntlich wird dann durch den Ansatz

$$(11) \quad w_{x_k} = y_k, \quad w_{\eta_k} = \xi_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

bei Auflösung nach den x_k, y_k die allgemeine kanonische Potenzreihentransformation der Form

$$(12) \quad x_k = \xi_k + \dots, \quad y_k = \eta_k + \dots$$

geliefert, bei der also die linearen Glieder die angegebene einfache Gestalt haben.

Es sei w_l der Bestandteil l -ten Grades der Reihe $w(x, \eta)$ und entsprechend seien x_{kl}, y_{kl} die Bestandteile bei $x_k(\xi, \eta), y_k(\xi, \eta)$. Wegen (10) und (11) hat man

$$x_k = \xi_k - \sum_{l=3}^{\infty} w_{l\eta_k}, \quad y_k = \eta_k + \sum_{l=3}^{\infty} w_{l\xi_k},$$

und hieraus ergeben sich rekursiv die $x_{kl}, y_{kl} (k = 1, \dots, n)$ für $l = 2, 3, \dots$. Es wird jeder Koeffizient von $x_{kl} + w_{l+1, \eta_k}(\xi, \eta)$ und $y_{kl} - w_{l+1, \xi_k}(\xi, \eta)$ ein Polynom in den Koeffizienten von w_2, \dots, w_l mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten. Ist nun

$$H = \sum_{l=2}^{\infty} K_l$$

die Reihenentwicklung von H nach homogenen Polynomen in den ξ_k, η_k , so ist

$$K_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \eta_k$$

und

$$K_l = \sum_{k=1}^n \lambda_k \{ \xi_k w_{l\xi_k}(\xi, \eta) - \eta_k w_{l\eta_k}(\xi, \eta) \} + \dots \quad (l = 3, 4, \dots),$$

wo die Koeffizienten der rechts nicht hingeschriebenen weiteren Glieder Polynome in den Koeffizienten von w_2, \dots, w_{l-1} sind. Tritt das Potenzprodukt

$$P = \prod_{k=1}^n \xi_k^{\alpha_k} \eta_k^{\beta_k}$$

in $w_l(\xi, \eta)$ mit dem Koeffizienten γ auf, so hat P wegen

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (\xi_k P_{\xi_k} - \eta_k P_{\eta_k}) = P \sum_{k=1}^n \lambda_k (\alpha_k - \beta_k)$$

in K_l den Koeffizienten

$$(13) \quad \kappa = \gamma \lambda + \dots, \quad \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\alpha_k - \beta_k),$$

wo die weiteren Summanden von κ Polynome in den Koeffizienten von w_3, \dots, w_{l-1} sind.

Von nun an werde wie in der Einleitung vorausgesetzt, daß zwischen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ keine homogene lineare Gleichung $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0$ mit ganzen Koeffizienten g_1, \dots, g_n besteht, außer für $g_1 = 0, \dots, g_n = 0$. Dann ist in (13) der Faktor $\lambda = 0$ nur für $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Folglich kann man zu beliebig vorgegebenen w_3, \dots, w_{l-1} das Polynom w_l für jedes $l > 2$ so bestimmen, daß K_l ein Polynom in den n Produkten $\omega_k = \xi_k \eta_k$ ($k = 1, \dots, n$) allein ist, und insbesondere wird dann also $K_l = 0$ für ungerades l . Dabei bleiben in w_l noch alle Glieder willkürlich, die nur von den ω_k allein abhängen, während die sämtlichen anderen Glieder durch die Bedingungen $\kappa = 0$ eindeutig festgelegt sind. Um auch die restlichen Glieder zu fixieren, wollen wir vorschreiben, daß in dem bilinearen Ausdruck

$$\Phi = \sum_{k=1}^n (\xi_k y_k - \eta_k x_k) = \zeta' \mathfrak{D} \delta$$

kein Potenzprodukt der ω_k auftritt, wenn er als Reihe in den ξ_k, η_k ($k = 1, \dots, n$, dargestellt wird; dabei ist unter ζ die Spalte aus den Elementen $\zeta_k = \xi_k$) $\zeta_{k+n} = \eta_k$ zu verstehen. Der Bestandteil der Glieder l -ten Grades in $\Phi(\xi, \eta)$ ist nämlich

$$\Phi_l = \sum_{k=1}^n \{ \xi_k w_{l\xi_k}(\xi, \eta) + \eta_k w_{l\eta_k}(\xi, \eta) \} + \dots + l w_l + \dots,$$

und dies zeigt, daß durch die zusätzliche Bedingung tatsächlich w_l eindeutig bestimmt wird.

Damit ist bewiesen, daß für genau eine Potenzreihe w die durch (11) gegebene kanonische Substitution die HAMILTONSche Funktion H in eine Potenzreihe von $\omega_k = \xi_k \eta_k$ ($k = 1, \dots, n$) allein überführt und zugleich Φ in eine Reihe, welche kein Potenzprodukt der ω_k enthält.

4. Die Realitätsbedingung.

Ist F irgendeine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten, so soll durch \bar{F} die Reihe mit den konjugiert komplexen Koeffizienten und denselben Variablen bezeichnet werden. Die HAMILTONSche Funktion $H = H(\mathfrak{z})$ in den ursprünglichen Variablen des 2. Abschnitts war reell, also $H = \bar{H}$. Setzt man $H = G(\mathfrak{z})$ nach Ausführung der linearen kanonischen Substitution $\mathfrak{z} = \mathfrak{C} \delta$, so gilt

$$\bar{G}(\mathfrak{z}) = H(\bar{\mathfrak{C}} \mathfrak{z}) = H(\bar{\mathfrak{C}} \mathfrak{z}), \quad G(\mathfrak{z}) = H(\mathfrak{C} \bar{\mathfrak{C}}^{-1} \mathfrak{z}) = \bar{G}(\bar{\mathfrak{C}}^{-1} \mathfrak{z}).$$

Wir setzen $\bar{\mathfrak{C}}^{-1} \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ und benutzen die Normierung der Spalten c_k von \mathfrak{C} . Ist $\lambda_k = \bar{\lambda}_l$ nicht rein imaginär, so ist $c_k = \bar{c}_l$; ist $\lambda_k = -\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_{k+n}$ ($k \leq n$) rein imaginär, so ist $c_k = -i \bar{c}_{k+n}$. Daher ist die Ersetzung von \mathfrak{z} durch $\mathfrak{B} \mathfrak{z}$ mit der Substitution $z_k \leftrightarrow z_l$ ($\lambda_k = \bar{\lambda}_l$), $z_k \rightarrow -i z_{k+n}$, $z_{k+n} \rightarrow -i z_k$ ($\lambda_k = -\bar{\lambda}_k$; $k \leq n$) gleichbedeutend, und offenbar ist auch diese kanonisch.

Die im 3. Abschnitt eindeutig bestimmte kanonische Substitution (12) werde durch $\mathfrak{z} = \mathfrak{f}(\zeta)$ abgekürzt. Es ist $G(\mathfrak{z}) = G(\mathfrak{f}(\zeta))$ eine Reihe in den Produkten $\omega_k = \xi_k \eta_k$ allein, also gilt das gleiche von $\bar{G}(\bar{\mathfrak{f}}(\bar{\zeta})) = G(\mathfrak{B}^{-1} \bar{\mathfrak{f}}(\bar{\zeta}))$.

und da bei der Substitution $\zeta \rightarrow \mathfrak{B} \zeta$ der Ausdruck ω_k entweder durch ω_i oder durch $-\omega_k$ ersetzt wird, so ist auch $G(\mathfrak{B}^{-1} \bar{f}(\mathfrak{B} \zeta))$ eine Reihe in den ω_k allein. Andererseits ist mit $\Phi(\zeta) = \zeta' \mathfrak{B} f(\zeta)$ auch der Ausdruck

$$\bar{\Phi}(\mathfrak{B} \zeta) = (\mathfrak{B} \zeta)' \mathfrak{B} \bar{f}(\mathfrak{B} \zeta) = \zeta' \mathfrak{B} \mathfrak{B}^{-1} \bar{f}(\mathfrak{B} \zeta)$$

eine Reihe der Potenzprodukte in den ω_k allein. Da aber auch die Substitution $\mathfrak{z} = \mathfrak{B}^{-1} \bar{f}(\mathfrak{B} \zeta) = \zeta + \dots$ kanonisch ist, so ergibt der Eindeigkeitsatz des vorigen Abschnitts die Formel

$$\bar{f}(\zeta) = \mathfrak{B}^{-1} \bar{f}(\mathfrak{B} \zeta).$$

Setzt man noch $\hat{\zeta} = \mathfrak{C} \zeta$, so wird also

$$\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{C} f(\mathfrak{C}^{-1} \hat{\zeta}) = \mathfrak{C} \bar{f}(\mathfrak{C}^{-1} \hat{\zeta})$$

eine reelle kanonische Transformation, und daher ist $\hat{\zeta}$ mit $\hat{\mathfrak{z}}$ reell. Folglich sind die Variablen ξ_k, η_k der Realitätsbedingung $\mathfrak{C} \zeta = \mathfrak{C} \bar{\zeta}$ zu unterwerfen, und dies bedeutet $\bar{\zeta} = \mathfrak{B} \zeta$. Sind insbesondere alle λ_k rein imaginär, so hat man $\eta_k = i \bar{\xi}_k$ ($k = 1, \dots, n$) zu wählen, und dann ist wegen $\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{B} \mathfrak{z}$ auch $y_k = i \bar{x}_k$. Bezeichnet man in diesem Falle die Ausdrücke $i^{-1} y_k, i^{-1} \eta_k, i^{-1} H$ wieder mit y_k, η_k, H , so wird H rein imaginär und hat als Potenzreihe in den Produkten $\xi_k \eta_k = \xi_k \bar{\xi}_k$ lauter rein imaginäre Koeffizienten. Es bleiben die HAMILTONSchen Gleichungen (6) in der neuen Bedeutung der Symbole bestehen und der Übergang von \mathfrak{z} zu ζ ist wieder eine kanonische Transformation.

Die beim Realitätsbeweis wesentliche eindeutige Bestimmtheit der Transformation in die Normalform hatten wir durch die zusätzliche Bedingung über Φ erzwungen. Jetzt lassen wir diese Bedingung fort und verlangen dafür die Realität von $\mathfrak{C} f(\mathfrak{C}^{-1} \hat{\zeta})$. Dann ist die Transformation nicht mehr völlig festgelegt, sondern man kann $\zeta = \mathfrak{C}^{-1} \hat{\zeta}$ noch irgendeiner solchen kanonischen Potenzreihen-Substitution $\zeta \rightarrow g(\zeta) = \zeta + \dots$ unterwerfen, bei welcher H eine Reihe in $\omega_1, \dots, \omega_n$ bleibt und $\mathfrak{C} f(g(\mathfrak{C}^{-1} \hat{\zeta}))$ wieder reell ist. Lassen wir zunächst letztere Realitätsforderung weg und bezeichnen die erzeugende Funktion der gesuchten Transformation $\mathfrak{z} = g(\zeta)$ wieder mit w , so folgt aus der Untersuchung im vorigen Abschnitt, daß $w(x, \eta)$ eine Reihe in den n Produkten $x_k \eta_k$ ($k = 1, \dots, n$) allein ist. Dann wird aber $x_k w_{x_k} = \eta_k w_{\eta_k}$, und die Substitution (11) führt zu $x_k y_k = \xi_k \eta_k$, so daß die Reihe H bei jener Transformation sogar gliedweise invariant bleibt. Es gibt also auch bei Fortlassung der Bedingung über Φ nur eine einzige Normalform von H .

Zur Diskussion der Realität ist es zweckmäßig, statt w auf folgendem Wege eine neue erzeugende Funktion einzuführen. Man setze $x_k \eta_k = s_k$ und erhält

$$y_k = \eta_k w_{x_k}, \quad \xi_k = x_k w_{\eta_k}, \quad \omega_k = \xi_k \eta_k = s_k w_{s_k}.$$

Hieraus berechne man s_1, \dots, s_n als Potenzreihen in $\omega_1, \dots, \omega_n$ und trage sie in w_{s_k} ein. Mit der Abkürzung

$$f_k(\omega) = -\log w_{s_k} = (1 - w_{s_k}) + \dots$$

wird dann

$$s_k = \omega_k e^{f_k}.$$

Ferner ist

$$d\omega_k = w_k ds_k + s_k \sum_{l=1}^n w_{kl} ds_l = \sum_{l=1}^n \sigma_{kl} \frac{ds_l}{s_l} \quad (k = 1, \dots, n)$$

mit

$$\sigma_{kl} = e_{kl} s_k w_{kl} + s_k s_l w_{kl} s_l = \sigma_{lk},$$

also auch umgekehrt

$$df_k = \frac{ds_k}{s_k} - \frac{d\omega_k}{\omega_k} = \sum_{l=1}^n \tau_{kl} d\omega_l, \quad \tau_{kl} = \tau_{lk},$$

und demnach

$$f_{k\omega_l} = f_{l\omega_k} \quad (k, l = 1, \dots, n).$$

Folglich existiert eine Potenzreihe v in $\omega_1, \dots, \omega_n$ mit den vorgeschriebenen partiellen Ableitungen $v_{\omega_k} = f_k$, und es wird

$$s_k = \omega_k e^{v_{\omega_k}}, \quad x_k = \xi_k e^{v_{\omega_k}}, \quad y_k = \eta_k e^{-v_{\omega_k}} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Daß diese Transformation für eine beliebige Reihe v kanonisch ist, läßt sich leicht direkt einsehen und auch durch Umkehrung der benutzten Schlußweise zeigen. Die Realität wollen wir nur für den Fall rein imaginärer λ_k ($k = 1, \dots, n$) untersuchen und wie früher $i^{-1}y_k, i^{-1}\eta_k$ wieder mit y_k, η_k bezeichnen. Schreibt man dann statt $i^{-1}v$ wieder v , so lautet die Substitution wie vorher $x_k = \xi_k e^{v_{\omega_k}}, y_k = \eta_k e^{-v_{\omega_k}}$. Da konjugiert komplexe ξ_k, η_k zu konjugiert komplexen x_k, y_k führen sollen, so folgt $\bar{v}_{\omega_k} = -v_{\omega_k}$ ($k = 1, \dots, n$). Dies besagt, daß man v mit lauter rein imaginären Koeffizienten zu wählen hat, abgesehen von dem belanglosen konstanten Glied. Damit haben wir in dem betrachteten Falle alle kanonischen Transformationen gefunden, welche die HAMILTONsche Funktion in die Normalform überführen und der Realitätsbedingung genügen.

Wir hatten H als konvergente Potenzreihe vorausgesetzt; doch haben wir die Konvergenz nicht benötigt, da die bisherigen Überlegungen nur auf den algebraischen Eigenschaften des Ringes aller formalen Potenzreihen mit beliebigen komplexen Koeffizienten beruhen. Andererseits werden wir ja auch später zeigen, daß unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen jede Transformation in die Normalform notwendigerweise divergiert. Es soll noch festgestellt werden, daß für jede gegebene beliebig große natürliche Zahl s eine konvergente kanonische Potenzreihen-Substitution existiert, welche die sämtlichen Glieder von H bis zur s -ten Ordnung in die Normalform überführt und die Realitätsbedingung erfüllt. Man hat zu diesem Zwecke nur für die reelle kanonische Transformation $\hat{g} = \mathfrak{C} f(\mathfrak{C}^{-1}\hat{\zeta})$ die erzeugende Potenzreihe $w(x, \eta)$ zu bilden und sie bei den Gliedern s -ter Ordnung abzubreaken. Ist dann $u(x, \eta)$ die entsprechende Partialsumme von w , so werden durch den Ansatz $u_{x_k} = y_k, u_{\eta_k} = \xi_k$ ($k = 1, \dots, n$) nach den Existenzsätzen über implizite Funktionen x_k und y_k konvergente Reihen in ξ_l, η_l ($l = 1, \dots, n$). Führt man die hierdurch erklärte konvergente reelle kanonische Transformation $\hat{g} \rightarrow \hat{\zeta}$ aus und setzt noch $\hat{\zeta} = \mathfrak{C}\zeta$, so erhält H die Normalform bis auf Glieder s -ter und höherer Ordnung.

5. Die Grundlage zur Diskussion der Konvergenz.

In diesem Abschnitt soll vorausgesetzt werden, daß $n = 2$ ist und die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 rein imaginär sind. Zuzufolge der Schlußbemerkung im vorigen Abschnitt kann man sich zwecks Untersuchung der Konvergenz einer Transformation von H in die Normalform auf den Fall beschränken, daß für irgendein festes ε die Glieder in H bis zur Ordnung $\varepsilon - 1$ bereits die Normalform haben. Wir nehmen speziell $\varepsilon = 5$ und können dann $H = F + G$ mit

$$F = i(\varrho_1 z_1 + \varrho_2 z_2 + \frac{\alpha}{2} z_1^2 + \beta z_1 z_2 + \frac{\gamma}{2} z_2^2), \quad \lambda_k = i \varrho_k, \quad z_k = x_k + i y_k \quad (k = 1, 2)$$

und reellen $\varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta, \gamma$ setzen, während $G(x, y) = \bar{G}(y, x)$ eine konvergente Potenzreihe in den 2 Paaren konjugiert komplexer Variablen x_k, y_k bedeutet, die erst mit Gliedern fünften Grades anfängt. Das Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \mu$ sei irrational. Ferner soll F nicht von $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ allein abhängen; dies bedeutet, daß die Zahlen $\alpha \mu - \beta, \beta \mu - \gamma$ nicht beide 0 sind. Bei geeigneter Anordnung der Variablen kann man dann $\alpha \mu - \beta > 0$ voraussetzen.

Zunächst betrachten wir den Fall, daß auch G die Normalform hat, so daß also $H = H(z_1, z_2)$ eine Potenzreihe mit rein imaginären Koeffizienten in den Variablen z_1, z_2 allein ist. Sie möge für $|z_k| < c_1 (k = 1, 2)$ konvergieren. Dabei soll c_1 , wie auch weiterhin c_2, \dots, c_7 , bei gegebenen Koeffizienten von H eine geeignete positive Konstante bedeuten, die stets genügend klein zu wählen ist. Außerdem bezeichnen wir mit C_1, \dots, C_9 entsprechend gewählte Konstanten, die aber nur von den Koeffizienten von F allein abhängen. Setzt man noch $H_{z_k} = \Phi_k$, so haben die HAMILTONschen Differentialgleichungen die spezielle Gestalt

$$\frac{dz_k}{dt} = \Phi_k x_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\Phi_k y_k \quad (k = 1, 2),$$

woraus $\frac{dz_k}{dt} = 0$ folgt. Also sind z_k und auch Φ_k von t unabhängig. Sind für $t = 0$ konjugiert komplexe Anfangswerte $x_k = \xi_k, y_k = \eta_k = \bar{\xi}_k$ mit $|\xi_k| < c_1$ vorgeschrieben, so ergibt die weitere Integration

$$z_k = \xi_k \eta_k = \omega_k, \quad x_k = \xi_k e^{\Phi_k t}, \quad y_k = \eta_k e^{-\Phi_k t} \quad (k = 1, 2)$$

mit rein imaginären Φ_k .

Nach einem bekannten Satze über Kettenbrüche kann man zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q so finden, daß

$$0 < \varrho_1(q\mu - p) < \varepsilon, \quad q > 0$$

gilt. Man setze noch $\frac{z_2}{z_1} = \chi$ und betrachte die Identität

$$\begin{aligned} i^{-1} \left(\Phi_2 - \frac{p}{q} \Phi_1 \right) &= \left(\mu - \frac{p}{q} \right) \varrho_1 - (\alpha \mu - \beta) z_1 - (\beta \mu - \gamma) z_2 + \alpha \left(\mu - \frac{p}{q} \right) z_1 + \\ &+ \beta \left(\mu - \frac{p}{q} \right) z_2 + i^{-1} \left(G_{z_1} - \frac{p}{q} G_{z_2} \right). \end{aligned}$$

Es folgt, daß für $\varepsilon < c_2$ und $0 \leq \chi < C_1$ die Gleichung $p \Phi_1 = q \Phi_2$ für z_1 eine positive Lösung $z_1 = \omega_1 < C_2^{-1} \varepsilon q^{-1}$ besitzt, und man erhält eine konvergente Reihenentwicklung

$$(14) \quad \omega_1^{\frac{1}{2}} = \partial_0 + \partial_1 \chi + \dots$$

nach Potenzen von χ , deren Koeffizienten $\delta_0, \delta_1, \dots$ noch von p und q abhängen und reell sind. Dabei ist $\delta_0 > 0$. Für $\varepsilon < c_3$ gilt dann weiter

$$|\Phi_1 - \lambda_1| < C_3^{-1} \varepsilon q^{-1} < \frac{|\lambda_1|}{2},$$

also $\Phi_1 \neq 0$, und die positive Zahl

$$\tau = \frac{2\pi q}{\Phi_1} = \pm \frac{2\pi q i}{\Phi_1}$$

genügt der Ungleichung

$$\left| \tau - \frac{2\pi q}{|\lambda_1|} \right| = 2\pi q \left| \frac{1}{|\Phi_1|} - \frac{1}{|\lambda_1|} \right| < C_4^{-1} \varepsilon.$$

Unter Benutzung von (14) erhält man eine Reihenentwicklung von τ nach Potenzen von χ , die für $|\chi| < C_5$ konvergiert. Da die Werte $\Phi_1 \tau = \pm 2\pi q i$ und $\Phi_2 \tau = \pm 2\pi p i$ Vielfache von $2\pi i$ sind, so haben die Lösungen x_k, y_k in t die reelle Periode τ , und für $t = \tau$ gilt $x_k = \xi_k, y_k = \eta_k$ ($k = 1, 2$). Hierbei sind die konjugiert komplexen Anfangswerte ξ_k, η_k nur der Bedingung (14) mit beliebigem nicht-negativen $\chi = \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right|^2 < C_1$ und $\omega_1^{\frac{1}{2}} = |\xi_1|$ unterworfen.

Nun führen wir eine feste kanonische Potenzreihen-Substitution $\hat{x}_k = x_k + \dots, \hat{y}_k = y_k + \dots$ ($k = 1, 2$) durch, welche für $|x_k| < c_4, |y_k| < c_4$ konvergieren möge und die Paare konjugiert komplexer Variablen wieder in solche transformiert. Sind entsprechend $\hat{\xi}_k = \xi_k + \dots, \hat{\eta}_k = \eta_k + \dots$ die Anfangswerte in den neuen Veränderlichen, so setze man noch

$$(15) \quad \hat{\xi}_1 = \zeta w_1, \quad \hat{\eta}_1 = \zeta w_1^{-1}, \quad \hat{\xi}_2 = \zeta \sigma w_2, \quad \hat{\eta}_2 = \zeta \sigma w_2^{-1}.$$

Für $|\xi_k| < c_5, |\eta_k| < c_5$ erhält man aus der inversen Substitution

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \xi_1 \eta_1 = \hat{\xi}_1 \hat{\eta}_1 + \dots = \zeta^2 + \dots, \\ \chi &= \frac{\xi_2 \eta_2}{\xi_1 \eta_1} = \frac{\hat{\xi}_2 \hat{\eta}_2 + \dots}{\hat{\xi}_1 \hat{\eta}_1 + \dots} = \frac{(\zeta \sigma)^2 + \dots}{\zeta^2 + \dots} = \sigma^2 + \dots; \end{aligned}$$

also sind $\omega_1^{\frac{1}{2}} = \zeta + \dots$ und χ Potenzreihen in ζ, σ und w_k, w_k^{-1} ($k = 1, 2$), welche für $|\zeta| < c_6, |\sigma| < 1, \frac{1}{2} < |w_k| < 2$ konvergieren. Trägt man diese in (14) ein, so ergibt sich schließlich ζ als eine Potenzreihe in σ, w_k, w_k^{-1} mit dem konstanten Gliede δ_0 , welche für $|\sigma| < C_6, \frac{1}{2} < |w_k| < 2$ konvergiert. Ist $|w_k| = 1$ und $\sigma > 0$, so wird auch $\zeta > 0$. Durch Einsetzen der Reihe für ζ in χ erhält man jetzt für die Periode $\tau = \pm \frac{2\pi q i}{\Phi_1}$ eine Potenzreihe in σ, w_k, w_k^{-1} . Mit $|\sigma| < C_7, \frac{1}{2} < |w_k| < 2$ und $\varepsilon < c_7$ gelten dann die Ungleichungen

$$(16) \quad |\zeta|^2 < C_8^{-1} \varepsilon q^{-1}, \quad \left| \tau - \frac{2\pi q}{|\lambda_1|} \right| < C_4^{-1} \varepsilon,$$

aus denen nach (15) die weitere Abschätzung

$$(17) \quad (|\hat{\xi}_1| + |\hat{\eta}_1| + |\hat{\xi}_2| + |\hat{\eta}_2|)^2 |\tau| < C_9^{-1} \varepsilon$$

folgt. Läßt man dabei für σ, w_1, w_2 beliebige komplexe Werte zu, die nur den Bedingungen $|\sigma| < C_7, \frac{1}{2} < |w_k| < 2$ genügen, so werden auch ζ und τ komplex, doch bleiben die angegebenen Abschätzungen bestehen und es gilt die

Beziehung $p \Phi_1 = q \Phi_2$ identisch in σ, w_1, w_2 , so daß also die Lösungen \hat{x}_k, \hat{y}_k der transformierten HAMILTONschen Differentialgleichungen für die Anfangswerte $\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k$ die Periode τ haben.

Endlich werde nun angenommen, daß durch irgendeine noch unbekannte konvergente reelle kanonische Potenzreihen-Substitution die vorgegebene HAMILTONsche Funktion $H = F + G$ in die Normalform transformierbar sei. Bezeichnen wir die Anfangswerte in den ursprünglichen Variablen wieder gemäß (15), so erhalten wir nach der vorhergehenden Überlegung eine dreiparametrische Schar von Anfangswerten mit periodischen Lösungen. Für diese sind σ, w_1, w_2 nur den Ungleichungen $|\sigma| < C_7, \frac{1}{2} < |w_k| < 2$ unterworfen, und es ergeben sich ζ, τ als konvergente Potenzreihen in σ, w_k, w_k^{-1} . Dabei ist aber die Bedingung $\varepsilon < c_7$ zu beachten, und hierdurch tritt eine gewisse Schwierigkeit auf, da die Größen c_1, \dots, c_7 jetzt nicht explizit bekannt sind, sondern allein ihre Existenz aus der vorausgesetzten Existenz einer konvergenten Transformation in die Normalform folgt. Infolgedessen hat man beliebig kleine ε in Betracht zu ziehen, und dies führt wegen der Beziehungen $0 < \varrho_1(q\mu - p) < \varepsilon$ und $\tau = \pm \frac{2\pi q i}{\Phi_1}$ zu beliebig großen Werten von q und $|\tau|$.

In der folgenden Untersuchung wird nun durch direkte Betrachtung der Lösungen HAMILTONscher Systeme in der Nähe der Gleichgewichtslösung gezeigt werden, daß im allgemeinen jene dreiparametrische Schar von Anfangswerten geschlossener Bahnkurven nicht existiert. Für die Durchführung dieser Untersuchung ist es von Wichtigkeit, daß wir auf Grund von (17) die zu den konjugiert komplexen Anfangswerten $\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k$ ($k = 1, 2$) gehörige Lösung nur für ein Intervall $0 \leq t \leq T$ zu verfolgen haben, für dessen Länge die Abschätzung

$$(|\hat{\xi}_1| + |\hat{\xi}_2|)^2 T < C_0^{-1} \varepsilon$$

gilt, in der wir die rechte Seite durch geeignete Wahl von ε noch beliebig klein machen können.

6. Die Variationsgleichungen.

Im späteren Verlauf der Untersuchung wird es notwendig sein, die Koeffizienten von $G(x, y) = -\bar{G}(y, x)$ auch als variabel anzusehen und die Lösungen des HAMILTONschen Systems als Funktion der Anfangswerte und der Koeffizienten zu studieren. Zur Vorbereitung soll zunächst ein etwas allgemeineres System von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet werden, das einen Parameter ν in einfachster Weise enthält.

Es seien wieder x_k, y_k ($k = 1, \dots, n$) n Paare von Variablen und $x_k y_k = z_k$; ferner sei φ_k eine Potenzreihe in z_1, \dots, z_n allein und g_k, h_k Potenzreihen in allen $2n$ Veränderlichen, sämtlich mit gegebenen komplexen Koeffizienten. Die Reihen φ_k, g_k, h_k ($k = 1, \dots, n$) mögen für $|x_l| < r, |y_l| < r$ ($l = 1, \dots, n$) konvergieren und absolut $< M$ sein. Mit einem komplexen Parameter ν vom absoluten Betrage ≤ 1 betrachten wir das System von Differentialgleichungen

$$(18) \quad \frac{dx_k}{dt} = \varphi_k x_k + \nu g_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\varphi_k y_k + \nu h_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

mit den von ν unabhängigen Anfangswerten $x_k = \xi_k$, $y_k = \eta_k$ für $t = 0$, die durch $|\xi_k| < \frac{r}{2}$, $|\eta_k| < \frac{r}{2}$ beschränkt seien. Nach bekannten Existenzsätzen gilt für die Lösungen eine Reihenentwicklung nach Potenzen von ν , also

$$(19) \quad x_k = X_k + \nu U_k + \dots, \quad y_k = Y_k + \nu V_k + \dots,$$

worin die Koeffizienten X_k, U_k, \dots und Y_k, V_k, \dots wiederum Potenzreihen in t und den Anfangswerten sind. Es gibt eine nur von r, M, n abhängige Konstante $c > 0$, so daß die Reihen x_k, y_k für $|\xi_l| < \frac{r}{2}$, $|\eta_l| < \frac{r}{2}$ ($l = 1, \dots, n$), $|\nu| \leq 1$ und $|t| < c$ konvergieren. Für $t = 0$ wird insbesondere $X_k = \xi_k$, $Y_k = \eta_k$, während alle anderen Koeffizienten verschwinden. Durch Einsetzen in (18) folgt erstens

$$(20) \quad \frac{dX_k}{dt} = \varphi_k X_k, \quad \frac{dY_k}{dt} = -\varphi_k Y_k,$$

wo in φ_k die Variablen z_l durch $Z_l = X_l Y_l$ ($l = 1, \dots, n$) zu ersetzen sind, und zweitens zur Bestimmung von U_k, V_k das System der Variationsgleichungen

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dU_k}{dt} = \varphi_k U_k + X_k \sum_{i=1}^n (Y_i U_i + X_i V_i) \varphi_{kxi} + g_k(X, Y) \\ \frac{dV_k}{dt} = -\varphi_k V_k - Y_k \sum_{i=1}^n (Y_i U_i + X_i V_i) \varphi_{kxi} + h_k(X, Y). \end{cases}$$

Die Integration von (20) liefert $\frac{dZ_k}{dt} = 0$, $Z_k = \xi_k \eta_k = \omega_k$, so daß φ_k und φ_{kxi} von t unabhängig sind, und

$$(22) \quad X_k = \xi_k e^{\varphi_k t}, \quad Y_k = \eta_k e^{-\varphi_k t}.$$

Die Integration von (21) ergibt zunächst

$$(23) \quad Y_k U_k + X_k V_k = \int_0^t \{Y_k g_k(X, Y) + X_k h_k(X, Y)\} dt \quad (k = 1, \dots, n)$$

und sodann $Y_k U_k, X_k V_k$ selber durch eine nochmalige Quadratur; doch wird später nur der Ausdruck (23) explizit gebraucht werden.

Wir spezialisieren noch (18) zu dem HAMILTONSchen System

$$(24) \quad \frac{dx_k}{dt} = (F + \nu G)_{y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -(F + \nu G)_{x_k}.$$

Hierin sei $F = F(z)$ eine Potenzreihe in z_1, \dots, z_n allein und $G = G(x, y)$ eine Potenzreihe in allen $2n$ Variablen x_k, y_k ($k = 1, \dots, n$). In (18) wird dann $\varphi_k = F_{x_k}$, $g_k = G_{y_k}$, $h_k = -G_{x_k}$, und folglich geht (23) über in

$$(25) \quad Y_k U_k + X_k V_k = \int_0^t \{Y_k G_{y_k}(X, Y) - X_k G_{x_k}(X, Y)\} dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die Reihen U_k, V_k lassen sich auch folgendermaßen charakterisieren. Man setze $\nu = 1$ in (24) und betrachte jetzt alle Koeffizienten in G als Unbestimmte. Dann sind die Lösungen x_k, y_k Potenzreihen in t , den Anfangswerten ξ_l, η_l und jenen unendlich vielen Koeffizienten, und die in bezug auf die Koeffizienten homogen linearen Bestandteile in den Reihen sind gerade U_k, V_k .

7. Abschätzungen.

Da wir weiterhin die Lösungen von Differentialgleichungen als Potenzreihen in den unbestimmten Koeffizienten untersuchen wollen, so müssen wir einige Abschätzungen genauer ausführen, als es sonst bei den üblichen Beweisen der Existenzsätze nötig ist. Zur Vorbereitung dient Hilfssatz 1, bei dem noch feste Koeffizienten vorausgesetzt werden.

Hilfssatz 1: Es sei $\psi_k (k = 1, \dots, m)$ analytisch in den $m + 1$ komplexen Variablen y_1, \dots, y_m und t im Gebiet $|y_l| < R (l = 1, \dots, m), |t| < Q$ und dort absolut $\leq M$. Es mögen alle ψ_k nebst ihren sämtlichen partiellen Ableitungen nach y_1, \dots, y_m bis zur zweiten Ordnung einschließlich für $y_1 = 0, \dots, y_m = 0$ identisch in t verschwinden. Es sei $0 < r < \frac{R}{2}$, und es bedeute $y_k = y_k(\eta, t)$ die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$(26) \quad \frac{dy_k}{dt} = \psi_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

mit den Anfangswerten $y_k = \eta_k$ für $t = 0$. Dann ist die Funktion $y_k(\eta, t)$ analytisch im Gebiet

$$|\eta_l| < r \quad (l = 1, \dots, m), \quad |t| < \text{Min} \left(Q, \frac{R^2}{8Mr^2} \right)$$

und es gilt dort $|y_k - \eta_k| < r$.

Beweis: Es sei u eine weitere komplexe Variable. Liegen y_1, \dots, y_m, t im Gebiet $|y_l| < R (l = 1, \dots, m), |t| < Q$, so ist nach der Voraussetzung über das Verschwinden der Ableitungen die Funktion $u^{-3} \psi_k(y, t)$ von u für $|u| \leq 1$ regulär und für $|u| = 1$ absolut $\leq M$, also

$$(27) \quad |\psi_k(y, t)| \leq M |u|^3 \quad (|u| \leq 1).$$

Man wähle speziell für u eine positive Zahl im Intervall

$$\text{Max} \left(\frac{|y_1|}{R}, \dots, \frac{|y_m|}{R} \right) = u_0 < u < 1.$$

Dann ist $|y_l u^{-1}| < R (l = 1, \dots, m)$, und man kann (27) mit $y u^{-1}$ statt y anwenden. Der Grenzübergang $u \rightarrow u_0$ ergibt die Abschätzung

$$(28) \quad |\psi_k(y, t)| \leq M R^{-3} \text{Max} (|y_1|^3, \dots, |y_m|^3).$$

Wäre nun die Behauptung des Hilfssatzes falsch, so gäbe es nach dem Existenzsatz über die Lösungen analytischer Differentialgleichungen bei geeigneten η_1, \dots, η_m des Gebietes $|\eta_l| < r (l = 1, \dots, m)$ im Kreise

$$|t| < \vartheta = \text{Min} \left(Q, \frac{R^2}{8Mr^2} \right)$$

einen Punkt t_0 , so daß auf der Strecke von 0 nach t_0 die Funktionen $y_k(\eta, t)$ regulär und für $t \neq t_0$ die absoluten Werte $|y_k - \eta_k| < r (k = 1, \dots, m)$ sind, während in t_0 für mindestens einen Index k der absolute Betrag $|y_k - \eta_k| = r$ wird. Integriert man (26) über diese Strecke, so folgt mit (28) der Widerspruch

$$r = \left| \int_0^{t_0} \psi_k(y, t) dt \right| < M R^{-3} (2r)^3 \vartheta \leq r,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Im folgenden seien f_1, \dots, f_m Potenzreihen in x_1, \dots, x_m , die erst mit Gliedern dritter Ordnung beginnen. Ihre sämtlichen Koeffizienten werden als komplexe Unbestimmte angesehen, und zwar mögen für $l = 3, 4, \dots$ die Koeffizienten der Glieder l -ter Ordnung absolut $\leq l + 1$ sein. Für diese Koeffizienten soll das Symbol A benutzt werden, da eine Unterscheidung durch Indizes zunächst nicht notwendig erscheint. Ferner seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ rein imaginäre Konstanten. Mit b_1, \dots, b_{20} werden geeignete positive Zahlen bezeichnet, die noch von m und $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|$ abhängen können und stets genügend klein zu wählen sind. Wir untersuchen nunmehr die Lösungen $x_k = x_k(\xi, t)$ des Systems von Differentialgleichungen

$$(29) \quad \frac{dx_k}{dt} = \lambda_k x_k + f_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

mit den Anfangswerten $x_k = \xi_k$ für $t = 0$. Schreibt man ausführlicher $f_k = f_k(x_1, \dots, x_m)$, so geht dies System durch die Substitution

$$x_k = e^{\lambda_k t} y_k, \quad e^{-\lambda_k t} f_k(e^{\lambda_1 t} y_1, \dots, e^{\lambda_m t} y_m) = \psi_k$$

über in (26) mit den Anfangswerten $y_k = \xi_k$ für $t = 0$ und den Lösungen $y_k(\xi, t)$. Es sei t_0 eine positive Größe, die später noch näher festgelegt werden soll, und man setze $t = t_0 + s$. Jetzt wird für $y_k(\xi, t_0 + s)$ als Potenzreihe in ξ_1, \dots, ξ_m, s und den unendlich vielen A eine Majorante gebildet und die Konvergenz untersucht werden. Hierzu hat man zweimal Hilfssatz 1 anzuwenden und das Majorantenprinzip von CAUCHY heranzuziehen. Übrigens könnte man im folgenden auch die Bemerkung von Hilfssatz 1 vermeiden und die nötigen Abschätzungen direkt der CAUCHYSchen Methode entnehmen, doch wären dann die Rechnungen umständlicher.

In diesem Absatz betrachten wir t vorübergehend als eine reelle Variable und fassen ψ_k als eine Potenzreihe in y_1, \dots, y_m und den A allein auf, deren Koeffizienten Funktionen von t sind. Da $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ rein imaginär sind, so ist dann offenbar $f_k(y_1, \dots, y_m)$ eine Majorante von ψ_k bezüglich der Variablen y und A . Es seien nun $y_k = y_k^*(\xi, t)$ für $k = 1, \dots, m$ die Potenzreihen in ξ_1, \dots, ξ_m und A , welche formal der Differentialgleichung

$$(30) \quad \frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1, \dots, y_m)$$

mit den Anfangswerten $y_k = \xi_k$ für $t = 0$ genügen. Ordnet man sie nach Potenzen der ξ_1, \dots, ξ_m allein, so ergeben sich durch Vergleich entsprechender Glieder auf beiden Seiten von (30) die Koeffizienten rekursiv als Polynome in t und den A mit nicht-negativen rationalen Zahlenkoeffizienten. Nach dem Majorantenprinzip ist dann $y_k^*(\xi, t)$ eine Majorante von $y_k(\xi, t)$ in bezug auf die Variablen ξ und A , falls dabei t als positive Zahl angesehen wird.

Wegen der Annahme $|A| \leq l + 1$ ($l = 3, 4, \dots$) für die einzelnen Koeffizienten der Glieder l -ter Ordnung in f_1, \dots, f_m gilt sicherlich $|f_k(y_1, \dots, y_m)| < b_1^{-1}$ für $|y_1| < \frac{1}{2}, \dots, |y_m| < \frac{1}{2}$. Da die f_k sogar von t unabhängig sind, so ist zufolge Hilfssatz 1 die Funktion $y_k^*(\xi, t)$ von ξ_1, \dots, ξ_m und t analytisch im Gebiet

$$|\xi_l| < r < \frac{1}{4} \quad (l = 1, \dots, m), \quad |t| < b_2 r^{-2}$$

und dort $|y_k^*(\xi, t) - \xi_k| < r$. Also folgt insbesondere die Konvergenz der Potenzreihe $y_k^*(\xi, t)$ im gleichen Gebiete, und bei Beschränkung auf positive Werte von t ist dann dort $y_k^*(\xi, t)$ eine konvergente Majorante von $y_k(\xi, t)$ bezüglich ξ und A .

Jetzt werde ψ_k wieder als eine Potenzreihe in y_1, \dots, y_m, A und t betrachtet. Dann ist die Reihe

$$\chi_k = e^{|\lambda_k|t} f_k(e^{|\lambda_1|t} y_1, \dots, e^{|\lambda_m|t} y_m)$$

offenbar eine Majorante von ψ_k in bezug auf diese sämtlichen Variablen. Es sei noch $y_k = y_k^{**}(\xi, t)$ die Potenzreihe in ξ_1, \dots, ξ_m, A und t , welche formal der Differentialgleichung $\frac{dy_k}{dt} = \chi_k$ ($k = 1, \dots, m$) mit den Anfangswerten $y_k = \xi_k$ für $t = 0$ genügt. Die Koeffizienten ergeben sich rekursiv als nicht-negative reelle Zahlen, und nach dem Majorantenprinzip ist $y_k^{**}(\xi, t)$ eine Majorante von $y_k(\xi, t)$ bezüglich aller Variablen ξ, A und t .

Für $|y_l| < b_3$ ($l = 1, \dots, m$) und $|t| < 1$ ist $|\chi_k| < b_4^{-1}$. Nach Hilfssatz 1 ist dann $y_k^{**}(\xi, t)$ als Funktion von ξ_1, \dots, ξ_m und t analytisch im Gebiet

$$|\xi_l| < r < \frac{b_3}{2} \quad (l = 1, \dots, m), \quad |t| < \text{Min}(1, b_5 r^{-2})$$

und dort $|y_k^{**}(\xi, t) - \xi_k| < r$.

Nun sei $r < \frac{1}{4} \text{Min}(1, b_3)$ und $|\xi_l| < r$ ($l = 1, \dots, m$). Bei genügend kleinen $|t_0|$ und $|s|$ gilt dann für die Lösungen $x_k = x_k(\xi, t)$ der Differentialgleichungen (29) mit $\hat{\xi}_k = x_k(\xi, t_0)$ und $t = t_0 + s$ die Kompositionsformel $x_k(\xi, t) = x_k(\hat{\xi}, s)$, also

$$y_k(\xi, t) = e^{-\lambda_k t_0} y_k(\hat{\xi}, s), \quad \hat{\xi}_k = e^{\lambda_k t_0} y_k(\xi, t_0).$$

Unter der Annahme $0 \leq t_0 < b_2 r^{-2}$ ist wegen $|\xi_l| < r < \frac{1}{4}$ die Reihe $y_k^*(\xi, t_0)$ eine Majorante von $y_k(\xi, t_0)$ bezüglich ξ, A und ferner $|y_k^*(\xi, t_0) - \xi_k| < r$, also $|y_k^*(\xi, t_0)| < 2r$ und $|\hat{\xi}_k| < 2r$. Da außerdem $2r < \frac{b_2}{2}$ ist, so folgt weiter für $|s| < \text{Min}(1, b_5 r^{-2})$ die Konvergenz der zusammengesetzten Reihe $y_k^{**}(y_k^*(\xi, t_0), s)$ und die Abschätzung

$$|y_k^{**}(y_k^*(\xi, t_0), s) - \xi_k| < r.$$

Erst recht ist also

$$|e^{-\lambda_k t} x_k(\xi, t) - \xi_k| < r,$$

und $y_k^{**}(y_k^*(\xi, t_0), s)$ ist eine Majorante von $e^{-\lambda_k(t_0+s)} x_k(\xi, t_0+s)$ in bezug auf die Variablen ξ, A und s . Setzen wir von nun an $r < b_6$ voraus, so ist mit $0 \leq t_0 < b_2 r^{-2}$ für $|\xi_l| < r$ ($l = 1, \dots, m$) und $|s| < 1$ die Funktion $x_k(\xi, t_0+s)$ regulär.

Zur Vereinfachung des Ausdruckes führen wir folgende Bezeichnung ein. Es sei Φ irgendeine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten in gewissen Variablen, unter denen auch die A vorkommen können; dann verstehen wir unter $|\Phi|$ die Reihe der absoluten Beträge aller Glieder. Mit dieser Abkürzung sprechen wir das hauptsächliche Ergebnis dieses Abschnittes nochmals aus.

Hilfssatz 2: Mit $r < b_0$ und $0 < t_0 < b_2 r^{-2}$ gilt im Gebiet $|\xi_l| < r$ ($l = 1, \dots, m$), $|s| < 1$ für die Lösungen der Differentialgleichungen (29) die Abschätzung

$$\left| e^{-\lambda_k t} x_k(\xi, t) - \xi_k \right| < r,$$

wenn ξ , A und $s = t - t_0$ als die Variablen angesehen werden.

8. Die Gleichungen $x_k = \xi_k$ für $k = 1, 2$.

Indem wir wieder die Bezeichnung der Variablen ändern und $m = 2n$ setzen, wenden wir uns zur Untersuchung des Systems (18), worin wir noch $r = 1$ wählen wollen. Die Differentialgleichungen lauten demnach

$$(31) \quad \frac{dx_k}{dt} = \varphi_k x_k + g_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\varphi_k y_k + h_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

und darin sind die φ_k Potenzreihen in den n Produkten $z_l = x_l y_l$ ($l = 1, \dots, n$) allein, die g_k, h_k Potenzreihen in allen $2n$ Variablen x_l und y_l , sämtlich mit komplexen von t unabhängigen Koeffizienten. Für unseren späteren Zweck genügt es, die φ_k als lineare Funktionen von z_1, \dots, z_n anzusetzen, also

$$\varphi_k = \lambda_k + \sum_{l=1}^n A_{kl} z_l \quad (k = 1, \dots, n),$$

wobei die λ_k rein imaginär und die $|A_{kl}| \leq 4$ seien. Die Potenzreihen g_k, h_k mögen erst mit Gliedern vierter Ordnung beginnen, und ihre Koeffizienten seien wieder Unbestimmte A , die bei den Gliedern l -ter Ordnung für $l = 4, 5, \dots$ den Bedingungen $|A| \leq l + 1$ genügen. Offenbar ist das System (31) ein Spezialfall von (29); man hat dort nur y_1, \dots, y_n statt x_{n+1}, \dots, x_m zu schreiben und

$$\lambda_{k+n} = -\lambda_k, f_k = (\varphi_k - \lambda_k) x_k + g_k, f_{k+n} = (\lambda_k - \varphi_k) y_k + h_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

zu setzen. Analog schreibe man η_1, \dots, η_n anstelle von ξ_{n+1}, \dots, ξ_m , wobei aber die Verwechslung mit den früher benutzten η zu vermeiden ist.

Entwickelt man gemäß (19) die Lösungen x_k, y_k von (31) mit den Anfangswerten $x_k = \xi_k, y_k = \eta_k$ für $t = 0$ in eine Reihe, so werden X_k, Y_k durch (22) gegeben, sind also von den unbestimmten Koeffizienten A der g_l, h_l ($l = 1, \dots, n$) unabhängig; die Reihen U_k, V_k vereinigen genau die Glieder ersten Grades aus der Entwicklung von x_k, y_k nach Potenzen der A , und für sie gilt (23); allgemein umfassen die Faktoren von r^p ($p = 0, 1, \dots$) in (19) genau die Glieder p -ten Grades in den sämtlichen A . Dabei ist jedoch bei dem Vergleich mit der betreffenden Reihenentwicklung im vorigen Abschnitt zu beachten, daß soeben die n^2 Koeffizienten A_{kl} in $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nicht als Variable A angesehen wurden.

Wir zerlegen

$$e^{-\varphi_k t} (x_k - X_k) = (e^{-\lambda_k t} x_k - \xi_k) + e^{-\lambda_k t} x_k (e^{(\lambda_k - \varphi_k)t} - 1),$$

$$e^{\varphi_k t} (y_k - Y_k) = (e^{\lambda_k t} y_k - \eta_k) + e^{\lambda_k t} y_k (e^{(\varphi_k - \lambda_k)t} - 1),$$

setzen wieder $t = t_0 + s$ und entwickeln nach Potenzen von ξ, η, s und allen A , wobei nun auch die A_{kl} zu berücksichtigen sind. Unter den Voraussetzungen

$r < b_0$, $0 < t_0 < b_2 r^{-2}$ gilt dann im Gebiet $|\xi_l| < r$, $|\eta_l| < r$ ($l = 1, \dots, n$), $|s| < 1$ nach Hilfssatz 2 die Abschätzung

$$\overline{e^{-\lambda_k t} x_k - \xi_k} < r, \quad \overline{e^{\lambda_k t} y_k - \eta_k} < r,$$

und andererseits ist

$$\overline{(\lambda_k - \varphi_k)(t_0 + s)} < 4 n r^2 (b_2 r^{-2} + 1) < b_7^{-1}.$$

Daraus folgt

$$(32) \quad \overline{e^{-\varphi_k t} (x_k - X_k)} < b_8^{-1} r, \quad \overline{e^{\varphi_k t} (y_k - Y_k)} < b_8^{-1} r.$$

Da die Potenzreihen g_k, h_k in (31) mit Gliedern vierter Ordnung in den Variablen x_l, y_l ($l = 1, \dots, n$) anfangen, so treten auch bei den Potenzreihen für $e^{-\varphi_k t} (x_k - X_k)$ und $e^{\varphi_k t} (y_k - Y_k)$ keine Glieder kleinerer als vierter Ordnung in den ξ_l, η_l auf. Nach der bereits beim Beweise von Hilfssatz 1 verwendeten Schlußweise des SCHWARZschen Lemmas erhält man dann aus (32) die schärferen Abschätzungen

$$(33) \quad \overline{e^{-\varphi_k t} (x_k - X_k)} \leq b_8^{-1} r^3 \xi^4, \quad \overline{e^{\varphi_k t} (y_k - Y_k)} \leq b_8^{-1} r^3 \xi^4$$

mit

$$(34) \quad \xi = \text{Max} (|\xi_1|, \dots, |\xi_n|, |\eta_1|, \dots, |\eta_n|) < r, \quad |s| < 1.$$

Von nun an beschränken wir uns wieder auf den Fall $n = 2$ und setzen

$$\xi_1 = \zeta w_1, \quad \eta_1 = \zeta w_1^{-1}, \quad \xi_2 = \zeta \sigma w_2, \quad \eta_2 = \zeta \sigma w_2^{-1}$$

in Analogie zu (15). Unter der Voraussetzung

$$|\zeta| < \frac{r}{2}, \quad 0 < |\sigma| < 1, \quad \frac{1}{2} < |w_k| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

ist dann die Forderung $\xi < r$ in (34) erfüllt und außerdem

$$(35) \quad |\zeta| \leq |\xi| \leq 2 |\zeta|.$$

Wir schreiben den Ausdruck

$$\frac{x_k}{X_k} - 1 = e^{-\varphi_k t} \xi_k^{-1} (x_k - X_k)$$

als eine Potenzreihe in $\zeta, \sigma, w_1, w_2, A$ und $s = t - t_0$. In bezug auf w_1 und w_2 ist dies eine LAURENTSche Entwicklung; in bezug auf ζ beginnt die Reihe mit ζ^3 ; in bezug auf σ beginnt sie für $k = 2$ mit σ^{-1} und für $k = 1$ mit σ^0 . In den neuen Variablen gilt zufolge (33) und (35) die Abschätzung

$$\overline{\frac{x_1}{X_1} - 1} \leq b_9^{-1} r^3 |\zeta|^3, \quad \overline{\frac{x_2}{X_2} - 1} \leq b_9^{-1} r^3 |\zeta|^3 |\sigma|^{-1}.$$

Es sei σ_0 eine Zahl des Intervalls $0 < \sigma_0 < 1$, die später fixiert werden wird. Ist dann

$$\sigma_0 < |\sigma| < 1, \quad |\zeta| < b_{10} r \sigma_0^{\frac{1}{3}},$$

so gilt

$$b_9^{-1} r^3 |\zeta|^3 \leq b_9^{-1} r^3 |\zeta|^3 |\sigma|^{-1} < \frac{1}{2},$$

und man erhält für den Hauptwert von $\log \frac{x_k}{X_k}$ eine Potenzreihenentwicklung mit

$$(36) \quad \overline{\log \frac{x_1}{X_1}} \leq b_{11}^{-1} r^3 |\zeta|^3, \quad \overline{\log \frac{x_2}{X_2}} \leq b_{11}^{-1} r^3 |\zeta|^3 |\sigma_0|^{-1}.$$

Analoge Ungleichungen gelten für $\frac{y_k}{Y_k}$ anstelle von $\frac{x_k}{X_k}$ ($k = 1, 2$).

Um den Anschluß an den 5. Abschnitt zu bekommen, werde weiterhin

$$\varphi_1 = i(\varrho_1 + \alpha z_1 + \beta z_2), \quad \varphi_2 = i(\varrho_2 + \beta z_1 + \gamma z_2), \quad z_1 = x_1 y_1, \quad z_2 = x_2 y_2$$

vorausgesetzt, mit reellen Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta, \gamma$, irrationalem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \mu$ und $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq 4$. Wir übernehmen aus Abschnitt 5 auch die Annahme, daß $\alpha\mu - \beta > 0$ ist. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ seien wieder irgend zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q so gewählt, daß die Ungleichungen

$$(37) \quad 0 < \varrho_1(q\mu - p) < \varepsilon, \quad q > 0$$

gelten. Definiert man nun

$$t_0 = \frac{2\pi q}{|\lambda_1|},$$

so ist diese positive Zahl kleiner als $b_2 r^{-2}$, falls die Bedingung

$$(38) \quad r < b_{12} q^{-\frac{1}{2}}$$

erfüllt ist. Außerdem sei noch $b_{12} < b_6$, so daß (38) auch die andere Voraussetzung von Hilfssatz 2 umfaßt.

Wir untersuchen jetzt die Gleichung $x_1 = \xi_1$ für die Unbekannte $s = t - t_0$ und wollen zunächst annehmen, sie habe eine Lösung s vom absoluten Betrage < 1 . Aus der Zerlegung

$$\frac{x_k}{\xi_k} = \frac{x_k}{X_k} e^{\varphi_k t}$$

folgt für dieses s mit einer geeigneten ganzen Zahl Q die Gleichung

$$(39) \quad 2\pi i Q = \varphi_1(t_0 + s) + \log \frac{x_1}{X_1},$$

wobei z_1, z_2 in φ_1 durch $\xi_1 \eta_1 = \zeta^2$, $\xi_2 \eta_2 = (\zeta \sigma)^2$ zu ersetzen sind. Ist sogar

$$|s| < b_{13} < 1, \quad r < b_{14} q^{-\frac{1}{2}}, \quad |\zeta| < b_{15} r,$$

so ergibt sich aus (36) und (39), daß

$$(40) \quad Q = \pm q = \frac{i^{-1} \lambda_1}{|\lambda_1|} q$$

ist. Setzt man umgekehrt diesen Wert von Q in (39) ein und benutzt die Potenzreihe für $\log \frac{x_1}{X_1}$, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung für s eine Reihenentwicklung

$$(41) \quad \varphi_1 s = 2\pi i Q \left(1 - \frac{\varphi_1}{\lambda_1}\right) + \dots$$

und entsprechend

$$\varphi_1 t = 2\pi i Q + \dots,$$

wo die weiteren Glieder rechts eine mit der dritten Potenz von ζ beginnende Potenzreihe der Variablen $\zeta, \sigma, w_1, w_2, A$ bilden, welche für

$$r < b_{16} q^{-\frac{1}{2}}, \quad |\zeta| < b_{17} r, \quad |\sigma| < 1, \quad \frac{1}{2} < |w_k| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

absolut konvergiert und $|s| < b_{13}$ ergibt.

Für dasselbe $s = t - t_0$ sei nun auch die Gleichung $x_2 = \xi_2$ erfüllt. Entsprechend zu (39) wird dann

$$2\pi i P = \varphi_2(t_0 + s) + \log \frac{x_2}{X_2}$$

mit einem gewissen ganzen P . Hierin trage man für $\log \frac{x_2}{X_2}$ die Reihe nach Potenzen von $\zeta, \sigma, w_1, w_2, s, A$ ein und weiter für s die aus (41) folgende Reihe in $\zeta, \sigma, w_1, w_2, A$. Dabei ist zu bemerken, daß jetzt auch unendlich viele negative Potenzen von σ auftreten können. Wegen

$$(42) \quad 2\pi i (P \varphi_1 - Q \varphi_2) = \varphi_1 \log \frac{x_2}{X_2} - \varphi_2 \log \frac{x_1}{X_1}$$

und (37), (40) folgt dann

$$P = \pm p = \frac{p}{q} Q,$$

falls

$$\varepsilon < b_{18}, \quad r < b_{18} q^{-\frac{1}{2}}, \quad |\zeta| < b_{20} r \sigma_0^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_0 < |\sigma| < 1$$

vorausgesetzt wird. Endlich werde nun andererseits (42) für diesen Wert von P nach ζ aufgelöst, wobei also s durch (41) festgelegt ist. Nach Division durch den Faktor $\mp 2\pi$ erhält man für die linke Seite von (42) den Ausdruck

$$(43) \quad i^{-1}(p \varphi_1 - q \varphi_2) = (\alpha p - \beta q) \zeta^2 + (\beta p - \gamma q) (\zeta \sigma)^2 - \varrho_1(q\mu - p).$$

Von nun an seien α, β, γ fest, und es werde zugelassen, daß die weiteren Konstanten b_{21}, \dots, b_{31} auch noch von α, β, γ abhängen können. Für $\varepsilon < b_{21}$ ist dann

$$(44) \quad \alpha p - \beta q = \alpha(p - q\mu) + q(\alpha\mu - \beta) > b_{22}q,$$

und für $\sigma_0 < |\sigma| < b_{23}$ ist daher

$$|(\beta p - \gamma q) \sigma^2| < \frac{1}{2} |\alpha p - \beta q|.$$

Die Entwicklung der rechten Seite von (42) nach Potenzen von $\zeta, \sigma, w_1, w_2, A$ beginnt in ζ mit einem Gliede dritten Grades, und die Reihe der absoluten Beträge aller Glieder ist wiederum kleiner als $b_{24}^{-1} r^{-3} |\zeta|^3 |\sigma_0|^{-1}$. Unter der Voraussetzung

$$|\zeta| < b_{25} r^3 \sigma_0 q$$

wird nun

$$b_{24}^{-1} r^{-3} |\zeta|^3 |\sigma_0|^{-1} (b_{22} q |\zeta|^2)^{-1} < \frac{1}{2}.$$

Setzt man dann noch

$$(45) \quad \frac{\varrho_1(q\mu - p)}{\alpha p - \beta q} = v^2,$$

so erhält man aus (42) eine Potenzreihe

$$(46) \quad \zeta = f(v) = v + \dots$$

in v, σ, w_1, w_2, A , welche für

$$|v| < b_{26} r^3 \sigma_0 q, \quad \sigma_0 < |\sigma| < b_{23}, \quad \frac{1}{2} < |w_k| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

absolut konvergiert und die einzige Lösung von (42) unter der Bedingung

$$|\zeta| < b_{27} r^3 \sigma_0 q$$

bildet.

Man wähle nun

$$r = b_{28} q^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_0 = \frac{b_{29}}{2},$$

wobei noch b_{29} kleiner als die Konstante C_7 in Abschnitt 5 sein möge. Wird dann

$$\varepsilon < b_{20}, \quad |\zeta| < b_{31} q^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{b_{20}}{2} < |\sigma| < b_{29}, \quad \frac{1}{2} < |w_r| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

vorausgesetzt, so folgt aus (37), (44) und (45), daß (46) die Lösung von (42) liefert.

Entsprechend lassen sich die beiden Gleichungen $y_k = \eta_k$ ($k = 1, 2$) diskutieren. An die Stelle von (39) tritt dann

$$2 \pi i Q_1 = -\varphi_1(t_0 + s) + \log \frac{y_1}{Y_1}$$

mit ganzem Q_1 , woraus für $|\sigma| < b_{13}$, $r < b_{14} q^{-\frac{1}{2}}$, $|\zeta| < b_{15} r$ zunächst $Q_1 = -Q$ folgt. Entsprechend ergibt sich weiter

$$-2 \pi i P = -\varphi_2(t_0 + s) + \log \frac{y_2}{Y_2}$$

für $\varepsilon < b_{18}$, $r < b_{19} q^{-\frac{1}{2}}$, $|\zeta| < b_{20} r \sigma_0^{\frac{1}{2}}$, $\sigma_0 < |\sigma| < 1$, und hieraus

$$(47) \quad 2 \pi i (P \varphi_1 - Q \varphi_2) = \varphi_2 \log \frac{y_1}{Y_1} - \varphi_1 \log \frac{y_2}{Y_2}.$$

Im allgemeinen brauchen die durch Auflösung der beiden Gleichungen $x_k = \xi_k$ ($k = 1, 2$) nach s und ζ gefundenen Reihen in σ , w_1 , w_2 , A nicht mit den entsprechenden für die Gleichungen $y_k = \eta_k$ übereinzustimmen. Es werde nun aber angenommen, daß alle vier Gleichungen identisch in σ , w_1 , w_2 simultan lösbar sind. Indem man die beiden Reihen für ζ einander gleichsetzt, erhält man bei Koeffizientenvergleich bezüglich der Variablen σ , w_1 , w_2 analytische Bedingungsgleichungen für die unbestimmten Koeffizienten A . Diese sollen nun für den HAMILTONSchen Fall näher betrachtet werden.

9. Der Divergenzbeweis.

Zunächst bestimmen wir den bezüglich A linearen Bestandteil in der Reihe $\zeta = f(v)$, die wir durch Auflösung der Gleichungen $x_k = \xi_k$ ($k = 1, 2$) gefunden haben. Ist g irgendeine Potenzreihe in den A , so möge mit $K[g]$ der bezüglich A konstante Teil und mit $L[g]$ der lineare Teil bezeichnet werden. In den Entwicklungen $x_k = X_k + U_k + \dots$, $y_k = Y_k + V_k + \dots$ ist dann $K[x_k] = X_k$, $L[x_k] = U_k$, $K[y_k] = Y_k$, $L[y_k] = V_k$. Hieraus folgt

$$K\left[\log \frac{x_k}{X_k}\right] = 0, \quad L\left[\log \frac{x_k}{X_k}\right] = \frac{U_k}{X_k}.$$

Ist sodann $t = t_0 + s$ aus (39) bestimmt, so gilt

$$\varphi_1 K[t] = 2 \pi i Q,$$

wobei also t noch als Reihe in den Variablen ζ , σ , w_1 , w_2 und A anzusehen ist. Da nach (42), (43), (45) die Beziehung

$$\zeta^2 \left(1 + \frac{\beta p - \gamma q}{\alpha p - \beta q} \sigma^2\right) = v^2 + \frac{1}{2 \pi (\alpha P - \beta Q)} \left(\varphi_2 \log \frac{x_1}{X_1} - \varphi_1 \log \frac{x_2}{X_2}\right)$$

besteht, so ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\left(1 + \frac{\beta p - \gamma q}{\alpha p - \beta q} \sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} = \eta, \quad \hat{\zeta} = \frac{v}{\eta}, \quad \hat{\varphi}_k = (\varphi_k)_{\zeta = \hat{\zeta}}, \quad \hat{t} = \frac{2 \pi i Q}{\hat{\varphi}_1}$$

das Resultat

$$K[\hat{\zeta}] = \hat{\zeta}, \quad K[\hat{t}] = \hat{t}, \quad L[\hat{\zeta}] = \frac{1}{4 \pi v \eta (\alpha P - \beta Q)} \left(\varphi_2 \frac{U_1}{X_1} - \varphi_1 \frac{U_2}{X_2}\right)_{\hat{t} = \hat{t}, \hat{\zeta} = \hat{\zeta}}.$$

worin jetzt t und ζ Reihen in σ, w_1, w_2 und A sind. Nach (42) ist ferner $K[P\varphi_1 - Q\varphi_2] = 0$, also $p\hat{\varphi}_1 = q\hat{\varphi}_2$.

Andererseits seien \tilde{t} und $\tilde{\zeta}$ die entsprechenden Reihen in σ, w_1, w_2 und A , welche durch Auflösung der beiden anderen Gleichungen $y_k = \eta_k$ ($k = 1, 2$) entstanden sind. Dann wird auch $K[\tilde{t}] = \hat{t}$, $K[\tilde{\zeta}] = \hat{\zeta}$, und zufolge (47) ergibt sich weiter

$$L[\tilde{\zeta}] = \frac{1}{4\pi v \eta (\alpha P - \beta Q)} \left(\varphi_1 \frac{V_2}{Y_2} - \varphi_2 \frac{V_1}{Y_1} \right)_{t=\hat{t}, \zeta=\hat{\zeta}}.$$

Daher erhält man die Entwicklung

$$(48) \quad 2iv\eta(\alpha p - \beta q)(\tilde{\zeta} - \zeta) = \hat{t}^{-1} \left\{ p \left(\frac{U_1}{X_1} + \frac{V_1}{Y_1} \right) - q \left(\frac{U_2}{X_2} + \frac{V_2}{Y_2} \right) \right\}_{t=\hat{t}, \zeta=\hat{\zeta}} + \dots$$

nach Potenzen der A , wo die nicht-linearen Glieder rechts nicht angegeben sind.

Von nun an werde endlich vorausgesetzt, daß das System (31) ein HAMILTONSches ist, also $g_k = G_{y_k}$, $h_k = -G_{x_k}$ ($k = 1, 2$) und $G(x, y) = -\bar{G}(y, x)$ eine Potenzreihe in x_1, y_1, x_2, y_2 , die mit Gliedern fünften Grades beginnt. Demnach gilt

$$(49) \quad G(x, y) = \sum a_{m_1 n_1 m_2 n_2} x_1^{m_1} y_1^{n_1} x_2^{m_2} y_2^{n_2}, \quad a_{m_1 n_1 m_2 n_2} = -\bar{a}_{n_1 m_1 n_2 m_2},$$

wo m_1, n_1, m_2, n_2 alle nicht-negativen ganzen Zahlen mit der Summe > 4 durchlaufen. Die Koeffizienten $a = a_{m_1 n_1 m_2 n_2}$ sollen als komplexe Unbestimmte vom absoluten Betrage $|a| \leq 1$ angesehen werden, die nur der Bedingung in (49) zu genügen haben. Die Koeffizienten A der g_k, h_k gehen aus den a durch Multiplikation mit bestimmten ganzen Zahlen hervor und erfüllen dann offenbar die früher gestellte Bedingung $|A| \leq l + 1$ ($l = 4, 5, \dots$) bei den Gliedern l -ter Ordnung. Es ist klar, daß jede homogene Funktion der A in eine solche der a übergeht. Insbesondere ist das in (48) rechts hingeschriebene Glied genau der lineare Teil der Reihenentwicklung nach Potenzen der a .

Wir benutzen nun (25) und erhalten wegen $\hat{\varphi}_1 \hat{t} = 2\pi i Q$, $\hat{\varphi}_2 \hat{t} = 2\pi i P$ die Gleichung

$$(50) \quad (Y_k U_k + X_k V_k)_{t=\hat{t}, \zeta=\hat{\zeta}} = \hat{t} \int_0^1 \{y_k G_{y_k}(x, y) - x_k G_{x_k}(x, y)\} d\sigma$$

mit den Abkürzungen

$$(51) \quad x_1 = \xi_1 e^{2\pi i Q \sigma}, \quad y_1 = \eta_1 e^{-2\pi i Q \sigma}, \quad x_2 = \xi_2 e^{2\pi i P \sigma}, \quad y_2 = \eta_2 e^{-2\pi i P \sigma}$$

und

$$\xi_1 = \hat{\zeta} w_1, \quad \eta_1 = \hat{\zeta} w_1^{-1}, \quad \xi_2 = \hat{\zeta} \sigma w_2, \quad \eta_2 = \hat{\zeta} \sigma w_2^{-1}.$$

Ist jetzt

$$g = a_{m_1 n_1 m_2 n_2} x_1^{m_1} y_1^{n_1} x_2^{m_2} y_2^{n_2}$$

ein Glied der Potenzreihe G , so liefert es zu dem Integrale in (50) sicher dann den Beitrag 0, wenn es nicht nach der Substitution (51) von σ unabhängig wird. Für den Ausnahmefall ist

$$(52) \quad (n_1 - m_1)q = (m_2 - n_2)p,$$

und der entsprechende Beitrag zum Integral hat den Wert $(n_k - m_k) g$. Es folgt somit

$$(53) \quad \hat{t}^{-1} \left\{ p \left(\frac{U_1}{X_1} + \frac{V_1}{Y_1} \right) - q \left(\frac{U_2}{X_2} + \frac{V_2}{Y_2} \right) \right\}_{t=\hat{t}, \zeta=\hat{\zeta}} \\ = \sum' a_{m_1 n_1 m_2 n_2} \left\{ \frac{p}{\xi_1 \eta_1} (n_1 - m_1) - \frac{q}{\xi_2 \eta_2} (n_2 - m_2) \right\} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2},$$

wo genau über sämtliche Systeme nicht-negativer ganzer Zahlen m_1, n_1, m_2, n_2 zu summieren ist, welche der Bedingung (52) genügen und die Summe > 4 haben. Wegen (52) ist

$$n_1 - m_1 = p j, \quad m_2 - n_2 = q j$$

mit ganzem j . Entwickelt man noch den Faktor von $a_{m_1 n_1 m_2 n_2}$ in (53) nach aufsteigenden Potenzen von σ , so wird er

$$(54) \quad j (p^2 + q^2 \sigma^2) \hat{\zeta}^{m-2} \sigma^{m_1+n_1} w_1^{-p j} w_2^j = j q^2 v^{m-2} \sigma^{m_1+n_1-2} w_1^{-p j} w_2^j + \dots$$

mit $m = m_1 + n_1 + m_2 + n_2$, wo die Konstante v durch (45) bestimmt ist.

Es sei nun für irgendein Wertsystem a und alle σ, w_k aus dem Gebiet

$$\frac{b_{20}}{2} < |\sigma| < b_{20}, \quad \frac{1}{2} < |w_k| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

die Gleichung $\tilde{\zeta} = \zeta$ erfüllt. Aus (48), (53) erhält man dann durch Koeffizientenvergleich bezüglich σ, w_1, w_2 , daß die a unendlich vielen analytischen Gleichungen von der Form $\Phi(a) = 0$ genügen müssen, wo Φ eine für $|a| \leq 1$ absolut konvergente Reihe in den a bedeutet, in welcher lineare Glieder wirklich auftreten. Wählt man nämlich für m_2, n_2 irgend zwei verschiedene ganze Zahlen ≥ 0 , deren Differenz $m_2 - n_2 = q j$ durch q teilbar ist, setzt $n_1 = m_1 + p j = m_1 + \frac{p}{q} (m_2 - n_2)$ und läßt m_1 alle ganzen Zahlen $\geq \text{Min}(0, -p j)$ durchlaufen, so ergibt sich vermöge (54) eine Gleichung der Form

$$(55) \quad \sum_{m_1} a_{m_1 n_1 m_2 n_2} v^{m_1+n_1} + \dots = 0,$$

wo die weiteren Glieder in den a mindestens vom zweiten Grade sind. Damit die Indexsumme $m > 4$ wird, sei $q > 4$ vorausgesetzt. Wir wollen noch feststellen, welches der kleinste Wert von m ist, der bei einem in (55) linear auftretenden a überhaupt vorkommen kann. Man hat dann entweder $j = 1, n_2 = 0, m_2 = q$ und $m_1 = \text{Min}(0, -p), n_1 = \text{Min}(p, 0)$ zu wählen oder $j = -1, n_2 = q, m_2 = 0$ und $m_1 = \text{Min}(0, p), n_1 = \text{Min}(-p, 0)$. Die zugehörige minimale Indexsumme $|p| + q$ tritt bei genau einem linearen Glied in (55) auf.

Die Zahlenkoeffizienten in (55) hängen außer von $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta, \gamma$ noch von p und q ab. Bisher waren p, q als gegebene ganze Zahlen angesehen worden, die teilerfremd sind und den Ungleichungen (37) zu genügen haben. Nun gibt es aber unendlich viele solcher Paare p, q , und man kann aus ihnen eine solche Folge bilden, daß sogar der positive Wert $\varrho_1(q \mu - p) = \varepsilon_q$ gegen 0 strebt und $2 \varepsilon_q < \varepsilon$ ist. Dann gilt also (37) auch mit $2 \varepsilon_q$ anstelle von ε .

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Beweis des Satzes leicht führen. Es werde vorausgesetzt, daß das HAMILTONsche System

$$\frac{dx_k}{dt} = \varphi_k x_k + G_{x_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\varphi_k y_k - G_{y_k} \quad (k = 1, 2)$$

bei irgendeiner Wahl der Koeffizienten a von G durch eine konvergente kanonische Potenzreihen-Substitution in die Normalform übergeführt werden kann. Nach Abschnitt 5 haben die Lösungen zu den Anfangswerten $\xi_1 = \zeta w_1$, $\eta_1 = \zeta w_1^{-1}$, $\xi_2 = \zeta \sigma w_2$, $\eta_2 = \zeta \sigma w_2^{-1}$ eine Periode $t = \tau$, wenn für ζ eine gewisse Potenzreihe in σ , w_k , w_k^{-1} ($k = 1, 2$) gesetzt wird, die im Gebiet $|\sigma| < C_7$, $\frac{1}{2} < |w_k| < 2$ konvergiert, und dann ist zufolge (16) noch

$$|\zeta|^2 < 2 C_8^{-1} \varepsilon_q q^{-1}, \quad \left| \tau - \frac{2\pi q}{|\lambda_1|} \right| < 2 C_4^{-1} \varepsilon_q.$$

Hierbei ist aber $2 \varepsilon_q < c_7$ vorauszusetzen. Diese Bedingung ist wegen $\varepsilon_q \rightarrow 0$ für fast alle Paare p, q erfüllt, und aus dem gleichen Grunde gilt dann auch $2 C_8^{-1} \varepsilon_q < b_{31}^2$ und $2 C_4^{-1} \varepsilon_q < b_{13}$. Da nach einer früheren Voraussetzung auch $b_{29} < C_7$ ist, so muß die im vorigen Abschnitt unter den Bedingungen

$$\left| t - \frac{2\pi q}{|\lambda_1|} \right| < b_{13}, \quad |\zeta| < b_{31} q^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{b_{29}}{2} < |\sigma| < b_{29}, \quad \frac{1}{2} < |w_k| < 2 \quad (k = 1, 2)$$

durch Auflösung der Gleichungen $x_k = \xi_k$ eindeutig bestimmte LAURENTsche Reihenentwicklung von ζ nach Potenzen von σ , w_1 , w_2 mit der in Abschnitt 5 gefundenen identisch sein. Da aber letztere auch die Gleichungen $y_k = \eta_k$ mit demselben $t = \tau$ erfüllt, so folgt $\tilde{\zeta} = \zeta$ für $\frac{b_{29}}{2} < |\sigma| < b_{29}$, $\frac{1}{2} < |w_k| < 2$. Demnach müssen die Koeffizienten a für fast alle Paare p, q die unendlich vielen Gleichungen (55) erfüllen und speziell die Gleichungen

$$(56) \quad a_{0p00} + \dots = 0 \quad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0 \right), \quad a_{-p000} + \dots = 0 \quad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0 \right),$$

in der alle weiteren linear auftretenden a die Indexsumme $m > |p| + q$ haben. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind für $|a| \leq 1$ absolut konvergente Potenzreihen, und es ist evident, daß die sämtlichen für die verschiedenen Paare p, q erhaltenen Potenzreihen in (56) analytisch unabhängig sind, da ja bereits zwischen ihren linearen Teilen keine Abhängigkeit besteht und daher die mit irgendwelchen endlich vielen dieser Reihen gebildete Funktionalmatrix stets den maximalen Rang hat. Diese Aussage über analytische Unabhängigkeit bleibt bestehen, wenn die a noch der Realitätsbedingung in (49) unterworfen werden.

Wir fassen das System der Koeffizienten a in der HAMILTONschen Funktion H als Koordinaten des Punktes H im Funktionenraum \mathfrak{H} auf. Da die Gleichungen (56) analytisch sind, so liegen ihre Lösungen in \mathfrak{H} nirgends dicht. Die Punkte von \mathfrak{H} , welche mindestens einer der unendlich vielen Gleichungen genügen, gehören also zur Vereinigungsmenge \mathfrak{V} von abzählbar vielen, nirgends dichten Punktmengen. Andererseits müssen nun aber für die konvergent in die Normalform transformierbaren H sogar fast alle Gleichungen (56) erfüllt sein, und die entsprechenden Punkte in \mathfrak{H} bilden daher eine Teilmenge \mathfrak{R} von \mathfrak{V} . Als Vereinigungsmenge abzählbar vieler, nirgends dichter Mengen ist \mathfrak{R} von erster Kategorie im Sinne von BAIRE. Durch ein Einschachtelungsverfahren ersieht man, daß $\mathfrak{H} - \mathfrak{V}$ in \mathfrak{H} dicht ist und daß \mathfrak{H} selbst, also auch $\mathfrak{H} - \mathfrak{R}$, nicht von erster Kategorie ist. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß aus der Voraussetzung der konvergenten Transformierbarkeit von H in die Normalform nur folgt, daß die Gleichungen (56) für alle genügend großen q erfüllt sind, wobei die Folge der q

durch die Bedingung $0 < \varrho_1(q\mu - p) \rightarrow 0$ festgelegt ist. Da man aber keine Voraussetzung über die Größe des Konvergenzbereiches der Transformation macht, so kann man kein q angeben, für welches notwendigerweise (56) erfüllt sein muß. Will man also von einem vorgelegten HAMILTONschen System durch Benutzung unseres Satzes feststellen, daß es nicht konvergent in die Normalform übergeführt werden kann, so hat man zu zeigen, daß unendlich viele der Bedingungen (56) nicht erfüllt sind. Für diese Feststellung ist kein finites Verfahren bekannt, obwohl die Koeffizienten in (56) sämtlich explizit berechenbar sind. Man weiß also z. B. auch jetzt immer noch nicht, ob die Differentialgleichungen des restringierten Dreikörperproblems bei festem Massenverhältnis in der Umgebung der LAGRANGESchen Gleichgewichtslösungen konvergent in die Normalform transformierbar sind oder nicht. Man kann aber leicht ein konstruktives Schachtelverfahren angeben, das in einer vorgeschriebenen Umgebung eines Punktes von \mathfrak{H} einen Punkt von $\mathfrak{H} - \mathfrak{K}$ liefert.

Hieran läßt sich noch folgende Bemerkung knüpfen: Ist H irgendein Punkt von $\mathfrak{H} - \mathfrak{K}$, sind also von den Bedingungen (56) unendlich viele nicht erfüllt, so ersetze man G durch νG für reelles ν des Intervalls $-1 \leq \nu \leq 1$ und bilde die entsprechenden linken Seiten von (56), indem man dort νa statt a schreibt. Bei festgehaltenen a sind nun unendlich viele der so entstehenden Potenzreihen in ν nicht identisch 0, und folglich gibt es höchstens abzählbar viele Werte ν des Intervalls $-1 \leq \nu \leq 1$, für welche auch nur mindestens irgendeine dieser Potenzreihen 0 wird. Sind also für G unendlich viele der Bedingungen (56) nicht erfüllt, so gibt es höchstens abzählbar viele Werte des reellen Parameters ν , für welche das HAMILTONsche System

$$\frac{dx_k}{dt} = \varphi_k x_k + \nu G_{x_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\varphi_k y_k - \nu G_{y_k} \quad (k = 1, 2)$$

konvergent in die Normalform transformiert werden kann. In dieser Aussage wurde die ursprüngliche Beschränkung auf das Intervall $-1 \leq \nu \leq 1$ fortgelassen, da man den allgemeineren Fall $-h \leq \nu \leq h$ für $h = 1, 2, \dots$ mit der Ersetzung von $x_k, y_k, G(x, y)$ durch $h^{-1}x_k, h^{-1}y_k, h^2G(h^{-1}x, h^{-1}y)$ auf den früheren zurückführen kann.

10. Literatur.

- [1] SIEGEL, C. L.: Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. IIa, Jahrg. 1952, 21—30. — [2] DELAUNAY, C. E.: Théorie du mouvement de la lune. Paris Mém. prés. 28 (1860), 29 (1867). — [3] LINDSTEDT, A.: Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. Abh. K. Akad. Wiss. St. Petersburg 31, Nr. 4 (1882). — [4] POINCARÉ, H.: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Bd. 2. Paris 1893. — [5] WHITTAKER, E. T.: On the solution of dynamical problems in terms of trigonometric series. Proc. London math. Soc. 34, 206—221 (1902). — [6] BIRKHOFF, G. D.: Dynamical systems. New York 1927. — [7] CHERRY, T. M.: On the solution of Hamiltonian systems of differential equations in the neighbourhood of a singular point. Proc. London math. Soc. II 27, 151—170 (1928). — [8] SIEGEL, C. L.: On the integrals of canonical systems. Ann. of Math. 42, 806—822 (1941). — [9] BIRKHOFF, G. D.: Surface transformations and their dynamical applications. Acta math. 43, 1—119 (1922). — [10] POINCARÉ, H.: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta math. 13, 1—272 (1890).

(Eingegangen am 16. Februar 1954.)

Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten.

Von

GUSTAV DOETSCH in Freiburg i. B.

§ 1. Das Problem und die Lösungsmethode.

Wenn die Mellin-Transformation (abgekürzt \mathfrak{M} -Transformation)

$$(1) \quad \mathfrak{M}\{\Phi\} = \int_0^{\infty} z^{s-1} \Phi(z) dz = \varphi(s)$$

in zwei Punkten mit verschiedener Abszisse und damit in einem Streifen $x_1 < \Re s < x_2$ konvergiert, so stellt sie dort eine analytische Funktion $\varphi(s)$ dar, die sich eventuell in die Halbebene $\Re s \leq x_1$ bzw. $\Re s \geq x_2$ fortsetzen läßt, dort aber im allgemeinen Singularitäten aufweist. Das Problem, das wir behandeln, lautet: *Gegeben seien zwei Mellin-Transformierte $\varphi_1 = \mathfrak{M}\{\Phi_1\}$, $\varphi_2 = \mathfrak{M}\{\Phi_2\}$, deren Singularitäten (in einer der in Frage kommenden Halbebenen) bekannt sind; was läßt sich über die Singularitäten von $\mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ aussagen?* Die Lösung gibt u. a. ein Mittel an die Hand, um aus den verhältnismäßig wenigen bekannten¹⁾ \mathfrak{M} -Transformierten beliebig viele andere abzuleiten, die man zwar nicht explizit kennt, von denen man aber wenigstens die Singularitäten angeben kann.

Das Problem kann auch unter ausschließlicher Verwendung der Funktionen φ_1, φ_2 und ohne Bezugnahme auf die \mathfrak{M} -Transformation formuliert werden, denn in den Funktionsräumen, die wir später zugrunde legen werden, ist

$$(2) \quad \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma) \varphi_2(s-\sigma) d\sigma.$$

Es handelt sich also darum, von den Singularitäten zweier Funktionen auf die Singularitäten ihrer „komplexen Faltung“ zu schließen²⁾.

Unsere Frage steht in Analogie zu der Aufgabe, aus den Singularitäten zweier Potenzreihen³⁾ $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Singularitäten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ abzuleiten, welche durch den HADAMARDSCHEN Kompositionssatz gelöst wird. Während dieser dadurch bewiesen wird, daß in der zu (2) analogen Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int f_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) f_2(z\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (|\zeta| = \text{const.})$$

der Integrationsweg im Holomorphiebereich des Integranden verschoben wird

¹⁾ Während weit über 1000 Laplace-Transformierte explizit berechnet worden sind, dürfte die Zahl der bekannten \mathfrak{M} -Transformierten kaum 100 erreichen.

²⁾ Die komplexe Faltung, die früher nur in rein theoretischen Zusammenhängen vorkam, tritt neuerdings auch in der physikalischen Literatur auf.

³⁾ Genau genommen müßten Laurentreihen, verallgemeinert auf Dirichletsche Reihen, zur Analogie herangezogen werden.

(eine Methode, die auch auf (2) anwendbar wäre), gehen wir bei der \mathfrak{M} -Transformation einen anderen Weg, der dadurch, daß er gewisse tiefere Sätze über die \mathfrak{M} -Transformation benutzt, die Zusammenhänge durchsichtiger erscheinen läßt und außerdem die Hauptteile von $\varphi(s)$ unmittelbar liefert. (Umgekehrt könnte man diese Gedankengänge auch auf die Potenzreihen übertragen und so einen neuen Beweis für den HADAMARDSCHEN Satz erhalten.)

Vorab ist zu bemerken: Um sowohl für die Originalfunktionen $\Phi(z)$ als auch für die Bildfunktionen $\varphi(s)$ Räume zu bekommen, die unabhängig von der \mathfrak{M} -Transformation durch innere funktionentheoretische Eigenschaften charakterisiert werden können und für die weiterhin neben der Formel (2) auch die „komplexe Umkehrformel“

$$(3) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \varphi(s) ds$$

ohne Einschränkung gültig ist, legen wir folgende, schon von MELLIN benutzten Klassen zugrunde⁴⁾ (es wird in der Folge immer

$$z = \varrho e^{i\vartheta}, \quad s = x + iy$$

gesetzt).

Klasse \mathfrak{B} : Die in einem Winkelraum $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ (mit eventuellem Ausschluß des Nullpunktes) analytischen Funktionen $\Phi(z)$, die bei $z = 0$ und $z = \infty$ Potenzabschätzungen genügen:

$$|\Phi(z)| \leq C \varrho^{-x_1} \text{ für } \varrho \leq 1, \quad |\Phi(z)| \leq C \varrho^{-x_2} \text{ für } \varrho > 1 \quad (x_1 < x_2).$$

Klasse \mathfrak{b} : Die in einem Vertikalstreifen $x_1 \leq x \leq x_2$ analytischen Funktionen $\varphi(s)$, die bei $y = \pm \infty$ Exponentialabschätzungen genügen:

$$|\varphi(s)| \leq C e^{-\vartheta_1 y} \text{ für } y < 0, \quad |\varphi(s)| \leq C e^{-\vartheta_2 y} \text{ für } y \geq 0 \quad (\vartheta_1 < \vartheta_2).$$

Jedem $\Phi \in \mathfrak{B}$ entspricht vermöge (1) ein $\varphi \in \mathfrak{b}$, aus dem man Φ durch (3) zurückerhält; jedem $\varphi \in \mathfrak{b}$ entspricht vermöge (3) ein $\Phi \in \mathfrak{B}$, aus dem φ durch (1) zurückgewonnen werden kann. Zwischen den Funktionen der beiden Klassen besteht also eine eindeutige Zuordnung. Sind Φ_1 und Φ_2 zwei Funktionen der Klasse \mathfrak{B} (mit denselben ϑ_1, ϑ_2), deren Konstante x_1, x_2 wir durch obere Indizes unterscheiden, so ist $\varphi(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ eine in dem Streifen $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} < \Re s < x_2^{(1)} + x_2^{(2)}$ analytische Funktion der Klasse \mathfrak{b} , für welche gilt:

$$(4) \quad \varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma) \varphi_2(s-\sigma) d\sigma \text{ mit } x_1^{(1)} < x < x_2^{(1)}, \quad x_1^{(2)} < \Re s - x < x_2^{(2)}.$$

Unsere *Beweismethode* ist nun die folgende: Wenn zwei Funktionen φ_1, φ_2 aus \mathfrak{b} in je einer (linken) Halbebene Pole haben, so besitzen die entsprechenden Funktionen Φ_1, Φ_2 aus \mathfrak{B} asymptotische Entwicklungen (für $z \rightarrow 0$), deren Koeffizienten und Exponenten sich aus den zu den Polen von φ_1, φ_2 gehörigen Hauptteilen ergeben (Hilfssatz 2 in § 2). Das Produkt $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ gehört auch

⁴⁾ Für die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Tatsachen siehe G. DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation, I. Band, S. 408, 414. Basel: Verlag Birkhäuser 1950.

zu \mathfrak{B} und hat die durch gliedweise Multiplikation der vorigen Entwicklungen resultierende Reihe zur asymptotischen Entwicklung (Hilfssatz 1). Wenn aber die Funktion $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \in \mathfrak{B}$ eine asymptotische Entwicklung besitzt, so hat die entsprechende Funktion $\varphi = \mathfrak{M}\{\Phi\} = \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ Pole mit Hauptteilen, die sich aus den Koeffizienten und Exponenten der asymptotischen Entwicklung von Φ ergeben (Hilfssatz 3 = Umkehrung von Hilfssatz 2). Damit sind die Pole von φ und ihre Hauptteile letzten Endes aus denen von φ_1, φ_2 berechenbar.

Wenn es sich bei φ_1, φ_2 um rechte Halbebenen handelt, so treten bei Φ_1, Φ_2 asymptotische Entwicklungen für $z \rightarrow \infty$ auf.

In § 2 sind die benutzten Hilfssätze zusammengestellt, in § 3 wird der soeben skizzierte Beweis durchgeführt.

§ 2. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Sind Φ_1 und Φ_2 für $z \rightarrow 0$ asymptotisch in Reihen der Form

$$\Phi_1(z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu}^{(0)} + a_{\nu}^{(1)}(-\log z) + \cdots + a_{\nu}^{(k_{\nu})}(-\log z)^{k_{\nu}}] z^{\lambda_{\nu}} \quad (\Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \cdots \rightarrow \infty)$$

$$\Phi_2(z) \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} [b_{\mu}^{(0)} + b_{\mu}^{(1)}(-\log z) + \cdots + b_{\mu}^{(l_{\mu})}(-\log z)^{l_{\mu}}] z^{\kappa_{\mu}} \quad (\Re \kappa_0 < \Re \kappa_1 < \cdots \rightarrow \infty)$$

entwickelbar, so wird $\Phi(z) = \Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z)$ asymptotisch durch die Reihe dargestellt, die durch gliedweise Multiplikation beider Reihen und Ordnen nach Potenzen von z entsteht.

Beweis: Man kann annehmen, daß die Folgen λ_{ν} und κ_{μ} übereinstimmen, indem man sie zu einer Folge vereinigt und die in einer Reihe nicht vorkommenden Potenzen mit dem Koeffizienten 0 versieht. Ebenso kann man die zwei gleichen $\lambda_{\nu}, \kappa_{\mu}$ entsprechenden k_{ν}, l_{μ} als gleich voraussetzen. Schließlich dürfen alle $\Re \lambda_{\nu}$ und $\Re \kappa_{\mu}$ als ≥ 0 angenommen werden, weil anderenfalls für die Funktionen $z^{-\lambda_{\nu}} \Phi_1(z)$ und $z^{-\kappa_{\mu}} \Phi_2(z)$ diese Voraussetzungen erfüllt sind. — Die asymptotische Entwickelbarkeit von Φ_1 und Φ_2 bedeutet:

$$\Phi_1(z) = \sum_{\nu=0}^n [a_{\nu}^{(0)} + \cdots + a_{\nu}^{(k_{\nu})}(-\log z)^{k_{\nu}}] z^{\lambda_{\nu}} + O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n}),$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{\mu=0}^n [b_{\mu}^{(0)} + \cdots + b_{\mu}^{(l_{\mu})}(-\log z)^{l_{\mu}}] z^{\kappa_{\mu}} + O(z^{\kappa_n + \varepsilon_n}),$$

wo die ε_n gewisse kleine positive Zahlen sind. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) \Phi_2(z) &= \sum_{\lambda_{\nu} + \kappa_{\mu} \leq \lambda_n} [a_{\nu}^{(0)} b_{\mu}^{(0)} + \cdots + a_{\nu}^{(k_{\nu})} b_{\mu}^{(l_{\mu})}] (-\log z)^{k_{\nu} + l_{\mu}} z^{\lambda_{\nu} + \kappa_{\mu}} \\ &+ \sum_{\lambda_n < \lambda_{\nu} + \kappa_{\mu} \leq 2\lambda_n} [a_{\nu}^{(0)} b_{\mu}^{(0)} + \cdots + a_{\nu}^{(k_{\nu})} b_{\mu}^{(l_{\mu})}] (-\log z)^{k_{\nu} + l_{\mu}} z^{\lambda_{\nu} + \kappa_{\mu}} \\ &+ \sum_{\nu=0}^n [a_{\nu}^{(0)} + \cdots + a_{\nu}^{(k_{\nu})}(-\log z)^{k_{\nu}}] z^{\lambda_{\nu}} \cdot O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n}) \\ &+ \sum_{\mu=0}^n [b_{\mu}^{(0)} + \cdots + b_{\mu}^{(l_{\mu})}(-\log z)^{l_{\mu}}] z^{\kappa_{\mu}} \cdot O(z^{\kappa_n + \varepsilon_n}) + O(z^{2\lambda_n + 2\varepsilon_n}). \end{aligned}$$

Wegen $\Re \lambda_r \geq 0$ sind für $z \rightarrow 0$ die vier letzten Summanden gleich

$$O(z^{\lambda_n + \epsilon'_n}) + O(z^{\lambda_n + \epsilon''_n}) + O(z^{\lambda_n + \epsilon'''_n}) + O(z^{2\lambda_n + 2\epsilon_n}) = O(z^{\lambda_n + \epsilon''''_n}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Die Funktion $\varphi(s)$ sei in einer linken Halbebene $\Re s \leq a$ analytisch bis auf die Pole $-\lambda_0, -\lambda_1, \dots$ mit $a > -\Re \lambda_0 > -\Re \lambda_1 > \dots \rightarrow -\infty$. Der Hauptteil der Laurententwicklung bei $-\lambda_r$ habe die Gestalt

$$\frac{a_r^{(1)}}{s + \lambda_r} + \dots + \frac{a_r^{(l_r)}}{(s + \lambda_r)^{l_r}}.$$

Nach Ausschluß der Pole durch kleine Kreise gelte in jedem Streifen $a_0 \leq x \leq a$ (a_0 beliebig $< a$) eine Abschätzung der Form

$$|\varphi(x + iy)| \leq K(a_0) e^{-\theta_0 |y|} \quad (\theta_0 \text{ fest } > 0).$$

Dann ist $\varphi(s)$ in $-\Re \lambda_0 < \Re s \leq a$ eine \mathfrak{b} -Funktion. Ihre zugehörige \mathfrak{B} -Funktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \varphi(s) ds \quad (-\Re \lambda_0 < x \leq a)$$

ist in dem Winkelraum $|\vartheta| < \vartheta_0$ analytisch. In jedem kleineren Winkelraum $|\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta$ genügt sie einer Abschätzung

$$|\Phi(z)| \leq C(\delta) |z|^{-a} \quad \text{für } |z| > 1,$$

während sie für $z \rightarrow 0$ in $|\vartheta| < \vartheta_0$ (gleichmäßig in $|\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta$) die asymptotische Entwicklung besitzt:

$$\Phi(z) \approx \sum_{r=0}^{\infty} \left[a_r^{(1)} + \frac{a_r^{(2)}}{1!} (-\log z) + \dots + \frac{a_r^{(l_r)}}{(l_r - 1)!} (-\log z)^{l_r - 1} \right] z^{\lambda_r}.$$

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Hilfssatz 3. $\Phi(z)$ sei analytisch in dem Winkelraum $|\vartheta| \leq \vartheta_0$ und habe dort gleichmäßig für $z \rightarrow 0$ die asymptotische Entwicklung

$$\Phi(z) \approx \sum_{r=0}^{\infty} [b_r^{(0)} + b_r^{(1)} (-\log z) + \dots + b_r^{(k_r)} (-\log z)^{k_r}] z^{\lambda_r} \quad (\Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty),$$

während gleichmäßig für $z \rightarrow \infty$ gilt:

$$\Phi(z) = O(z^\tau) \quad \text{mit } \tau < \Re \lambda_0.$$

Dann ist $\Phi(z)$ eine \mathfrak{B} -Funktion. Die zugehörige \mathfrak{b} -Funktion

$$\varphi(s) = \int_0^\infty z^{s-1} \Phi(z) dz$$

ist in der Halbebene $\Re s < -\tau$ meromorph; die Pole sind die Punkte $-\lambda_r$, die entsprechenden Hauptteile lauten:

$$b_r^{(0)} \frac{1}{s + \lambda_r} + b_r^{(1)} \frac{1!}{(s + \lambda_r)^2} + \dots + b_r^{(k_r)} \frac{k_r!}{(s + \lambda_r)^{k_r + 1}}.$$

In jedem Streifen $-\tau_0 \leq x \leq -\tau - \delta$ genügt $\varphi(s)$ nach Ausschluß der darin liegenden Pole durch kleine Kreise einer Abschätzung der Form

$$|\varphi(s)| \leq C(\tau_0, \delta) e^{-\theta_0 |y|}.$$

Die Hilfssätze 2 und 3 wurden für den Spezialfall, daß die Exponenten λ_r (d. h. die Pole $-\lambda_r$) eine äquidistante Folge auf einer Parallelen zur reellen

Achse bilden, von MELLIN⁵⁾ bewiesen. Sie gelten aber auch in dem oben formulierten allgemeinen Fall⁶⁾).

§ 3. Ein Satz über die Singularitäten von Mellin-Transformierten.

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist der folgende

Satz. Die ursprünglich in den Streifen $x'_1 < x < x'_2$ bzw. $x'_1 < x < x'_2$ konvergenten \mathfrak{M} -Transformierten $\varphi_1(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1\}$, $\varphi_2(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_2\}$ seien in den Halbebenen $\Re s < x'_2$ bzw. $\Re s < x'_2$ analytisch bis auf die Pole $-\lambda'_v$ ($\Re \lambda'_0 < \Re \lambda'_1 < \dots \rightarrow \infty$) bzw. $-\lambda''_\mu$ ($\Re \lambda''_0 < \Re \lambda''_1 < \dots \rightarrow \infty$) mit den Hauptteilen

$$(5) \quad \frac{c_v^{(1)}}{s + \lambda'_v} + \dots + \frac{c_v^{(l_v)}}{(s + \lambda'_v)^{l_v}}$$

bzw.

$$(6) \quad \frac{d_\mu^{(1)}}{s + \lambda''_\mu} + \dots + \frac{d_\mu^{(k_\mu)}}{(s + \lambda''_\mu)^{k_\mu}}.$$

In jedem Streifen $x'_0 < x < x'_2$ bzw. $x'_0 < x < x'_2$ (x'_0 und x'_0 beliebig $< x'_2$ bzw. x'_2) gelte nach Ausschluß der Pole durch kleine Kreise die Abschätzung

$$|\varphi_1(x + iy)| \leq K' (x'_0) e^{-\vartheta_0 |y|} \quad \text{bzw.} \quad |\varphi_2(x + iy)| \leq K'' (x'_0) e^{-\vartheta_0 |y|} \quad (\vartheta_0 > 0).$$

Dann ist die zunächst in dem Streifen $-\Re \lambda'_0 - \Re \lambda'_1 < \Re s < x'_2 + x'_2$ konvergente \mathfrak{M} -Transformierte $\varphi(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$, die dort auch durch

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma) \varphi_2(s-\sigma) d\sigma \quad (-\Re \lambda'_0 < x < x'_2, -\Re \lambda'_0 < \Re s - x < x'_2)$$

definiert werden kann, in der ganzen Halbebene $\Re s < x'_2 + x'_2$ analytisch mit Ausnahme (höchstens) der Pole $-\lambda'_v - \lambda''_\mu$ mit den Hauptteilen

$$(7) \quad \sum_{\alpha=1}^{l_v} \sum_{\beta=1}^{k_\mu} \left(\frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \right) \frac{c_v^{(\alpha)} d_\mu^{(\beta)}}{(s + \lambda'_v + \lambda''_\mu)^{\alpha + \beta - 1}}.$$

(Ergeben mehrere $-\lambda'_v - \lambda''_\mu$ denselben Wert, so sind die entsprechenden Hauptteile zu vereinigen.)

Bemerkungen: 1. Wenn der Hauptteil (7) identisch verschwindet, so ist $-\lambda'_v - \lambda''_\mu$ kein Pol, sondern eine Stelle der Holomorphie von $\varphi(s)$.

2. Hat eine der Funktionen φ_1, φ_2 in der betreffenden Halbebene keine Singularitäten, so gilt für $\varphi(s)$ dasselbe.

3. Sind speziell die Pole $-\lambda'_v$ und $-\lambda''_\mu$ einfach mit den Residuen c_v bzw. d_μ , so sind auch die Pole von $\varphi(s)$ einfach mit den Residuen $c_v d_\mu$.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 sind die Originalfunktionen Φ_1, Φ_2 der Bildfunktionen φ_1, φ_2 analytisch in $|\theta| < \vartheta_0$ und genügen in $|\theta| \leq \vartheta_0 - \delta$ den Abschätzungen

$$|\Phi_1(z)| \leq C'(\delta) |z|^{-x'_1} \quad \text{bzw.} \quad |\Phi_2(z)| \leq C''(\delta) |z|^{-x'_2} \quad \text{für } |z| > 1,$$

⁵⁾ HJ. MELLIN: Die Theorie der asymptotischen (sic) Reihen vom Standpunkte der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale. Ann. Acad. Sci. Fenn. (A) 18 (1922), 108 S.; siehe die Wiedergabe in G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 256—262. Berlin: Julius Springer 1937.

⁶⁾ Vollständig ausgeführte Beweise siehe in dem demnächst erscheinenden II. Band des unter 4) zitierten Handbuchs, Kap. 6 § 3 und Kap. 5 § 2.

während sie für $z \rightarrow 0$ gleichmäßig in $|\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta$ asymptotisch so entwickelbar sind:

$$(8) \quad \Phi_1(z) \approx \sum_{r=0}^{\infty} \left[c_r^{(1)} + \frac{c_r^{(2)}}{1!} (-\log z) + \cdots + \frac{c_r^{(l_r)}}{(l_r-1)!} (-\log z)^{l_r-1} \right] z^{\lambda_r'}$$

bzw.

$$(9) \quad \Phi_2(z) \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[d_{\mu}^{(1)} + \frac{d_{\mu}^{(2)}}{1!} (-\log z) + \cdots + \frac{d_{\mu}^{(k_{\mu})}}{(k_{\mu}-1)!} (-\log z)^{k_{\mu}-1} \right] z^{\lambda_{\mu}''}.$$

Folglich ist $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ eine \mathfrak{B} -Funktion, die in $|\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta$ der Abschätzung

$$|\Phi_1(z) \Phi_2(z)| \leq C(\delta) |z|^{-(\lambda_1' + \lambda_2'')} \quad \text{für } |z| > 1$$

genügt und nach dem Hilfssatz 1 eine asymptotische Entwicklung besitzt, die durch gliedweise Multiplikation der Entwicklungen für Φ_1 und Φ_2 entsteht. Ihre entsprechende \mathfrak{M} -Transformierte $\varphi(s)$ ist eine \mathfrak{b} -Funktion, die für $-\Re \lambda_0' - \Re \lambda_0'' < \Re s < x_2' + x_2''$ durch (1) gegeben ist, die sich aber nach Hilfssatz 3 in die Halbebene $\Re s < x_2' + x_2''$ fortsetzen läßt bis auf die Pole $-\lambda_{\nu}' - \lambda_{\mu}''$, wobei in dem zugehörigen Hauptteil jedem durch Multiplikation von (8) und (9) entstandenen Glied der Form

$$\frac{c_r^{(\alpha)}}{(\alpha-1)!} \frac{d_{\mu}^{(\beta)}}{(\beta-1)!} (-\log z)^{\alpha+\beta-2} z^{\lambda_r' + \lambda_{\mu}''}$$

ein Partialbruch

$$\frac{c_r^{(\alpha)} d_{\mu}^{(\beta)}}{(\alpha-1)! (\beta-1)!} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(s+\lambda_r' + \lambda_{\mu}'')^{\alpha+\beta-1}} = \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1} \frac{c_r^{(\alpha)} d_{\mu}^{(\beta)}}{(s+\lambda_r' + \lambda_{\mu}'')^{\alpha+\beta-1}}$$

entspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel: $\mathfrak{M} \left\{ \frac{1}{1-z} \right\} = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ konvergiert in $0 < \Re s < 1$, ist aber in $\Re s < 1$ meromorph mit den Polen $-\lambda_{\nu} = -\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots$) und den Residuen $(-1)^{\nu}$. $\mathfrak{M} \{e^{-z}\} = \Gamma(s)$ konvergiert in $0 < \Re s < \infty$, ist aber in $\Re s < \infty$ meromorph mit den Polen $-\mu$ ($\mu = 0, 1, \dots$) und den Residuen $\frac{(-1)^{\mu}}{\mu!}$. Die Funktionen $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ und $\Gamma(s)$ genügen in jedem Vertikalstreifen Abschätzungen der Form $O(e^{-\pi|y|})$. Also ist die transzendente Funktion

$$\int_0^{\infty} z^{s-1} \frac{e^{-z}}{1+z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\pi \Gamma(\sigma)}{\sin \pi(s-\sigma)} d\sigma \quad (0 < x, 0 < \Re s - x < 1)$$

in der ganzen Ebene analytisch bis auf die Pole $-\kappa$ ($\kappa = 0, 1, \dots$). Da jeder Pol $-\kappa$ außer $\kappa = 0$ auf mehrfache Weise in der Form $-\nu - \mu$ zustande kommt, erhält man für die Residuen in $0, -1, -2, \dots$ die Werte

$$1, 1 \left(-\frac{1}{1!} \right) + (-1) 1 = -2, 1 \frac{1}{2!} + (-1) \left(-\frac{1}{1!} \right) + 1 \cdot 1 = \frac{5}{2}, \\ 1 \left(-\frac{1}{3!} \right) + (-1) \frac{1}{2!} + 1 \left(-\frac{1}{1!} \right) + (-1) 1 = -\frac{8}{3}, \dots$$

Natürlich gilt ein entsprechender Satz für den Fall, daß die Funktionen φ_1, φ_2 in rechten Halbebenen meromorph sind.

(Eingegangen am 17. März 1954.)

Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Streckenkomplexe.

Von

OTT-HEINRICH KELLER in Halle (Saale).

Eine Folge von Gruppen

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_{n-1} \supset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{F}_1 \mid \mathfrak{F}_2 \mid \cdots \mid \mathfrak{F}_n$$

die mit einer gegebenen Gruppe \mathfrak{G} beginnt und mit \mathfrak{E} endet und bei der jedes folgende Glied \mathfrak{G}_i ein maximaler Normalteiler des vorhergehenden \mathfrak{G}_{i-1} mit einfacher Faktorgruppe $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i = \mathfrak{F}_i$ ist, heißt eine *Kompositionsreihe* von \mathfrak{G} . Die Glieder der Reihe heißen nach WIELANDT¹⁾ *nachinvariante* Untergruppen von \mathfrak{G} , die Faktorgruppen \mathfrak{F}_i heißen *Kompositionsfaktoren*; wir setzen sie zwischen senkrechten Strichen unter die Lücken der Reihe. Wenn keine Unklarheit zu befürchten ist, wollen wir auch wohl die Gruppe und ihre Kompositionsreihe durch die Folge ihrer Kompositionsfaktoren andeuten.

Wir wollen von *links* und *rechts* sprechen in dem Sinne, daß die umfassende Gruppe links, die enthaltene rechts steht.

Es gilt der JORDAN-HÖLDERSche Kompositionsreihensatz, daß die *Kompositionsfaktoren durch die Gruppe bis auf die Anordnung und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind*. Es sieht so aus, als ob die Kompositionsfaktoren eine Art von *Eigenexistenz* hätten, unabhängig von ihrer Stellung innerhalb der Kompositionsreihe. Es wird unsere erste Aufgabe sein, diese Eigenexistenz herauszuarbeiten und nach der Möglichkeit zu fragen, die Kompositionsfaktoren der einen Reihe in einer anderen Reihe unter einer Auswahl isomorpher Kompositionsfaktoren *wiederzuerkennen*.

Es zeigt sich, daß verschiedene Typen von Gruppen dabei ganz verschiedene Hilfsmittel erfordern. Wir haben auf der einen Seite die p -Gruppen, auf der anderen Seite solche Gruppen, von denen keine Kompositionsreihe zwei p -Gruppen derselben Primzahl hintereinander enthält. Eine solche Gruppe wollen wir „*locker*“ nennen im Gegensatz zu der sehr festen Fügung der p -Gruppen. Dazwischen gibt es Mischtypen der mannigfachsten Art. Bei den lockeren Gruppen scheint die Unbestimmtheit der Reihenfolge ein Hinweis darauf zu sein, daß die Kompositionsreihe die Struktur der Gruppe nur unscharf darstellt. Wenn wir uns die Kompositionsfaktoren durch *Strecken* darstellen, liefert uns die Kompositionsreihe eine Aufreihung von solchen Strecken auf einer Linie. Wir wollen versuchen, diese Linie durch einen im Raum ausgedehnten *Streckenkomplex* zu ersetzen, der durch die Gruppe auch in der

¹⁾ Math. Z. 45, 209—244 (1939). Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen.

Anordnung eindeutig bestimmt ist. Aus diesem Streckenkomplex lassen sich dann leicht die Kompositions-, Haupt- und charakteristischen Reihen ablesen.

1. Betrachten wir etwa die zyklische Gruppe \mathfrak{G} 6. Ordnung, erzeugt durch a mit der Relation $a^6 = 1$. Normalteiler sind $\mathfrak{A} = \{1, a^2, a^4\}$ und $\mathfrak{B} = \{1, a^3\}$. \mathfrak{G} ist direktes Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Die Kompositionsreihen sind

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{G} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{E}.$$

Die Faktorgruppen sind $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} = \{\{1, a^2, a^4\}, \{a^3, a^5, a^7 = a\}\}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B} = \{\{1, a^3\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^5\}\}$. Aus diesen Nebengruppen kann man dann wieder die Elemente von \mathfrak{B} und von \mathfrak{A} als Repräsentanten herauslesen. Diese sind auch die einzigen auf die Nebengruppen verteilten Elemente, die für sich eine Gruppe bilden. Es gibt je nur einen Normalteiler von \mathfrak{G} , der zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ isomorph ist, eben \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{A} . Sie bestimmen sich also gegenseitig eindeutig. Wir wollen nun $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ wieder mit \mathfrak{B} , $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ wieder mit \mathfrak{A} bezeichnen, obwohl sie zwar isomorph sind, aber aus ganz verschiedenen Arten von Elementen bestehen. Wir sagen, wir haben $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ in \mathfrak{B} , $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ in \mathfrak{A} *wiedererkannt*. Dann ist \mathfrak{G} nicht nur $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$, sondern auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}|\mathfrak{B} = \mathfrak{B}|\mathfrak{A}$. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind also in zweierlei Sinn miteinander *vertauschbar*: 1. als direkte Faktoren, elementweise, 2. als Kompositionsfaktoren in ihrer Stellung innerhalb der Kompositionsreihe. Man kann nun zeigen, daß dieses Beispiel insofern schon den allgemeinen Fall repräsentiert, als zwei benachbarte Kompositionsfaktoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} nur dann vertauschbar sind, wenn ihre Zusammensetzung $\mathfrak{A}|\mathfrak{B}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ darstellt. Es scheint also so, als sei der zweite Vertauschungsbegriff inhaltlich nichts anderes, als der erste, übliche. Bei lockeren Gruppen ist dies in der Tat so. Es gilt der Satz: Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}|\mathfrak{B}$ keine p -Gruppe, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} einfach, \mathfrak{B} direkter Faktor, so ist der andere zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ isomorphe direkte Faktor eindeutig bestimmt. Wir definieren nun: In diesem anderen direkten Faktor wollen wir \mathfrak{A} , in der zu \mathfrak{B} isomorphen Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ wollen wir \mathfrak{B} wiedererkennen. Da dann auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}|\mathfrak{A}$, können wir sagen, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} seien vertauschbar. Aus der elementweisen Vertauschbarkeit können wir also auf die Vertauschbarkeit der Kompositionsfaktoren schließen. Umgekehrt setzt die Vertauschbarkeit der Kompositionsfaktoren voraus, daß die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ jeweils eindeutig bestimmten Normalteilern isomorph sind, und das bedeutet: \mathfrak{G} ist direktes Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

Dieser Vertauschungsbegriff von Kompositionsfaktoren ist für unsere Überlegungen grundlegend. Es gilt der Satz: Zwei beliebige Kompositionsreihen einer lockeren Gruppe lassen sich durch eine Kette von Vertauschungen ineinander überführen.

2. Ganz andere Erscheinungen treffen wir bei p -Gruppen an. Hier kann von einer Eigenexistenz oder von Wiedererkennbarkeit von Kompositionsfaktoren nicht die Rede sein. Betrachten wir etwa die Vierergruppe \mathfrak{V} .

Sie sei erzeugt durch a und b mit den Relationen $a^2 = b^2 = (a, b) = 1$ [wo (a, b) in der üblichen Schreibweise den Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ bedeutet]. Maximale Normalteiler sind unter anderen $\mathfrak{A} = \{1, a\}$, $\mathfrak{B} = \{1, b\}$. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind elementweise vertauschbar, $\mathfrak{V} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$; $\mathfrak{V}/\mathfrak{A}$ ist $\{\{1, a\}, \{b, ab\}\}$. Aus

diesen Nebengruppen kann man nun aber auf verschiedene Weise je ein Element so auswählen, daß ihre Gesamtheit eine Gruppe bildet: $\{1, b\}$ oder $\{1, ab\}$. In welcher dieser Gruppen sollen wir nun $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ wiedererkennen? Die beiden Möglichkeiten sind durch nichts vor einander ausgezeichnet. Versuchen wir es mit einer mehrdeutigen Definition. Wir wollen mit einem \rightarrow die Vertauschung, durch ein \sim einen Wechsel der Repräsentanten der Faktorgruppe andeuten und schreiben den direkten Faktor, den wir als Normalteiler und Glied der Kompositionsreihe auffassen, rechts, den anderen, in dem wir die Faktorgruppe wiedererkennen wollen, links. Es ist:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B} &= \{1, a\} \times \{1, b\} \\
 &= \{\{1, b\}, \{a, ab\}\} \mid \{1, b\} \\
 &\sim \{\{1, b\}, \{ab, a\}\} \mid \{1, b\} \\
 &= \{1, ab\} \times \{1, b\} \rightarrow \{1, b\} \times \{1, ab\} \\
 &= \{\{1, ab\}, \{b, a\}\} \mid \{1, ab\} \\
 &\sim \{\{1, ab\}, \{a, b\}\} \mid \{1, ab\} \\
 &= \{1, a\} \times \{1, ab\} \\
 &\rightarrow \{1, ab\} \times \{1, a\} \\
 &= \{\{1, a\}, \{ab, b\}\} \mid \{1, a\} \\
 &\sim \{\{1, a\}, \{b, ab\}\} \mid \{1, a\} \\
 &= \{1, b\} \times \{1, a\}.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch zwei Vertauschungen, die sich doch eigentlich aufheben müßten, dasselbe wie durch eine. Eine mehrdeutige Definition des Wiedererkennens und Vertauschens führt also bei p -Gruppen auf Ungeheimheiten, und wir müssen auf sie verzichten. Dafür wissen wir von anderen Ausgangspunkten her einiges über die Komposition von p -Gruppen: Eine p -Gruppe besitzt eine aufsteigende und eine absteigende Zentralreihe; jede ihrer Untergruppen ist nachinvariant.

3. Im allgemeinen wird eine Gruppe weder locker, noch p -Gruppe sein. Hier durchdringen sich zwei verschiedene Strukturtypen: der eine ist durch den Streckenkomplex, der andere durch die Zentralreihe gekennzeichnet. Aber keiner der beiden für sich reicht zur Beschreibung der Gruppe hin. Da nun der Typ der lockeren Gruppen außerhalb der hier vorliegenden Betrachtungen kein Interesse erweckt hat, müssen wir die Struktur von solchen Gruppen durchdenken, die selbst nicht p -Gruppen sind, bei denen aber in gewissen Kompositionsreihen mehrere p -Gruppen hintereinander als Kompositionsfaktoren stehen können. Es wird dann zweckmäßig sein, auch andere Normalreihen als nur die Kompositionsreihen zu betrachten und zusammengesetzte p -Gruppen als Ganze, als Kompositionsfaktoren stehen zu lassen, sie nach Bedarf aufzuspalten, oder auch nach Bedarf zwei p -Gruppen, die in einer Kompositionsreihe nebeneinander stehen, zu einer einzigen zu verschmelzen. Um dem Rechnung zu tragen, wollen wir festsetzen:

Definition 1: Einfache Gruppen und p -Gruppen mögen *pseudo-einfach* heißen. Sie sind die Bausteine unseres Aufbaues. Ein Normalteiler heiße

pseudo-maximal, wenn seine Faktorgruppe pseudo-einfach ist. Eine Folge von Gruppen, deren letztes Glied \mathfrak{E} ist und in der jedes folgende Glied pseudo-maximaler Normalteiler des vorhergehenden ist, heiße eine *Pseudo-Kompositionsreihe*. Die Faktorgruppen aufeinanderfolgender Glieder wollen wir jedoch, wenn keine Verwechslung zu befchten ist, Kompositionsfaktoren (und nicht Pseudo-Kompositionsfaktoren) nennen.

Wir werden also in § 1 die Vertauschbarkeit der Kompositionsfaktoren untersuchen und zunächst zeigen, daß sie eine Eigenschaft ihrer selbst in ihrer Eigenexistenz ist und nicht von ihrer Stellung innerhalb der Pseudo-Kompositionsreihe abhängt. Weiter müssen wir zeigen (§ 2), daß jeder Kompositionsfaktor einer Pseudo-Kompositionsreihe, wenn überhaupt, dann in einem bestimmten Kompositionsfaktor einer gegebenen anderen Pseudo-Kompositionsreihe wiederzuerkennen ist, daß dieser also nicht von der Wahl der Ketten der Vertauschungen abhängt. Wenn wir uns dann angesehen haben, auf welche Arten zwei unvertauschbare Kompositionsfaktoren nebeneinander stehen können, können wir in § 3 den Streckenkomplex von lockeren Gruppen konstruieren. Der Streckenkomplex erweist sich dabei nicht nur als eine Veranschaulichung schon bekannter Sätze, sondern als das adquate Mittel, die Struktur der lockeren Gruppen überhaupt darzustellen. Wir müssen dann prüfen, ob sich der Ansatz auch auf andere Gruppen übertragen läßt. Man kann, wie sich in § 4 zeigt, einen kleinen Schritt weitergehen und gewisse allgemeinere Gruppen behandeln. Dabei zeichnen sich schon die Schranken der Reichweite des Verfahrens ab: die Angabe des Streckenkomplexes allein reicht zur Kennzeichnung der Struktur der Komposition der Gruppe nicht mehr aus, wenn wir ihn auch noch zeichnen können. Darüber hinaus auf die allgemeinen Gruppen führt der Ansatz nicht. Man kann zwar mit Gewalt eine Konstruktionsvorschrift geben, erhält aber dann sehr komplizierte und unanschauliche Gebilde, die uns über die Struktur der Komposition weder neue Erkenntnisse vermitteln, noch die vorhandenen anschaulich machen. Wir werden dies schon am Beispiel der Vierergruppe sehen können.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle Herrn v. D. WAERDEN für seine zahlreichen kritischen Hinweise und Verbesserungsvorschläge, mit denen er die endgültige Darstellung dieser Arbeit wesentlich gefördert hat, meinen herzlichsten Dank zu sagen.

§ 1. Die Vertauschungsstze.

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie weit ein direkter Faktor eines direkten Produktes durch den andern eindeutig bestimmt ist.

Satz 1. Es sei \mathfrak{A} ein direkter Faktor einer Gruppe \mathfrak{G} , es sei also $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ oder auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$. Dann gibt es eine abelsche Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{D}$, die zu einer Untergruppe \mathfrak{E} des Zentrums von \mathfrak{A} isomorph ist, und wir können \mathfrak{B}' dadurch gewinnen, daß wir jedes Element einer jeden Nebengruppe von $\mathfrak{B}/\mathfrak{D}$ mit dem ihm im Isomorphismus zugeordneten Element von \mathfrak{E} multiplizieren.

\mathfrak{B}' ist zu \mathfrak{B} und zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ 1-isomorph, und wir können den Isomorphismus θ dadurch herstellen, daß wir jedem Element von \mathfrak{B} dasjenige Element von \mathfrak{B}'

zuordnen, das in derselben Nebengruppe nach \mathfrak{A} liegt, das sich also nur um ein Element von \mathfrak{A} von ihm unterscheidet. Der Homomorphismus $\theta - 1$ ordnet jedem Element von \mathfrak{B} dieses erwähnte Element von \mathfrak{A} zu. Da die Elemente von \mathfrak{A} mit denen von \mathfrak{B} und denen von $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^\theta$ vertauschbar sind, sind sie es auch mit denen von $\mathfrak{B}^{\theta^{-1}}$; diese gehören also dem Zentrum von \mathfrak{A} an. Sie bilden eine abelsche Gruppe \mathfrak{C} . Diejenigen Elemente von \mathfrak{B} , denen durch $\theta - 1$ die Einheit zugeordnet ist, bilden einen Normalteiler \mathfrak{D} von \mathfrak{B} . Es ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$, denn θ ordnet die gemeinsamen Elemente von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' und natürlich nur diese sich selbst zu. Es ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{C}$ wie behauptet.

Ist umgekehrt $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ und bildet man \mathfrak{B}' dadurch, daß man eine beliebige abelsche Faktorgruppe von \mathfrak{B} gliedweise mit einer dazu isomorphen Untergruppe des Zentrums von \mathfrak{A} multipliziert, so ist auch \mathfrak{B}' gliedweise mit \mathfrak{A} vertauschbar und hat mit \mathfrak{A} nur die Einheit gemein, und es ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}'$.

Sind insbesondere \mathfrak{A} und \mathfrak{B} pseudoeinfach und ist $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$, so hat \mathfrak{A} ein Zentrum, ist also eine p -Gruppe; da \mathfrak{B} einen Homomorphismus auf \mathfrak{A} gestattet, ist \mathfrak{B} ebenfalls p -Gruppe, und zwar zur selben Primzahl. Dann ist auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ p -Gruppe.

Zusatz. Ist ein direktes Produkt zweier pseudoeinfacher Gruppen nicht selbst p -Gruppe, so ist ein Faktor durch den anderen eindeutig bestimmt.

Es sei jetzt in der Pseudokompositionsreihe

$$(1) \quad \mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \dots > \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{F}_i \mid \mathfrak{F}_{i+1}$$

\mathfrak{G}_{i+2} ein Normalteiler von \mathfrak{G}_i und $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ direktes Produkt; der eine Faktor sei \mathfrak{F}_{i+1} . Ist dann $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ keine p -Gruppe, so ist der andere Faktor \mathfrak{F}_{i+1} eindeutig bestimmt. \mathfrak{F}_{i+1} besteht aus Nebengruppen nach \mathfrak{G}_{i+2} , und die Gesamtheit der in diesen Nebengruppen vereinigten Elemente von \mathfrak{G}_i bildet einen Normalteiler \mathfrak{F}_{i+1} von \mathfrak{G}_i . Wir können die Pseudokompositionsreihe

$$(2) \quad \mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{F}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \dots > \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{F}_i \mid \mathfrak{F}_{i+1}$$

bilden. Es ist $\mathfrak{F}_i \cong \mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{F}_{i+1} \cong \mathfrak{F}_i$. Wir wollen von jetzt an diese isomorphen Gruppen jeweils als dieselben ansehen und mit demselben Buchstaben bezeichnen, obwohl sie ja aus Nebengruppen nach verschiedenen Normalteilern bestehen.

Definition 2. In der Pseudokompositionsreihe (1) sei

1. \mathfrak{G}_{i+2} Normalteiler von \mathfrak{G}_i ,
2. $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ keine p -Gruppe,
3. $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ direkter Faktor von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$.

Dann wollen wir sagen, die Pseudokompositionsreihen (1) und (2) entstünden aus einander durch *Vertauschung* von \mathfrak{F}_i und \mathfrak{F}_{i+1} . \mathfrak{F}_i und \mathfrak{F}_{i+1} seien *vertauschbar*. \mathfrak{F}_i sei in $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$, \mathfrak{F}_{i+1} in $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ wiederzuerkennen.

Sind wohl die Voraussetzungen 1. und 3. erfüllt, 2. aber nicht, sind also \mathfrak{F}_i und \mathfrak{F}_{i+1} p -Gruppen derselben Primzahl, so sei auf eine Erklärung der Vertauschung verzichtet. Es gibt jedoch in diesem Falle eine Pseudokompositionsreihe, in der \mathfrak{G}_{i+2} unmittelbar auf \mathfrak{G}_i folgt. Wir wollen sagen, der Kompo-

sitionsfaktor $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ sei aus \mathfrak{F}_i und \mathfrak{F}_{i+1} durch *Verschmelzung* hervorgegangen. Unter *Aufspaltung* wollen wir den umgekehrten Vorgang verstehen.

Es sei \mathfrak{G}_i ein Glied einer Pseudokompositionsreihe, \mathfrak{F}_k ein Kompositionsfaktor links von \mathfrak{G}_i (also $k \leq i-1$). Ist dann \mathfrak{F}_k mit allen \mathfrak{F}_l ($k < l \leq i-1$) zwischen sich und \mathfrak{G}_i vertauschbar, so wollen wir sagen, \mathfrak{F}_k können an \mathfrak{G}_i *herangeschoben* werden.

Satz 2. *Zwei Pseudokompositionsreihen einer Gruppe gehen durch eine Kette von Vertauschungen benachbarter Kompositionsfaktoren, von Verschmelzungen zweier p -Gruppen in eine und von Aufspaltungen einer p -Gruppe in zwei Kompositionsfaktoren auseinander hervor.*

Zum Beweise brauchen wir nur den üblichen Beweis des JORDAN-HÖLDERschen Kompositionsreihensatzes bzw. des SCHREIERSchen Normalreihensatzes zu verfolgen. Es seien

$$(3) \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_r = \mathfrak{E}$$

$$(4) \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_s = \mathfrak{E}$$

zwei Pseudokompositionsreihen von \mathfrak{G} , und es sei etwa $r \leq s$. Für $r=1$, also für einfache oder p -Gruppen ist der Satz trivial. Angenommen, er sei für Gruppen mit einer höchstens $(r-1)$ -gliedrigen Pseudokompositionsreihe schon bewiesen. Ist nun $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1$, so trifft auf diese Gruppe die Induktionsannahme zu, und die Aussage gilt auch für \mathfrak{G} . Ist $\mathfrak{G}_1 \neq \mathfrak{H}_1$, so sei \mathfrak{D} der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}_1$, \mathfrak{P} das Erzeugnis $\langle \mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1 \rangle$. \mathfrak{D} ist Normalteiler von \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{P} .

\mathfrak{P} ist von \mathfrak{G}_1 oder von \mathfrak{H}_1 verschieden, etwa von \mathfrak{G}_1 . Ist \mathfrak{P} außerdem von \mathfrak{G} verschieden, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ nicht einfach, also p -Gruppe. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_1$ enthält dann die p -Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ als Faktorgruppe, ist also ebenfalls p -Gruppe zur selben Primzahl. Dann ist aber auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ eine p -Gruppe.

Wir schalten nun zwischen (3) und (4) noch die Pseudokompositionsreihen

$$(5) \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

$$(6) \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

und, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ eine p -Gruppe ist, dazwischen noch

$$(7) \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

ein und führen die Übergänge (3) \rightarrow (5) \rightarrow [(7) \rightarrow] (6) \rightarrow (4) aus. Für die Übergänge (3) \rightarrow (5) und (6) \rightarrow (4) gilt der Satz nach Induktionsannahme. Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ nicht p -Gruppe, so ist \mathfrak{G} das Erzeugnis von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1 , und $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ ist direktes Produkt $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}_1$. Wir erhalten also (6) aus (5) durch Vertauschung der beiden ersten Kompositionsfaktoren.

Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ p -Gruppe, so bedeutet der Übergang (5) \rightarrow (7) die Verschmelzung zweier p -Gruppen, der Übergang (7) \rightarrow (6) die Aufspaltung einer p -Gruppe. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir müssen uns zunächst überzeugen, daß Verschmelzen und Aufspalten von p -Gruppen an den Vertauschbarkeitsverhältnissen nichts ändert. Wir brauchen dazu den folgenden

Hilfssatz 1. Es seien \mathfrak{A} und \mathfrak{N} Normalteiler einer Gruppe \mathfrak{G} , $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Dann folgt jede der Beziehungen

$$(8) \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{N} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{N})/\mathfrak{N} \times \mathfrak{B}/\mathfrak{N}$$

$$(9) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

aus der anderen.

Fassen wir in (9) in \mathfrak{G} und \mathfrak{B} jeweils diejenigen Elemente, die sich nur um Elemente von \mathfrak{N} unterscheiden, in eine Nebengruppe nach \mathfrak{N} zusammen und ergänzen die Elemente von \mathfrak{A} durch Multiplikation mit \mathfrak{N} zu Nebengruppen von $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$, so geht (9) in (8) über.

Umgekehrt ist (9) bewiesen²⁾, wenn wir unter Voraussetzung von (8) zeigen, daß \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Normalteiler von \mathfrak{G} sind, daß sie \mathfrak{G} erzeugen und daß sie nur die Einheit gemein haben. Nun ist \mathfrak{A} nach Voraussetzung Normalteiler von \mathfrak{G} , \mathfrak{B} nach dem 2. Isomorphiesatz³⁾, weil $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist. Hätten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ein Element $\neq 1$ gemein, so hätten auch $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ die zugehörige Nebengruppe nach \mathfrak{N} gemein, die von \mathfrak{N} verschieden wäre. Sie erzeugen \mathfrak{G} . Denn jedes Element g von \mathfrak{G} kommt in einer Nebengruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ vor, und diese läßt sich nach (8) als Produkt einer Nebengruppe von $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$ und einer von $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ darstellen. Durch beliebige Wahl je eines Elementes $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ in diesen Nebengruppen erhalten wir eine Darstellung $g n = a \cdot b$ mit $n \in \mathfrak{N}$, also $g = a \cdot n^{-1} \cdot b$, weil n^{-1} mit a vertauschbar ist. Es ist $n^{-1} \cdot b \in \mathfrak{B}$. Damit ist der Hilfsatz bewiesen.

Satz 3. Es sei ein Kompositionsfaktor \mathfrak{F} mit zwei p -Gruppen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 vertauschbar und es seien \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 auf der einen Seite von \mathfrak{F} verschmelzbar. Dann sind sie es auch auf der anderen Seite. Die Verschmelzungen sind isomorph und \mathfrak{F} ist mit der Verschmelzung vertauschbar.

Es sei also

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{F} \quad | \quad \mathfrak{P}_2$

eine Pseudokompositionsreihe. Sind \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 p -Gruppen derselben Primzahl, so sei es \mathfrak{F} nicht. Daß \mathfrak{F} mit \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 vertauschbar sein soll, heißt

(10₁) \mathfrak{G}_{i+2} ist Normalteiler von \mathfrak{G}_i ,

$$\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2} \text{ ist direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$$

(10₂) \mathfrak{G}_{i+3} ist Normalteiler von \mathfrak{G}_{i+1} ,

$$\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3} \text{ ist direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} \times \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$$

und es gibt die Pseudokompositionsreihen

$$(11) \quad \mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{F} \quad | \quad \mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{P}_2$

und

$$(11_2) \quad \mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{P}_2 \quad | \quad \mathfrak{F}$

Sollen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 links von \mathfrak{F} verschmelzbar sein, so muß $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}$ Normalteiler von \mathfrak{G}_i sein [Voraussetzung (a)]. Sollen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 rechts von \mathfrak{F} verschmelzbar sein, so muß \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von \mathfrak{G}_{i+1} sein [Voraussetzung (b)].

Wir zeigen jetzt, daß aus jeder der Voraussetzungen (a) oder (b) die andere folgt, sowie, daß \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von \mathfrak{G}_i ist.

Dies letztere folgt aus (a); denn wegen (10₂) ist $\mathfrak{G}_{i+3} = \mathfrak{G}_{i+2} \cap \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}$, die beide Normalteiler von \mathfrak{G}_i sind. Es folgt aus (b), denn wegen (10₁) ist $\mathfrak{G}_i = \{\mathfrak{G}_{i+1},$

²⁾ Siehe z. B. v. D. WAERDEN: Moderne Algebra I. Berlin 1930, § 42, S. 141.

³⁾ v. D. WAERDEN a. a. O., § 40, S. 136.

\mathfrak{G}_{i+1} , von denen beiden \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler ist.

Ist nun \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von \mathfrak{G}_i , so ist es das auch von \mathfrak{G}_{i+1} als einer Untergruppe von \mathfrak{G}_i , so ist also (b) richtig; so sind weiter nach dem 2. Isomorphiesatz $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$ und $\mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3}$, und $\mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$ dann ebenfalls, weil es durch sie nach (10₂) eindeutig bestimmt ist und bei jedem Automorphismus von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3}$ in sich übergeht. Daraus folgt (a) wieder nach dem 2. Isomorphiesatz.

Aus (10_{1,2}) und Hilfssatz 1 mit $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$, $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$ folgt nun: $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3} = \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3} \times \mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$. Wir können also die Pseudokompositionsreihen (11_{1,2}) durch die eine Vertauschung von \mathfrak{F} mit $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_2$ ineinander überführen.

Satz 4. Ist ein Kompositionsfaktor \mathfrak{F} mit einer p -Gruppe \mathfrak{P} vertauschbar, und läßt sich \mathfrak{P} in der Pseudokompositionsreihe in $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_2$ aufspalten, so ist \mathfrak{F} auch mit \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 einzeln vertauschbar. Es gebe die Pseudokompositionsreihen

$$\begin{array}{c} \mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{G} \\ \mathfrak{P} \quad | \quad \mathfrak{F} \\ \mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{G} \\ \mathfrak{F} \quad | \quad \mathfrak{P} \end{array}$$

und es sei \mathfrak{G}_{i+2} Normalteiler von \mathfrak{G}_i , $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ direktes Produkt

$$\begin{aligned} (12) \quad \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2} &= \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \\ \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1} &\cong \mathfrak{P} \text{ sei aufgespalten in } \mathfrak{G}_i > \mathfrak{H} > \mathfrak{G}_{i+1} \\ &\quad \mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} &\cong \mathfrak{P} \text{ in } \mathfrak{G}_{i+1} > \tilde{\mathfrak{H}} > \mathfrak{G}_{i+2} \\ &\quad \mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{P}_2 \end{aligned}$$

Wir wollen sagen, diese beiden Aufspaltungen seien dieselben, wenn

$$(13_1) \quad \tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i+1}$$

$$(13_2) \quad \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{G}_{i+2}.$$

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, daß (13₁) und (13₂) äquivalent sind. Ist \mathfrak{H} gegeben und $\tilde{\mathfrak{H}}$ durch (13₁) erklärt, so folgt (13₂) aus (12) nach einem bekannten Satz⁴⁾. Ist $\tilde{\mathfrak{H}}$ gegeben und \mathfrak{H} durch (13₂) erklärt, so folgt (13₁) daraus, daß in (13₂) der zweite direkte Faktor durch den ersten eindeutig bestimmt ist. Denn dieser ist nach dem erwähnten Satze gleich $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i+1})/\mathfrak{G}_{i+2}$.

Aus (13₂) folgt $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_{i+1} \cong \tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{G}_{i+2}$, also $\mathfrak{P}_2 \cong \tilde{\mathfrak{P}}_2$. Da weiter $\mathfrak{H} > \mathfrak{G}_{i+1}$, ist nach (12) $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_i$, also nach dem 1. Isomorphiesatz

$$\mathfrak{G}_i/\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{H} \cong \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i+1} = \mathfrak{G}_{i+1}/\tilde{\mathfrak{H}}$$

also $\mathfrak{P}_1 \cong \tilde{\mathfrak{P}}_1$. (13₂) bedeutet nun unmittelbar die Vertauschbarkeit von \mathfrak{F} und \mathfrak{P}_2 und die Existenz der Pseudokompositionsreihe

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{H} > \tilde{\mathfrak{H}} > \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{P}_1 \quad | \quad \mathfrak{F} \quad \mathfrak{P}_2$

$\tilde{\mathfrak{H}}$ ist Normalteiler von \mathfrak{G}_i , weil \mathfrak{H} und \mathfrak{G}_{i+1} es sind, und aus (12) und (13₂)

⁴⁾ V. D. WAERDEN a. a. O., § 42, S. 143.

folgt nach Hilfssatz 1, wenn man dort $\mathfrak{G}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$, $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$, $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$, $\tilde{\mathfrak{H}}/\mathfrak{G}_{i+2}$ ersetzt:

$$\mathfrak{G}_i/\tilde{\mathfrak{H}} = \tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{H}} \times \mathfrak{G}_{i+1}/\tilde{\mathfrak{H}},$$

und dies bedeutet die Vertauschbarkeit von \mathfrak{F} und \mathfrak{P}_1 . Damit ist der Satz bewiesen.

(13_{1,3}) enthält außerdem die Vorschrift, wie man eine Aufspaltung einer p -Gruppe nach einer Vertauschung wiederzuerkennen hat.

Satz 5. Es sei

$$\mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \dots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{B} \quad | \quad \mathfrak{C}$

eine Pseudokompositionsreihe. Es sei möglich, \mathfrak{E} durch Vertauschungen über \mathfrak{B} und \mathfrak{A} hinweg nach links zu bringen. Es wird behauptet: Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} links von \mathfrak{C} miteinander vertauschbar gewesen, so sind sie es auch rechts von \mathfrak{C} .

Der Satz hat auch noch Sinn, wenn zwei oder drei der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ p -Gruppen der gleichen Primzahl sind, obwohl die Vertauschung dann nicht definiert ist. Wir wollen deshalb den Satz noch einmal unabhängig vom Vertauschungsbegriff formulieren und nur zur Orientierung unter die Lücken der Pseudokompositionsreihen die Gruppen schreiben, denen die Faktorguppen isomorph sind. Bei eindeutiger Vertauschbarkeit stehen dort die Faktorguppen selbst.

Es sei also

$$(14_1) \mathfrak{G}_{i+2} \text{ Normalteiler von } \mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2} \text{ direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$$

$$(14_2) \mathfrak{G}_{i+3} \text{ Normalteiler von } \mathfrak{G}_{i+1}, \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3} \text{ direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} \times \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$$

$$(14_3) \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} \text{ Normalteiler von } \mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i/\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} \text{ direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+1}/\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+1}^*/\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}.$$

Es seien also außer der gegebenen noch die folgenden Pseudokompositionsreihen möglich:

$$\mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \dots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{B} \quad | \quad \mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{C}$

$$\mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \dots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{B}$

$$\mathfrak{G} > \dots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1}^* > \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} > \mathfrak{G}_{i+3} > \dots > \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{B}$

Dann wird behauptet, daß \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von \mathfrak{G}_i und daß $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3}$ dreifaches direktes Produkt ist, dessen Faktoren jeweils $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ isomorph sind.

Da $\mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} = \mathfrak{C}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} \cong \mathfrak{B}$ die direkten Faktoren von $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$ sind, ist ihr Durchschnitt die Einheit und $\mathfrak{G}_{i+2} \cap \tilde{\mathfrak{G}}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+3}$. Da \mathfrak{G}_{i+2} und $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}$ Normalteiler von \mathfrak{G}_i sind, ist es auch \mathfrak{G}_{i+3} . Wir betrachten von allen Gruppen nur noch die Faktorguppen nach \mathfrak{G}_{i+3} und nehmen an, \mathfrak{G}_{i+3} sei \mathfrak{E} .

Es ist $\mathfrak{G}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{E}$, denn wegen (14₂) verteilen sich die Elemente von $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+2}$ auf die einzelnen Nebengruppen von $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und diese wieder wegen (14₁) auf die einzelnen Nebengruppen von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$. Also ist $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i+1} \times \mathfrak{G}_{i+2}$. Ebenso ist $\mathfrak{G}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{E}$; $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i+1}^* \times \mathfrak{G}_{i+2}$. Daraus folgt nun nach einem

bekannten Satz⁵⁾: $\bar{\mathfrak{G}}_{i+1} = \mathfrak{G}_{i+2} \times (\bar{\mathfrak{G}}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+1}^*)$ also $\mathfrak{G}_i = \bar{\mathfrak{G}}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+2} \times (\bar{\mathfrak{G}}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+1}^*) = \mathfrak{G}_{i+1} \times (\bar{\mathfrak{G}}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+1}^*)$ wegen (14₂). Also ist $\bar{\mathfrak{G}}_{i+1} \cap \mathfrak{G}_{i+1}^* \cong \mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1} = \mathfrak{A}$. Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Für p -Gruppen können wir Satz 5 noch etwas erweitern:

Satz 6. Es sei

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{B}$

eine Pseudokompositionsreihe, \mathfrak{B} eine p -Gruppe, \mathfrak{A} nicht p -Gruppe derselben Primzahl. Ist dann \mathfrak{A} mit den Faktorgruppen von zwei verschiedenen Normalteilern $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\mathfrak{J}/\mathfrak{G}_{i+2}$ von \mathfrak{B} vertauschbar, so ist sie es auch mit der Faktorgruppe des Durchschnittes $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_{i+2} \cap \mathfrak{J}/\mathfrak{G}_{i+2}$.

Es sei $\mathfrak{P}/\mathfrak{G}_{i+2}$ das Erzeugnis $\{\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_{i+2}, \mathfrak{J}/\mathfrak{G}_{i+2}\}$. Es ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{D} = \mathfrak{H}/\mathfrak{D} \times \mathfrak{J}/\mathfrak{D}$. Als Erzeugnis von Normalteilern von \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_{i+1} ist \mathfrak{P} ebenfalls Normalteiler von \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_{i+1} , und wir können die gegebene Pseudokompositionsreihe unterteilen in

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} \geq \mathfrak{P} \geq \mathfrak{H} \geq \mathfrak{D} \geq \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{M} \quad | \quad \mathfrak{L}$

oder

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} \geq \mathfrak{P} \geq \mathfrak{J} \geq \mathfrak{D} \geq \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{L} \quad | \quad \mathfrak{M}$

Nach Hilfssatz I ist $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{P}$ ein direktes Produkt, dessen einer Faktor $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{P}$ ist. Also ist \mathfrak{A} mit \mathfrak{C} vertauschbar. In

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i \geq \bar{\mathfrak{G}}_{i+1} > \mathfrak{P} \geq \mathfrak{H} \geq \mathfrak{D} \geq \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{M} \quad | \quad \mathfrak{L}$

ist \mathfrak{A} mit \mathfrak{M} und in

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i \geq \bar{\mathfrak{G}}_{i+1} > \mathfrak{P} \geq \mathfrak{J} \geq \mathfrak{D} \geq \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{L} \quad | \quad \mathfrak{M}$

ist \mathfrak{A} mit \mathfrak{L} vertauschbar, also nach Satz 5 auch mit $\mathfrak{P}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$. Es gibt also die Pseudokompositionsreihe

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i \geq \bar{\mathfrak{G}}_{i+1} > \mathfrak{Q} > \mathfrak{D} \geq \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{C} \quad | \quad \mathfrak{L} \quad | \quad \mathfrak{M} \quad | \quad \mathfrak{A}$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es gibt also in \mathfrak{B} eine eindeutig bestimmte größte mit \mathfrak{A} vertauschbare Faktorgruppe: die des Durchschnittes aller Normalteiler von \mathfrak{B} , deren Faktorgruppen mit \mathfrak{A} vertauschbar sind.

Satz 7. Es sei

$$\mathfrak{G} > \cdots > \mathfrak{G}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \mathfrak{G}_{i+2} > \cdots > \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{B}$

eine Pseudokompositionsreihe. \mathfrak{B} sei p -Gruppe, \mathfrak{A} nicht p -Gruppe derselben Primzahl. \mathfrak{U} und \mathfrak{V} seien Zwischengruppen zwischen \mathfrak{G}_{i+1} und \mathfrak{G}_{i+2} (aber nicht notwendig Normalteiler von \mathfrak{G}_{i+1}). Kann dann \mathfrak{A} an \mathfrak{U} und an \mathfrak{V} herangeschoben werden, so kann es das auch an den Durchschnitt $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$.

\mathfrak{U} und \mathfrak{V} sind nachinvariante Untergruppen von \mathfrak{G}_{i+1} . Es seien

⁵⁾ Siehe z. B. v. D. WAERDEN: Moderne Algebra I. Berlin 1930, § 42, S. 143.

$$\mathfrak{G} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}_{i+1} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{U}_m = \mathfrak{U} \supset \mathfrak{G}_{i+2} \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{G} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}_{i+1} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V} \supset \mathfrak{G}_{i+2} \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

die kürzesten Pseudokompositionsreihen, die \mathfrak{U} bzw. \mathfrak{V} als Glied enthalten. m und n mögen die Tiefe $t(\mathfrak{U})$ und $t(\mathfrak{V})$ von \mathfrak{U} und \mathfrak{V} heißen. Nach Satz 4 kann \mathfrak{A} an jedes \mathfrak{U}_i und an jedes \mathfrak{V}_i herangeschoben werden.

Ist nun $n = m = 1$, so sind \mathfrak{U} und \mathfrak{V} Normalteiler von \mathfrak{G}_{i+1} , und wir haben die Aussage von Satz 6 vor uns. Wir wollen induktiv zuerst für $n = 1$, von $m - 1$ auf m , dann für beliebige m von $n - 1$ auf n schließen.

Angenommen, wir hätten den Satz schon für $t(\mathfrak{V}) = 1$ und $t(\mathfrak{U}) < m$ bewiesen. Wir schieben \mathfrak{A} an \mathfrak{U}_1 heran. Von da aus können wir es nach Satz 6 an $\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{U}_1$ und nach Voraussetzung auch an \mathfrak{U}_m heranschieben. Die Tiefen sind aber jetzt $t(\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{U}_1) = 1$, $t(\mathfrak{U}_m) = m - 1$, und wir können \mathfrak{A} nach Induktionsannahme an $\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{U}_m$ heranschieben.

Angenommen, wir hätten den Satz schon für $t(\mathfrak{V}) < n$ und beliebige $t(\mathfrak{U})$ bewiesen. Wir schieben \mathfrak{A} an \mathfrak{V}_1 heran. Von da aus können wir \mathfrak{A} nach Voraussetzung an \mathfrak{V}_n und nach dem eben bewiesenen auch an $\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{U}$ heranschieben. Da die Tiefe $t(\mathfrak{V})$ jetzt $n - 1$ geworden ist, können wir nach Induktionsannahme \mathfrak{A} auch an $\mathfrak{V} \cap (\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{U}) = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}$ heranschieben. Damit ist der Satz bewiesen.

Es gibt also unter allen Zwischengruppen zwischen \mathfrak{G}_{i+1} und \mathfrak{G}_{i+2} , an die \mathfrak{A} herangeschoben werden kann, eine kleinste, nämlich ihren Durchschnitt. Sie heiße die *minimale mit \mathfrak{A} unvertauschbare Zwischengruppe*.

Satz 8. Es sei mit den Bezeichnungen von Satz 7 \mathfrak{E} die minimale mit \mathfrak{A} unvertauschbare Untergruppe von \mathfrak{B} . Dann ist \mathfrak{E} Normalteiler von \mathfrak{B} .

Es sei ω ein Element von \mathfrak{G}_{i+1} und Ω der dadurch bewirkte innere Automorphismus von \mathfrak{G}_i . Da \mathfrak{G}_{i+1} und \mathfrak{G}_{i+2} als Normalteiler davon durch Ω in sich ergehen, induziert Ω in \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Automorphismen, die wir wieder Ω nennen wollen. Die unter Ω zu \mathfrak{E} konjugierte Untergruppe \mathfrak{E}^Ω ist dann die minimale mit \mathfrak{A}^Ω unvertauschbare Untergruppe von \mathfrak{B} . Da aber $\mathfrak{A}^\Omega = \mathfrak{A}$, muß wegen der Eindeutigkeit auch $\mathfrak{E}^\Omega = \mathfrak{E}$ sein. Eine Untergruppe, die bei jedem inneren Automorphismus in sich ergeht, ist aber ein Normalteiler.

Satz 9. Es sei

$$\mathfrak{G} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}_{i+1} \supset \mathfrak{G}_{i+2} \supset \mathfrak{G}_{i+3} \supset \cdots \supset \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad | \quad \mathfrak{B} \quad | \quad \mathfrak{E}$

eine Pseudokompositionsreihe; es sei \mathfrak{B} mit \mathfrak{E} , \mathfrak{A} mit \mathfrak{B} und nach Vertauschung mit \mathfrak{B} auch mit \mathfrak{E} vertauschbar. Dann ist entweder \mathfrak{B} mit \mathfrak{E} auch links von \mathfrak{A} vertauschbar, oder \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{E} sind p -Gruppen derselben Primzahl.

Wir wollen den Satz wieder ohne Verwendung des Vertauschungsbegriffes formulieren, um ihm seinen eigentlichen Geltungsbereich zu sichern. Sind also zwei oder drei der Gruppen \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{E} p -Gruppen derselben Primzahl, so mögen die unter die Lücken der Pseudokompositionsreihen geschriebenen Gruppen nur im Sinne der Isomorphie verstanden werden. Es sei also

$$(15_1) \mathfrak{G}_{i+2} \text{ Normalteiler von } \mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2} \text{ direktes Produkt } \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$$

(15₂) \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von \mathfrak{G}_{i+1} , $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$ direktes Produkt $\mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} \times \mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3}$

(15₃) \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler von $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$, $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+3}$ direktes Produkt $\mathfrak{G}_{i+2}/\mathfrak{G}_{i+3} \times \mathfrak{G}_{i+2}^*/\mathfrak{G}_{i+3}$.

Es seien also außer der gegebenen noch die drei folgenden Pseudokompositionen möglich:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{G} & \cdots & \mathfrak{G}_i & \mathfrak{G}_{i+1} & \mathfrak{G}_{i+2} & \mathfrak{G}_{i+3} & \cdots & \mathfrak{G} \\ & & \mathfrak{A} & | & \mathfrak{A} & & & \\ \mathfrak{G} & \cdots & \mathfrak{G}_i & \mathfrak{G}_{i+1} & \mathfrak{G}_{i+2} & \mathfrak{G}_{i+3} & \cdots & \mathfrak{G} \\ & & \mathfrak{A} & | & \mathfrak{A} & & & \\ \mathfrak{G} & \cdots & \mathfrak{G}_i & \mathfrak{G}_{i+1} & \mathfrak{G}_{i+2}^* & \mathfrak{G}_{i+3} & \cdots & \mathfrak{G} \\ & & \mathfrak{A} & | & \mathfrak{A} & & & \end{array}$$

Dann wird behauptet: \mathfrak{G}_{i+3} ist Normalteiler von \mathfrak{G}_i ; $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+3}$ ist entweder p -Gruppe oder dreifaches direktes Produkt, dessen Faktoren jeweils \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} isomorph sind.

Wegen (15₁) wird \mathfrak{G}_i von \mathfrak{G}_{i+1} und $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$ erzeugt. In beiden ist \mathfrak{G}_{i+3} Normalteiler, also auch in ihrem Erzeugnis. Wir wollen der Übersicht halber zu Faktorgruppen nach \mathfrak{G}_{i+3} übergehen und ihnen wieder die alten Bezeichnungen geben.

Wegen (15₁) liegen die wechselseitigen Kommutatoren von \mathfrak{G}_{i+1} und $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$ in \mathfrak{G}_{i+2} . Da $\mathfrak{G}_{i+2} \subset \mathfrak{G}_{i+1}$ und $\mathfrak{G}_{i+2}^* \subset \tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$, liegen auch die wechselseitigen Kommutatoren von \mathfrak{G}_{i+2} und \mathfrak{G}_{i+2}^* in \mathfrak{G}_{i+2} . Da sie auf Grund von (15_{2,3}) mit allen Elementen von \mathfrak{G}_{i+2} vertauschbar sind, liegen sie im Zentrum von \mathfrak{G}_{i+2} . Sie sind als Elemente von \mathfrak{G}_{i+2} mit allen Elementen von \mathfrak{G}_{i+2} und \mathfrak{G}_{i+2}^* vertauschbar. Sie mögen eine Gruppe \mathfrak{H} erzeugen.

Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}$, so sind \mathfrak{G}_{i+2} und \mathfrak{G}_{i+2}^* elementweise vertauschbar. Wegen (15_{2,3}) ist $\mathfrak{G}_{i+2} \cap \mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+2}^* \cap \mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{C}$. Hätten \mathfrak{G}_{i+2} und \mathfrak{G}_{i+2}^* ein Element gemein, so hätten auch $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ die dadurch erzeugte Nebengruppe nach \mathfrak{G}_{i+2} gemein, entgegen (15₁). Hätte \mathfrak{G}_{i+2}^* mit dem Erzeugnis $\mathfrak{G}_{i+1} = \mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+2}$ ein Element gemeinsam, so müßte dieses Element in \mathfrak{G}_{i+1} und in $\tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$ liegen, also wegen (15₁) in \mathfrak{G}_{i+2} ; aber wegen (15₂) hat \mathfrak{G}_{i+2} mit \mathfrak{G}_{i+2}^* nur die Eins gemeinsam. Also ist das Produkt $\mathfrak{G}_{i+2}^* \times \mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+2}$ direkt. Das dreifache direkte Produkt umfaßt sowohl $\mathfrak{G}_{i+2}^* \times \mathfrak{G}_{i+2} = \tilde{\mathfrak{G}}_{i+1}$, als $\mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+1}$, also kann es nur \mathfrak{G}_i sein.

Sind \mathfrak{G}_{i+2} und \mathfrak{G}_{i+2}^* nicht elementweise vertauschbar, so hat $\mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{C}$ ein Zentrum und ist eine p -Gruppe. Nach bekannten Rechenregeln über Kommutatoren^{*)} erhalten wir dadurch einen Homomorphismus von \mathfrak{G}_{i+2}^* auf eine Untergruppe von \mathfrak{H} , daß wir jedem Element von \mathfrak{G}_{i+2}^* seinen Kommutator mit einem festen Element von \mathfrak{G}_{i+2} zuordnen. Wird bei einem solchen nicht jedem Element die Einheit zugeordnet, so ist auch \mathfrak{G}_{i+2}^* p -Gruppe zu derselben Primzahl wie \mathfrak{G}_{i+2} , und \mathfrak{G}_{i+2} ebenfalls, wie man in der gleichen Weise zeigt. Also ist \mathfrak{G}_i eine p -Gruppe. Damit ist der Satz bewiesen.

Ein Beispiel für die zweite Möglichkeit bietet die durch a, b, c erzeugte Gruppe mit den Relationen $a^p = b^p = c^p = (a, c) = (b, c) = 1$; $(a, b) = c$. Hier

^{*)} Siehe z. B. ZASSENHAUS: Gruppentheorie I. Leipzig und Berlin 1937, Kap. II, § 6, S. 57, Formel (8a).

sind die durch $\{b\}$ und $\{c\}$ angedeuteten Kompositionsfaktoren rechts von $\{a\}$ vertauschbar, links hingegen nicht.

Satz 10. Es sei

$$\mathfrak{G} \supset \dots \supset \mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}_{i+1} \supset \mathfrak{G}_{i+2} \supset \dots \supset \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}$

eine Pseudokompositionsreihe, \mathfrak{A} eine p -Gruppe, \mathfrak{B} nicht p -Gruppe zu derselben Primzahl. Ist dann \mathfrak{B} mit zwei Untergruppen $\mathfrak{U}/\mathfrak{G}_{i+1}$ und $\mathfrak{V}/\mathfrak{G}_{i+1}$ von \mathfrak{A} vertauschbar, so auch mit ihrem Erzeugnis $\mathfrak{P}/\mathfrak{G}_{i+1} = \{\mathfrak{U}/\mathfrak{G}_{i+1}, \mathfrak{V}/\mathfrak{G}_{i+1}\}$.

Sind \mathfrak{U} und \mathfrak{V} Normalteiler von \mathfrak{G}_i , so ist der Satz ziemlich leicht zu beweisen. Für den allgemeinen Fall benötigen wir einen Induktionsschluß, den wir nur mit abgeschwächten Voraussetzungen führen können; wir wollen ihn deshalb als Hilfssatz voranschicken.

Hilfssatz 2. Es sei $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{E}$ eine Pseudokompositionsreihe; $\mathfrak{P}/\mathfrak{B}$ sei p -Gruppe, \mathfrak{B} nicht p -Gruppe derselben Primzahl. Es sei \mathfrak{Q} eine Untergruppe von \mathfrak{P} , die mit \mathfrak{B} elementweise vertauschbar ist, und es sei $\mathfrak{Q}\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$. Dann ist \mathfrak{B} direkter Faktor von \mathfrak{P} .

*Beweis*⁷⁾. Sei $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{B}$. Es gibt 2 Fälle:

1. $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$. Dann ist die Behauptung trivial. Nur in diesem Fall ist \mathfrak{Q} der andere direkte Faktor.

2. $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Da \mathfrak{D} mit \mathfrak{B} elementweise vertauschbar ist, hat \mathfrak{B} ein Zentrum. \mathfrak{B} ist also eine q -Gruppe ($q \neq p$). Die Ordnung von \mathfrak{B} sei q^m , die von $\mathfrak{P}/\mathfrak{B}$ sei p^n . Nach dem 1. Isomorphiesatz ist

$$\mathfrak{P}/\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}/\mathfrak{D},$$

also hat \mathfrak{Q} die Ordnung $p^n q^d$. Nun sei \mathfrak{S} eine Sylowgruppe von \mathfrak{Q} von der Ordnung p^n . Da \mathfrak{B} mit \mathfrak{S} elementweise vertauschbar und der Durchschnitt leer ist, so ist das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ direkt. Es hat die Ordnung $p^n q^m$, ist also gleich der ganzen Gruppe \mathfrak{P} .

Aus dem Hilfssatz folgt nun Satz 10 unmittelbar: Es sind \mathfrak{G}_{i+1} und \mathfrak{G}_{i+2} Normalteiler von $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{V}\}$, weil sie es von \mathfrak{U} und \mathfrak{V} sind. Nach Voraussetzung sollten $\mathfrak{U}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\mathfrak{V}/\mathfrak{G}_{i+2}$ direkte Produkte $\mathfrak{U}/\mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{S}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\mathfrak{V}/\mathfrak{G}_{i+2} = \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2} \times \mathfrak{T}/\mathfrak{G}_{i+2}$ sein. Wir setzen $\mathfrak{Q}/\mathfrak{G}_{i+2} = \{\mathfrak{S}/\mathfrak{G}_{i+2}, \mathfrak{T}/\mathfrak{G}_{i+2}\}$. $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ ist mit $\mathfrak{S}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und daher auch mit ihrem Erzeugnis $\mathfrak{Q}/\mathfrak{G}_{i+2}$ elementweise vertauschbar. $\mathfrak{Q}/\mathfrak{G}_{i+2}$ und $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ erzeugen $\mathfrak{P}/\mathfrak{G}_{i+2}$. Da also die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind, ist $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_{i+2}$ direkter Faktor von $\mathfrak{P}/\mathfrak{G}_{i+2}$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Es gibt also in \mathfrak{A} eine maximale mit \mathfrak{B} vertauschbare Untergruppe: das Erzeugnis aller mit \mathfrak{B} vertauschbaren Untergruppen.

Es sei jetzt

$$\mathfrak{G} \supset \dots \supset \mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}_{i+1} \supset \mathfrak{G}_{i+2} \supset \dots \supset \mathfrak{E}$$

$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}$

eine Pseudokompositionsreihe, \mathfrak{A} eine p -Gruppe, \mathfrak{B} eine q -Gruppe ($p \neq q$). Zu jeder Untergruppe \mathfrak{a} von \mathfrak{A} gibt es einen minimalen mit \mathfrak{a} unvertauschbaren Normalteiler von \mathfrak{B} . $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots, \mathfrak{Q}_m$ seien die verschiedenen unter ihnen. Ist $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$ und sind \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{Q}_2 die minimalen mit \mathfrak{a}_1 bzw. \mathfrak{a}_2 unvertauschbaren

⁷⁾ Den Beweis verdanke ich Herrn v. D. WAERDEN.

Normalteiler von \mathfrak{B} , so ist $\mathfrak{Q}_1 \supseteq \mathfrak{Q}_2$; denn \mathfrak{a}_2 ist als Untergruppe von \mathfrak{a}_1 sicher mit $\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}_1$ vertauschbar, und daraus folgt nach Satz 6 die Behauptung. Ebenso gibt es zu jeder Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$ von \mathfrak{B} eine maximale mit $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$ vertauschbare Untergruppe von \mathfrak{A} . $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ seien die verschiedenen unter ihnen. Ist wieder $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2$ und sind \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 die maximalen mit $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}_1$ bzw. $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}_2$ vertauschbaren Untergruppen von \mathfrak{A} , so ist $\mathfrak{P}_1 \supseteq \mathfrak{P}_2$; denn $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}_1$ ist als Faktorgruppe von $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}_2$ sicher mit \mathfrak{P}_2 vertauschbar, und daraus folgt nach Satz 10 die Behauptung.

Satz 11. Die Untergruppen \mathfrak{Q}_i und \mathfrak{P}_i lassen sich umkehrbar eindeutig so einander zuordnen, daß \mathfrak{Q}_i der minimale mit \mathfrak{P}_i unvertauschbare Normalteiler von \mathfrak{B} , \mathfrak{P}_i die maximale mit \mathfrak{Q}_i vertauschbare Untergruppe von \mathfrak{A} ist.

Wir mögen \mathfrak{Q}_i als den minimalen etwa mit \mathfrak{a} unvertauschbaren Normalteiler von \mathfrak{B} erhalten haben. \mathfrak{P}_i sei die maximale mit $\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}_i$ vertauschbare Untergruppe von \mathfrak{A} , \mathfrak{b} sei der minimale mit \mathfrak{P}_i unvertauschbare Normalteiler von \mathfrak{B} . Nach der Definition der maximalen vertauschbaren bzw. minimalen unvertauschbaren Untergruppen ist $\mathfrak{P}_i \supseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{Q}_i \supseteq \mathfrak{b}$. Andererseits ist nach dem oben bemerkten $\mathfrak{Q}_i \subseteq \mathfrak{b}$, da \mathfrak{Q}_i der minimale mit \mathfrak{a} , \mathfrak{b} der minimale mit \mathfrak{P}_i unvertauschbare Normalteiler von \mathfrak{B} ist. Also ist $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{b}$. Wählt man \mathfrak{a} gleich einem \mathfrak{P}_k , so erkennt man durch eine entsprechende Schlußweise der umgekehrten Richtung, daß $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_i$. Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt, daß die Anzahlen m und n gleich sind.

Unter den \mathfrak{Q}_i interessieren uns besonders die charakteristischen Normalteiler von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$.

Definition 3. Von diesen und den zugehörigen \mathfrak{P}_i wollen wir sagen, sie seien einander *zugeordnet*, die \mathfrak{P}_i seien auf \mathfrak{B} , die \mathfrak{Q}_i auf \mathfrak{A} *hingeordnet*.

Zu jedem \mathfrak{Q}_i , das nicht charakteristischer Normalteiler von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$ ist, gibt es einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+2}$, der \mathfrak{Q}_i und \mathfrak{P}_i in ein anderes Paar $\mathfrak{Q}_k, \mathfrak{P}_k$ überführt.

§ 2. Die Eindeutigkeit des Wiedererkennens.

Ob unsere Definition des Wiedererkennens sinnvoll ist, hängt entscheidend davon ab, ob jeder Kompositionsfaktor \mathfrak{F} einer Pseudokompositionsreihe K wenn überhaupt, dann in einem eindeutig bestimmten Kompositionsfaktor einer anderen gegebenen Pseudokompositionsreihe \bar{K} wiedererkannt wird, oder ob \mathfrak{F} bei verschiedenen Ketten $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ von Vertauschungen, die alle von K zu \bar{K} führen, in verschiedenen Kompositionsfaktoren von \bar{K} wiedererkannt wird. Die Kette $\Gamma_1 \Gamma_2^{-1}$ führt von K auf K zurück, und wir können unsere Frage beantworten durch den

Satz 12. Es sei:

$$K: \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{E}$$

$$\quad \quad \quad \mathfrak{F}_1 \quad | \quad \mathfrak{F}_2 \quad | \quad \dots$$

eine Pseudokompositionsreihe. Dann wird bei jeder Kette von Vertauschungen, die K in sich selbst überführt, jeder Kompositionsfaktor in sich selbst wiedererkannt. Wird ein Kompositionsfaktor bei einer solchen Kette von Vertauschungen nur mit solchen anderen Kompositionsfaktoren vertauscht, die

weder mit ihm isomorph, noch p -Gruppen derselben Primzahl sind, so ist der Satz trivial. Zu beweisen ist nur etwas, wenn mehrere isomorphe Kompositionsfaktoren miteinander vertauscht werden. Diese sind dann notwendig einfach und nicht-abelsch, da die Vertauschung für p -Gruppen nicht definiert ist (siehe § 1).

Dem Beweise schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 3. Es sei

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s \supset \cdots \supset \mathfrak{E} \\ \mathfrak{F}_1 \mid \cdots \mid \mathfrak{F}_s$$

eine Pseudokompositionsreihe, und es seien $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_s$ einfach, nicht-abelsch und paarweise vertauschbar. Dann ist \mathfrak{G}_s Normalteiler von \mathfrak{G} und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_s$ ist ein s -faches direktes Produkt, dessen Faktoren zu $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_s$ isomorph sind.

Dieser Hilfssatz ist für $s = 2$ sicher richtig, denn die Vertauschung ist überhaupt nur dann definiert, wenn \mathfrak{G}_2 Normalteiler ist. Angenommen, wir hätten den Hilfssatz schon für $s - 1$ bewiesen. Wir betrachten alle Pseudokompositionsreihen von \mathfrak{G} , die über \mathfrak{G}_s laufen:

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1^{(e)} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_{s-1}^{(e)} \supset \mathfrak{G}_s \supset \cdots \supset \mathfrak{E} \quad (e = 1, 2, \dots, s!).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist \mathfrak{G}_s Normalteiler von allen $\mathfrak{G}_i^{(e)}$. Die $\mathfrak{G}_1^{(e)}$ sind nicht alle identisch, z. B. ändert sich $\mathfrak{G}_1^{(e)}$, wenn wir die beiden ersten Kompositionsfaktoren vertauschen und die übrigen an ihrer Stelle lassen. Zwei verschiedene $\mathfrak{G}_1^{(e)}$ erzeugen \mathfrak{G} , weil das Erzeugnis zweier Normalteiler wieder Normalteiler ist und es zwischen \mathfrak{G} und $\mathfrak{G}_1^{(e)}$ als maximalem Normalteiler keinen weiteren Normalteiler geben kann. Also ist \mathfrak{G}_s auch Normalteiler von \mathfrak{G} .

Weiter ist $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_s$ ein $(s - 1)$ -faches direktes Produkt $\mathfrak{D}_2 \times \cdots \times \mathfrak{D}_s$. \mathfrak{F}_1 ist nach Voraussetzung mit allen Kompositionsfaktoren von $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_s$, also nach Satz 3 auch mit $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_s$ selber vertauschbar und läßt sich in einem direkten Faktor \mathfrak{D}_1 von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_s$ wiedererkennen. Der andere Faktor ist $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_s$. Also ist

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_s = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \cdots \times \mathfrak{D}_s.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir beweisen Satz 12 zunächst für den soeben betrachteten Sonderfall, daß \mathfrak{G} n -faches direktes Produkt einfacher nicht-abelscher Gruppen $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$ sei. Es sei

$$(16) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{E} \\ \mathfrak{F}_1 \mid \cdots \mid \mathfrak{F}_n$$

eine Kompositionsreihe. Dann ist \mathfrak{G}_{i+1} direkter Faktor von \mathfrak{G}_i und der andere Faktor ist eines der \mathfrak{D}_i ; es sei etwa $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i+1} \times \mathfrak{D}_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n - 1$). Der Kompositionsreihe entspricht also eine bestimmte Anordnung der \mathfrak{D}_i . Jedem $\mathfrak{F}_{i+1} = \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ ist ein \mathfrak{D}_{i+1} in der Weise zugeordnet, daß in jeder Nebengruppe von \mathfrak{F}_{i+1} genau ein Element von \mathfrak{D}_{i+1} vorkommt. Die Zuordnung ist eindeutig: Die übrigen \mathfrak{D}_j liegen alle entweder in \mathfrak{G}_{i+1} ($j > i + 1$), oder ihre Elemente kommen in \mathfrak{G}_i und daher in den Nebengruppen von \mathfrak{F}_{i+1} nicht vor ($j \leq i$).

Diese Zuordnung wird nun durch eine Vertauschung von \mathfrak{F}_i mit \mathfrak{F}_{i+1} nicht geändert. Denn nach dieser Vertauschung lautet die Kompositionsreihe:

$$\mathfrak{G}_0 > \dots > \mathfrak{G}_{i-1} > \mathfrak{F}_i > \mathfrak{G}_{i+1} > \dots > \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{F}_i | \dots | \mathfrak{F}_{i+1} | \mathfrak{F}_i | \dots,$$

wo $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i+1} \times \mathfrak{D}_i$ und $\mathfrak{G}_{i-1} = \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{D}_{i+1}$. Dann ist $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$ nach wie vor \mathfrak{D}_i und $\mathfrak{F}_{i+1} = \mathfrak{G}_{i-1} / \mathfrak{G}_i$ nach wie vor \mathfrak{D}_{i+1} zugeordnet. Wird also nach einer Kette von Vertauschungen die Kompositionsreihe (16) in dem Sinne wieder hergestellt, daß sie über dieselben Untergruppen \mathfrak{G}_i läuft, so wird auch die Anordnung der \mathfrak{D}_i und damit auch die der \mathfrak{F}_i wieder hergestellt. Es muß dann $\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$ wieder die Bezeichnung \mathfrak{F}_{i+1} tragen, was zu beweisen war.

Nun wollen wir den Satz 12 für allgemeine Gruppe beweisen. Angenommen er sei falsch, und nach einer Kette Γ von Vertauschungen der Kompositionsfaktoren sei K wieder hergestellt, aber die Bezeichnungen der Kompositionsfaktoren seien vertauscht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß auch der erste Kompositionsfaktor nicht mehr an seiner Stelle steht; denn ist im allgemeinen Fall \mathfrak{F}_j der erste Kompositionsfaktor, der nicht an seiner Stelle geblieben ist, so betrachten wir einfach die Kompositionsreihe von \mathfrak{G}_{j-1} . Nun induziert Γ unter den Indizes eine Permutation. Diese können wir durch Zyklen darstellen, es sei $(1 = i_0, i_1 \dots i_{s-1})$ ein solcher. Γ können wir iterieren, da jede Wiederholung von derselben Kompositionsreihe ausgeht. Nach den Potenzen Γ, \dots, Γ^r kommen jeweils $\mathfrak{F}_{i_{s-1}}, \dots, \mathfrak{F}_{i_0}$ an die erste Stelle. Da also $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_i, \dots, \mathfrak{F}_{i_{s-1}}$ an erster Stelle stehen können, sind sie mit allen links von ihnen stehenden Kompositionsfaktoren vertauschbar, und wir können sie durch eine Kette Δ von Vertauschungen an die ersten s Stellen bringen. Wir erhalten eine neue Kompositionsreihe K'

$$\mathfrak{G}_0 > \mathfrak{G}'_1 > \mathfrak{G}'_2 > \dots > \mathfrak{G}'_{s-1} > \mathfrak{G}'_s > \dots > \mathfrak{E}.$$

$$\mathfrak{F}_i | \mathfrak{F}_{i_1} | \dots | \mathfrak{F}_{i_{s-1}} |$$

Hier sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt; \mathfrak{G}'_s ist also Normalteiler von \mathfrak{G}_0 und $\mathfrak{G}_0 / \mathfrak{G}'_s$ ist s -faches direktes Produkt; für sie gilt Satz 12 nach dem Bewiesenen. Andererseits wird K' durch die Kette $\Delta^{-1} \Gamma \Delta$ von Vertauschungen wieder hergestellt, aber die Bezeichnungen der ersten s Kompositionsfaktoren wird zyklisch vertauscht. Damit haben wir den Widerspruch, und Satz 12 muß allgemein gelten.

§ 3. Die Verknüpfungsarten im Streckenkomplex.

Eine Normalreihe einer Gruppe \mathfrak{G} heiße *Pseudohauptreihe*, wenn jedes Glied Normalteiler von \mathfrak{G} ist und wenn sich nur in dem Fall noch ein Normalteiler von \mathfrak{G} zwischen zwei Gliedern \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_{i+1} einschalten läßt, daß $\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$ eine p -Gruppe ist.

Unser Ziel ist, die Komposition einer Gruppe durch einen Streckenkomplex darzustellen. Jedem Kompositionsfaktor \mathfrak{F} entspreche dabei ein Punkt $P(\mathfrak{F})$. Er sei mit allen Punkten $P(\mathfrak{F}_i)$ durch Pfeile verbunden, deren zugehöriger Kompositionsfaktor \mathfrak{F}_i in irgendeiner Pseudokompositionsreihe unmittelbar rechts, in keiner aber links von \mathfrak{F} steht. Der Pfeil hat eine Spitze und ein

Ende, und er habe in $P(\mathfrak{F})$ seine Spitze, in $P(\mathfrak{F}_i)$ sein Ende. Wir müssen nun verabreden, wie die Pfeile bei zusammengesetzten Gruppen miteinander zu verknüpfen sind.

Gruppen mit zweigliedriger Pseudo-Hauptreihe.

$\mathfrak{G} > \mathfrak{G}_1 > \mathfrak{E}$. Es sind folgende Fälle möglich:

A. \mathfrak{G} ist direktes Produkt $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$. Wir verbinden $P(\mathfrak{G}_1)$ und $P(\mathfrak{G}_2)$ nicht. Sind \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 isomorph, so wollen wir auch die zugeordneten Punkte isomorph nennen.

B. \mathfrak{G} ist kein direktes Produkt.

1. \mathfrak{G}_1 ist einfach oder p -Gruppe und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ induziert in \mathfrak{G}_1 eine von \mathfrak{E} verschiedene Untergruppe der äußeren Automorphismengruppe; es gebe also innere Automorphismen von \mathfrak{G} , die, in \mathfrak{G}_1 allein betrachtet, äußere sind. Wir verbinden $P(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1)$ mit $P(\mathfrak{G}_1)$. Diese Verbindung heiße von der 1. Art. (Vgl. Beispiel 1, 2 auf S. 195.)

2. \mathfrak{G}_1 ist eine p -Gruppe, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ induziert in \mathfrak{G}_1 nur innere Automorphismen, ohne daß \mathfrak{G}_1 direkter Faktor von \mathfrak{G} wäre.

Wir können $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ durch Erzeugende A_i und definierende Relationen $R_k = \prod_i A_i^{a_{ik}} = 1$ darstellen. Die A_i sind Nebengruppen nach \mathfrak{G}_1 . Sollen nur innere Automorphismen in \mathfrak{G}_1 induziert werden, so muß es zu jedem Element $a_i \in A_i$ ein solches Element $b_i \in \mathfrak{G}_1$ geben, daß für alle Elemente $g \in \mathfrak{G}_1$ gilt:

$$a_i^{-1} g a_i = b_i^{-1} g b_i, \text{ also } (a_i b_i^{-1})^{-1} g (a_i b_i^{-1}) = g.$$

Wir finden also in jeder Nebengruppe A_i Elemente, $c_i = a_i b_i^{-1}$, die mit allen Elementen von \mathfrak{G}_1 vertauschbar sind. Wir wählen nun aus diesen Elementen Repräsentanten c_i für die A_i aus und setzen sie in die Relationen ein. Auf der rechten Seite steht dann ein Repräsentant der Einheit, also ein Element $r_k \in \mathfrak{G}_1$, und es wird $R_k \rightarrow \prod_i c_i^{a_{ik}} = r_k$. Diese r_k sind mit allen Elementen von

\mathfrak{G}_1 vertauschbar, liegen also im Zentrum von \mathfrak{G}_1 . Wären alle $r_k = 1$, so wäre $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \{c_i\}$, entgegen der Voraussetzung. Wir verbinden $P(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1)$ mit $P(\mathfrak{G}_1)$. Diese Verbindung heiße von der 2. Art. (Vgl. Beispiel 3, S. 195.)

3. Es sei \mathfrak{G}_1 weder einfach noch p -Gruppe. Dann ist \mathfrak{G}_1 nach einem bekannten Satze⁸⁾ direktes Produkt isomorpher einfacher Gruppen und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ induziert in \mathfrak{G}_1 eine Permutation der Faktoren. Vor ihre (isomorphen) Punkte setzen wir eine Klammer, die wir dann mit $P(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1)$ verbinden. Wir sagen, die Verbindung sei von der 3. Art. (Vgl. Beispiel 4 auf S. 195.)

Diese 4 Fälle schließen einander aus und erschöpfen die Gesamtheit aller Möglichkeiten.

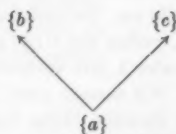


Fig. 1. Beispiel 1.

⁸⁾ Siehe z. B. SPEISER: Gruppen endlicher Ordnung. Berlin 1937, § 12, S. 41/42, Satz 31/32.

§ 4. Die Konstruktion des Streckenkomplexes für lockere Gruppen.

Definition 4. Eine *lockere Gruppe* ist eine solche, bei der jede Pseudokompositionsreihe auch eine Kompositionsreihe ist.

Es stehen also in keiner Kompositionsreihe zwei zyklische Gruppen der gleichen Primzahl nebeneinander, die zu einer p -Gruppe verschmelzen können.

Durch die Sätze 5—11 ist gesichert, daß die Vertauschbarkeit zweier Kompositionsfaktoren unabhängig von ihrer Stellung in der Kompositionsreihe definiert werden kann.

Es sei \mathfrak{F} ein Kompositionsfaktor. Es gibt für \mathfrak{F} eindeutig eine Stellung am weitesten rechts. Wir erreichen sie, wenn wir \mathfrak{F} mit allen mit \mathfrak{F} vertauschbaren Kompositionsfaktoren nach rechts vertauschen. Die dann mit \mathfrak{F} beginnende Kompositionsreihe stelle eine Gruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, die unmittelbar rechts von \mathfrak{F} beginnende Kompositionsreihe eine Gruppe $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ dar. Die Länge der Kompositionsreihe von $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ heiße die *Höhe* von \mathfrak{F} . $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ ist aus allen Kompositionsfaktoren aufgebaut, die in irgendeiner Kompositionsreihe rechts von \mathfrak{F} stehen und mit \mathfrak{F} unvertauschbar sind. Es ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})/\mathfrak{N}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.

Um nun den Streckenkomplex zu konstruieren, gehen wir rekursiv vor. Zunächst ordnen wir den Kompositionsfaktoren von der Höhe 1 Punkte $P(\mathfrak{F})$ zu. Angenommen, wir hätten schon jedem Kompositionsfaktor \mathfrak{F} von einer geringeren Höhe als h einen Platz im Streckenkomplex angewiesen und einen Punkt $P(\mathfrak{F})$ zugeordnet sowie jeder nachinvarianten Untergruppe, deren sämtliche Kompositionsfaktoren eine geringere Höhe als h haben, einen Streckenkomplex zugeordnet.

\mathfrak{F} habe die Höhe h . Wir betrachten alle diejenigen Hauptreihen von $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, die über $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ hinaus weiterschreiten. Es sei

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) > \mathfrak{N}(\mathfrak{F}) > \mathfrak{H} > \cdots > \mathfrak{E}$$

eine solche. Es sei $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})/\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$. Ist \mathfrak{R} nicht einfach, so ist \mathfrak{R} direktes Produkt mehrerer isomorpher einfacher nicht-abelscher Gruppen $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_n$ ^{*)}. Dann schließen wir die Punkte $P(\mathfrak{R}_1)$, $P(\mathfrak{R}_2)$, ..., $P(\mathfrak{R}_n)$ mit einer Klammer zusammen und bezeichnen diese mit $P(\mathfrak{R})$. Wir ordnen nun \mathfrak{F} einen Punkt $P(\mathfrak{F})$ zu. Je nachdem, von welchem der in § 3 aufgezählten Typen $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})/\mathfrak{H}$ ist, wollen wir $P(\mathfrak{F})$ mit $P(\mathfrak{R})$ durch einen Pfeil mit der Spitze in $P(\mathfrak{F})$ auf 1., 2. oder 3. Art verbinden.

Wir nennen zwei Punkte $P(\mathfrak{F}_1)$ und $P(\mathfrak{F}_2)$ *isomorph*, wenn $\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$, wenn sie dieselbe Höhe haben und nur mit denselben oder isomorphen Punkten auf dieselbe Weise verbunden sind.

Wir wollen nun die Punkte des Streckenkomplexes unter Beachtung der folgenden Regeln in eine Ober- und eine Unterklasse einteilen:

1. Gehört die Spitze eines Pfeiles 1.—3. Art zur Unterklasse, so gehöre auch sein Ende dazu.
2. Gehört das Ende eines Pfeiles 1.—3. Art zur Oberklasse, so gehöre auch seine Spitze dazu.

Diese Einteilung können wir uns etwa auf die folgende Weise veranschaulichen: Wir betten den Komplex in einen R^3 ein und schneiden ihn durch

*) Nach dem in Fußnote 7 zitierten Satz.

geschlossene, der Kugel homöomorphe Flächen, die von jedem Pfeil 1.—3. Art, der sie überhaupt schneidet, von innen nach außen durchstoßen wird. Die Punkte des Komplexes im Innern der Fläche gehören zur Unterklasse, die des Äußeren zur Oberklasse.

Satz 13. Jede solche Klasseneinteilung entspricht einer nachinvarianten Untergruppe. Gehören alle Punkte der Unterklasse an, so ist das richtig. Angenommen, wir hätten den Satz schon für Klasseneinteilungen bewiesen, bei denen $m+1$ Punkte der Unterklasse angehören. Es sei uns eine Klasseneinteilung vorgelegt, bei der die Unterklasse U gerade m Punkte enthält. Unter den Punkten der Oberklasse gibt es solche mit kleinster Höhe; es sei $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ ein solcher. Jeder Pfeil mit der Spitze in $P(\mathfrak{F})$ hat sein Ende in U , weil dieses eine geringere Höhe hat. Fügen wir $P(\mathfrak{F})$ zu U hinzu, so erhalten wir eine neue Unterklasse U' , die unseren Bedingungen genügt. Nach Induktionsvoraussetzung entspricht U' einer nachinvarianten Untergruppe \mathfrak{G}_1 . In jeder Kompositionsreihe von \mathfrak{G}_1 ist \mathfrak{F} mit allen linksstehenden Kompositionsfaktoren vertauschbar, und wir können eine Kompositionsreihe von \mathfrak{G}_1 angeben, in der \mathfrak{F} an erster Stelle steht. Der zugehörige Normalteiler \mathfrak{G}_2 entspricht dann der Unterklasse U . U entspricht also einer nachinvarianten Untergruppe. Damit ist Satz 13 bewiesen.

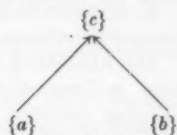


Fig. 2. Beispiel 2.

Werden dabei isomorphe Punkte immer in die gleiche Klasse getan, so entspricht die Unterklasse einer charakteristischen Untergruppe. Werden isomorphe Punkte wenigstens immer dann in die gleiche Klasse getan, wenn sie mit einem und demselben Punkt durch einen Pfeil 3. Art verbunden sind, der in diesem seine Spitze hat, so entspricht die Unterklasse einem Normalteiler. Einer Folge von solchen Klasseneinteilungen, bei der jeweils die Unterklasse der folgenden in der Unterklasse der vorhergehenden enthalten ist und in die sich zwischen zwei aufeinanderfolgende Klasseneinteilungen keine weitere der gleichen Art einschieben läßt, entspricht eine Kompositionsreihe bzw. Hauptreihe bzw. charakteristische Reihe. Wir erhalten auf diese Weise alle Kompositionsreihen bzw. Hauptreihen, nicht aber notwendig alle charakteristischen Reihen.

Beispiele.

1. $a^7 = 1$, $a^b = a^6$, $a^c = a^2$, $b^2 = c^3 = (b, c) = 1$
 $\{a\}$ hat die Höhe 1, $\{b\}$ und $\{c\}$ die Höhe 2 und sind mit $\{a\}$ auf die 1. Art zu verbinden.

2. $a^3 = b^3 = (a, b) = 1$, $a^c = a^2$, $b^c = b^4$, $c^2 = 1$
 $\{a\}$ und $\{b\}$ haben die Höhe 1, $\{c\}$ die Höhe 2 und ist mit $\{a\}$ und $\{b\}$ auf die 1. Art zu verbinden.

3. Ein Beispiel für eine Verbindung 2. Art liefert die zyklische p -Gruppe $\{a\}$ der Ordnung p^2 mit $a^p = 1$. Hier ist $\mathfrak{G}_1 = \{a^p\}$.

4. Ein Beispiel für eine Verbindung 2. Art in einer lockeren Gruppe ist gegeben durch $a^2 = b^3 = (ab)^5 = c$, $c^2 = 1$, $(a, c) = (b, c) = 1$. $\mathfrak{G}_1 = \{c\}$ ist das



Fig. 3. Beispiel 5.

Zentrum. Repräsentanten von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ sind die aus a und b allein gebildeten Worte. $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ ist isomorph der Ikosaedergruppe¹⁰⁾.

5. Es seien \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 zwei Ikosaedergruppen $a_i^2 = b_i^3 = (a_i b_i)^5 = 1$ ($i = 1, 2$) $a_1^c = a_2$, $b_1^c = b_2$, $c^2 = 1$. $\{c\}$ ist mit \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 auf die 3. Art zu verbinden.

§ 5. Allgemeine Gruppen.

Mit den lockeren Gruppen ist nun nur ein sehr kleiner Teil der Gruppe erfaßt. Man kann einen Schritt weiter gehen und Gruppen betrachten, von denen für jede Kompositionsreihe das folgende gilt:

Voraussetzung V. Kommt darin eine nicht einfache p -Gruppe vor, so soll

1. entweder sie selbst oder die Einheit die maximal mit dem rechtsstehenden Kompositionsfaktor vertauschbare Untergruppe und

2. entweder sie selbst oder die Einheit die minimale mit dem linksstehenden Kompositionsfaktor unvertauschbare Untergruppe sein.

Zur Abkürzung wollen wir einen Kompositionsfaktor, der p -Gruppe ist, einen p -Kompositionsfaktor nennen. Ein Kompositionsfaktor, der nicht p -Gruppe derselben Primzahl ist, heiße fremd. Es sei eine bestimmte Pseudokompositionsreihe K vorgelegt.

Ist dann \mathfrak{P} ein p -Kompositionsfaktor, so können wir ihn mit allen rechts von ihm stehenden mit ihm vertauschbaren Kompositionsfaktoren vertauschen. Es kann sein, daß dann rechts von ihm nur noch mit ihm unvertauschbare fremde Kompositionsfaktoren stehen; es kann aber auch sein, daß unmittelbar rechts von ihm wieder ein p -Kompositionsfaktor steht, für den dann freilich die Frage nach Vertauschbarkeit oder Unvertauschbarkeit sinnlos geworden ist. Um uns hier eine Übersicht zu verschaffen, wollen wir eine Gruppe \mathfrak{G}' p -nachinvariant in einer Gruppe \mathfrak{G} nennen, wenn sie nachinvariant ist und das System der Faktorgruppen von \mathfrak{G} bis \mathfrak{G}' aus p -Gruppen derselben Primzahl besteht. Nach einem Satz von WIELANDT¹¹⁾ ist der Durchschnitt zweier p -nachinvarianter Gruppen wieder p -nachinvariant. Unter allen p -nachinvarianten Untergruppen gibt es also eine kleinste, nämlich den Durchschnitt aller. Er ist Normalteiler; denn da seine konjugierten p -nachinvariant sind, ist er in ihnen enthalten und fällt mit ihnen zusammen. Die kleinste p -nachinvariante Untergruppe von $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ heiße $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$.

Eine nachinvariante Untergruppe \mathfrak{M} von \mathfrak{G} heiße p -Obergruppe von $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$, wenn $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ Normalteiler von \mathfrak{M} und die Faktorgruppe eine p -Gruppe ist. Nach einem weiteren Satz von WIELANDT ist das Erzeugnis von p -Obergruppen derselben Primzahl wieder eine p -Obergruppe. Es gibt also unter den p -Obergruppen von $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ innerhalb \mathfrak{G} eine größte, nämlich das Erzeugnis aller; sie heiße $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F})$. $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ ist dann auch die kleinste p -nachinvariante Untergruppe von $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F})$, denn jede kleinere p -nachinvariante Untergruppe von $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F})$ wäre auch nachinvariant in $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, was nicht möglich ist.

Hilfssatz 4. Stehen zwei p -Kompositionsfaktoren \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 unmittelbar nebeneinander, so gibt es eine Pseudokompositionsreihe, in der sie miteinander

¹⁰⁾ Dieses Beispiel verdanke ich Herrn v. D. WAERDEN.

¹¹⁾ a. a. O., S. 210.

— unter Umständen unter Hinzuziehung weiterer Kompositionsfaktoren — verschmelzen. Denn $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ ist Normalteiler von $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}_1)$ und Untergruppe von $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2)$, weil $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ nach Definition in allen p -nachinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}_1)$ enthalten ist¹²⁾. Wir lassen eine Pseudokompositionsreihe über $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}_1)$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ laufen. Dann ist der Kompositionsfaktor $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}_1)/\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ durch Verschmelzung von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 und der Kompositionsfaktoren zwischen $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2)$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ entstanden.

Hilfssatz 5. Sind zwei p -Kompositionsfaktoren \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 durch eine Reihe von fremden Kompositionsfaktoren $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_s$ getrennt und ist \mathfrak{P}_1 mit allen diesen vertauschbar, so auch \mathfrak{P}_2 . Denn wir können \mathfrak{P}_1 durch Vertauschung mit den \mathfrak{N}_s an \mathfrak{P}_2 heranschieben und dann mit \mathfrak{P}_2 und weiteren p -Kompositionsfaktoren zu einer p -Gruppe \mathfrak{P} verschmelzen. Da dann die \mathfrak{F}_s mit der Faktorgruppe \mathfrak{P}_1 von \mathfrak{P} vertauschbar sind, sind sie es auf Grund der Voraussetzung V mit den ganzen \mathfrak{P} und daher auch mit \mathfrak{P}_2 .

Satz 14. Kann \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in einer geeigneten Pseudokompositionsreihe verschmelzen und ebenso \mathfrak{P}_2 mit \mathfrak{P}_3 , so auch \mathfrak{P}_1 mit \mathfrak{P}_3 .

Denn aus den beiden Voraussetzungen folgt, daß \mathfrak{P}_2 mit allen zwischen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 sowie mit allen zwischen \mathfrak{P}_2 und \mathfrak{P}_3 stehenden fremden Kompositionsfaktoren vertauschbar ist. Also sind es nach Hilfssatz 5 auch \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_3 . In einer geeigneten Pseudokompositionsreihe sind also $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ höchstens durch weitere p -Kompositionsfaktoren getrennt. Nach Hilfssatz 4 können alle diese p -Kompositionsfaktoren von \mathfrak{P}_1 bis \mathfrak{P}_3 — unter Umständen unter Hinzuziehung weiterer Kompositionsfaktoren — zu einer p -Gruppe verschmolzen werden.

Aus Satz 14 ergibt sich, daß man die p -Kompositionsfaktoren einer Pseudokompositionsreihe so in Klassen zusammenfassen kann, daß p -Kompositionsfaktoren derselben Klasse immer, solche verschiedener Klassen niemals verschmelzen können.

Wir wollen nun einen p -Kompositionsfaktor \mathfrak{P} mit allen anderen derselben Klasse verschmelzen lassen. Dazu betrachten wir die Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P})/\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ und nennen sie die *Hülle* $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$. Diese kann nun selbst Kompositionsfaktor in einer geeigneten Pseudokompositionsreihe K' sein. Denn da $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P})$ nachinvariant in \mathfrak{G} ist, gibt es eine Pseudokompositionsreihe von \mathfrak{G} , die über $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P})$ läuft. Da $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ Normalteiler von $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P})$ ist, können wir sie über $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ weiterlaufen lassen, und zwar ohne eine Zwischengruppe zwischen $\overline{\mathfrak{M}}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$. Die so konstruierte Pseudokompositionsreihe K' enthält $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ als Kompositionsfaktor.

K' entsteht aus K dadurch, daß alle p -Kompositionsfaktoren, die zur selben Klasse C wie \mathfrak{P} gehören, zusammenrücken und miteinander zu $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ verschmelzen. $\mathfrak{H}(\mathfrak{P})$ ist auf Grund unserer Voraussetzung mit allen fremden Kompositionsfaktoren, die in K zwischen den p -Kompositionsfaktoren der Klasse C liegen, vertauschbar, weil jeder von ihnen mit dem einen oder anderen p -Kompositionsfaktor von C vertauschbar ist.

Die Hüllen aller Kompositionsfaktoren derselben Klasse sind einander isomorph. Denn die verschiedenen unter ihnen entstehen dadurch, daß die p -Kom-

¹²⁾ Wir hatten oben (S. 192) $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}_1)$ als den mit, $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1)$ als den hinter \mathfrak{P}_1 beginnenden Abschnitt der Pseudokompositionsreihe definiert.

positions faktoren der Klasse jeweils an verschiedenen Stellen der Pseudokompositionsreihe durch verschiedene Anordnung der Vertauschungen mit den fremden Kompositions faktoren aneinanderrücken. Sie gehen auseinander durch Vertauschung mit diesen fremden Kompositions faktoren hervor, und aus Satz 3 folgt dann ihre Isomorphie. Die Hüllen sind also weniger dem einzelnen p -Kompositions faktor, als vielmehr der Klasse als solcher zugeordnet.

Unter den Pseudokompositionsreihen gibt es nun kürzeste: Diejenigen, in denen jeweils alle p -Kompositions faktoren jeder Klasse zu ihrer Hülle verschmolzen sind. Die kürzesten Pseudokompositionsreihen gehen rein durch Vertauschung auseinander hervor und lassen sich ebenso behandeln wie die lockeren Gruppen. Wir könnten also wieder jeder Hülle einen Punkt zuordnen und ihn nach der in § 3 angegebenen Vorschrift in den Streckenkomplex einbauen. Dieser liefert uns dann eine vollständige Übersicht über die kürzesten Pseudokompositionsreihen.

Für eine Übersicht über die Kompositionsreihen, die nicht kürzeste sind, liefert der Streckenkomplex als solcher nichts. Um wenigstens einen Ansatzpunkt zu gewinnen, an dem man andere Methoden ansetzen kann, kann man etwa die Hüllen statt durch Punkte durch kleine Kugeln darstellen. Man muß dann eine Übersicht über die Kompositionsreihen der p -Gruppen von anderen Gesichtspunkten her zur Verfügung haben; man könnte die Länge einer solchen durch Zerstückelung der Kugel in eine entsprechende Zahl von Punkten andeuten. Wollen wir nun aus dem Streckenkomplex die nachinvarianten Untergruppen ablesen, so haben wir wieder zu beachten, daß jede solche mit jedem Kompositions faktor \mathfrak{F} auch alle die enthält, die am Ende eines Pfeils mit der Spitze in \mathfrak{F} bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$ stehen. Wir können also so vorgehen: Wir legen wieder durch den Streckenkomplex eine Fläche O , die von jedem Pfeil, wenn überhaupt, dann nur in der Richtung von innen nach außen durchstoßen wird und die einige Kugeln in zwei Stücke zerlegt. Dem in O liegenden Teil der Kugel entspricht eine Untergruppe der entsprechenden Hülle, die, wie gesagt, aus dem Streckenkomplex nicht abgelesen werden kann, sondern gegeben sein muß. Auf diese Weise erhalten wir wieder alle nachinvarianten Untergruppen von \mathfrak{G} . Wir betrachten Flächen als nicht verschieden, wenn sie dieselben Pfeile schneiden und dieselben Kugeln in Andeutung derselben Untergruppen zerlegen.

Jede Folge solcher ineinanderliegender Flächen, von denen zwei benachbarte entweder genau einen Punkt zwischen sich lassen oder eine Kugel in verschiedener Weise so zerlegen, daß von den beiden entsprechenden Untergruppen die zweite auch Untergruppe der ersten ist, entspricht dann einer Pseudokompositionsreihe, und wir finden auf diese Weise alle Pseudokompositionsreihen.

Fig. 4.

Beispiel: die Oktaedergruppe \mathfrak{S}_4 . Sie hat die Pseudokompositionsreihe $\mathfrak{S}_4 > \mathfrak{A}_4 > \mathfrak{V} > \mathfrak{E}$, wo \mathfrak{A}_4 die alternierende Gruppe (Tetraedergruppe), \mathfrak{V} die Vierergruppe ist. Hier ist $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$ mit $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{V}$ mit \mathfrak{V} je auf 1. Art zu verbinden. Die anderen möglichen Pseudokompositionsreihen erhält man durch die 3 möglichen Aufspaltungen von \mathfrak{V} .

Will man das hier gegebene Verfahren auf p -Gruppen ausdehnen, so stößt man auf erhebliche Schwierigkeiten, und es zeigt sich, daß sich die Struktur der p -Gruppen auf diese Weise nicht beschreiben läßt. So hat die Vierergruppe drei gleichberechtigte zyklische Normalteiler. Man könnte jedem von ihnen einen Punkt zuordnen. Die zugehörigen Faktorgruppen lassen sich dann aber nicht wieder diesen Punkten zuordnen, sondern höchstens Punktpaaren. Wir hätten dann von einer sehr einfachen und übersichtlichen Gruppe ein verwickeltes und unübersichtliches Bild. Das könnte in Kauf genommen werden, wenn durch dieses Bild verborgene Struktureigenschaften ans Licht gebracht würden, die sonst nicht in Erscheinung träten. Das ist aber nicht der Fall.

Bei einem Versuch, den Streckenkomplex zu konstruieren, wird man sich also jedenfalls damit begnügen müssen, die p -Gruppen als Ganze in den Streckenkomplex einzubauen. Machen wir aber nicht die oben angegebene Voraussetzung V, so kann es sein, daß die einzelnen Unter- und Faktorgruppen einer p -Gruppe mit ganz verschiedenen fremden Kompositionsfaktoren vertauschbar sind. Man müßte also die p -Gruppen so weit auseinandernehmen, wie es die Einordnung unter die fremden Kompositionsfaktoren erfordert, und die Untergruppen- und Faktorgruppen, die in verschiedener Weise mit den anderen Kompositionsfaktoren vertauschbar sind, durch verschiedene Punkte bezeichnen. Das wird aber sehr verwickelt; es kann sein, daß jeder mögliche zyklische Kompositionsfaktor der p -Gruppe durch einen eigenen Punkt gekennzeichnet werden muß, und wir hätten gegenüber dem eben gegebenen Ansatz nichts gewonnen. Die Anwendbarkeit des Streckenkomplexes reicht also über die lockeren Gruppen nicht oder kaum hinaus.

(Eingegangen am 27. Februar 1954.)

Die Koeffizienten des BERGMANSchen Orthonormalsystems.

Von

HERBERT MESCHKOWSKI in Berlin.

Es sei \mathfrak{B} ein n -fach zusammenhängendes schlichtes und beschränktes Gebiet, das von n analytischen Kurven \mathfrak{C}_r ($\mathfrak{C} = \sum_{r=1}^n \mathfrak{C}_r$) begrenzt wird. Ω sei die Klasse der Funktionen, die in \mathfrak{B} samt ihren Integralen regulär und eindeutig sind und ein endliches Dirichlet-Integral haben. BERGMAN hat gezeigt¹⁾, daß es für diese Funktionenklasse ein durch gewisse Extremaleigenschaften definiertes vollständiges Orthonormalsystem gibt. In meinen „Beiträgen zur Theorie der Orthonormalsysteme“²⁾ wurde für dieses System eine analytische Darstellung gegeben.

Im folgenden soll eine bemerkenswerte Eigenschaft der Koeffizienten dieses BERGMANSchen Systems entwickelt werden. Ähnliche Aussagen können gemacht werden für die anderen Systeme, die in den „Beiträgen“ (siehe Anm. 2) aufgestellt wurden. Es werden hier für die Funktionen, Funktionenklassen usw. dieselben Bezeichnungen benutzt wie in der genannten Arbeit. Die Nummern von Formeln und Sätzen mit vorgesetztem B beziehen sich auf die „Beiträge“.

I. Die Koeffizienten regulärer Funktionen im BERGMAN-System.

Nach Satz B IX lassen sich die Koeffizienten der Klasse Ω darstellen in der Form

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho_n(z), \quad c_n = (f, \varrho_n).$$

Dabei ist

$$\varrho_n(z) = \frac{G_n(z)}{(G_n, G_n)^{\frac{1}{2}}}$$

und nach B (55)

$$G_n(z) = \alpha_1^{(n)} M_1'(z, \bar{u}) + \cdots + \alpha_n^{(n)} M_n'(z, \bar{u}).$$

Dann wird

$$(2) \quad \varrho_n(z) = \beta_1^{(n)} M_1'(z, \bar{u}) + \cdots + \beta_n^{(n)} M_n'(z, \bar{u}),$$

wobei

$$\beta_r^{(n)} = \frac{\alpha_r^{(n)}}{(G_n, G_n)^{\frac{1}{2}}}.$$

¹⁾ BERGMAN: The kernel function and conformal mapping, Survey of the Math. Soc. 5 (1950).

²⁾ MESCHKOWSKI: Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. Math. Ann. 127, S. 107—129 (1954).

Diese Zahlen $\beta_v^{(n)}$ sind (nach Wahl von u) feste, für das Gebiet \mathfrak{B} charakteristische Zahlen.

Für die in (1) auftretenden Koeffizienten c_v gilt dann nach (2)

$$\overline{c_n} = \frac{1}{2i} \int_{\mathfrak{E}} \overline{F(z)} (\beta_1^{(n)} M'_1(z, \bar{u}) + \cdots + \beta_n^{(n)} M'_n(z, \bar{u})) dz,$$

$$F(z) = \int f(\xi) d\xi.$$

Wegen B (25) wird daraus:

$$(3) \quad c_n = -\frac{1}{2i} \int_{\mathfrak{E}} F(z) (\overline{\beta_1^{(n)}} N'_1(z, u) + \cdots + \overline{\beta_n^{(n)}} N'_n(z, u)) dz.$$

Nach B (27) folgt weiter:

$$(4) \quad c_n = \pi \sum_{v=1}^n \overline{\beta_v^{(n)}} f^{(v-1)}(u), \quad f^{(0)}(z) = f(z).$$

Das Bemerkenswerte an dieser Darstellung (4) ist die einfache Berechnung der Koeffizienten, wenn die für das Gebiet charakteristischen Zahlen $\beta_v^{(n)}$ erst einmal ermittelt sind. Normalerweise muß man doch zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$d_n = (f, \varphi_n)$$

irgendeines vollständigen Orthonormalsystems $\{\varphi_n\}$ für jede Funktion $f(z) \in \Omega$ und für jeden Index n eine Integration ausführen. Hat man beim BERGMAN-System erst einmal die Matrix der $\{\beta_v^{(n)}\}$ bestimmt, so erhält man für jede Funktion $f(z) \in \Omega$ nach (4) die Koeffizienten c_n als lineare Form der Ableitungen bei $z = u$. Wir können das Ergebnis auch so zusammenfassen:

Satz I: Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n$$

die Potenzreihenentwicklung bei u für eine auf \mathfrak{E} reguläre Funktion der Klasse Ω ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho_n(z)$$

die in jedem inneren Teilbereich von \mathfrak{B} gleichmäßig konvergente Darstellung durch die Funktionen des vollständigen BERGMAN-Systems. Dann erhält man die Koeffizienten c_n aus den Koeffizienten der Potenzreihe nach der Formel

$$(5) \quad c_n = \pi \sum_{v=1}^n \beta_v^{(n)} (v-1)! a_{v-1}.$$

II. Darstellung von Funktionen mit Singularitäten im $\{\varrho_v\}$ -System.

Es sei $f(z)$ eine Funktion, die in $\mathfrak{B} + \mathfrak{E}$ regulär und (samt Integral) eindeutig ist mit Ausnahme der Stelle u , wo die Entwicklung lauten soll:

$$(6) \quad f(z) = -\frac{1}{(z-u)^2} + a_0 + a_1(z-u) + \cdots$$

Bekanntlich (Satz B V) kann man auch für solche Funktionen eine in jedem Teilbereich von \mathfrak{B} gültige Darstellung durch die Funktionen eines vollständigen

Orthonormalsystems angeben, die in \mathfrak{B} an einzelnen Stellen Pole haben. Auch in diesem Fall gibt es eine einfache Relation zwischen den Koeffizienten des Orthonormalsystems und denen der Potenzreihe. Wir wollen uns darauf beschränken, das Ergebnis für den Fall der Entwicklung (6) zu ermitteln. Offensichtlich ist in andern Fällen entsprechend zu verfahren.

Nach Satz B V hat man für $f(z)$ im System $\{\varrho_n(z)\}$ die Darstellung

$$(7) \quad f(z) = N'(z, u) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho_n(z).$$

Für die Koeffizienten c_n gilt wieder (3), aber diesmal ist $F(z)$ nicht regulär. Wenn die Potenzreihenentwicklung für $N'(z, u)$ bei u lautet:

$$N'(z, u) = -\frac{1}{(z-u)^2} + n_0 + n_1(z-u) + \dots,$$

so gilt wegen (6):

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} N'_v(z, u) F(z) dz = (v-1)! [(-1)^{v-1} n_{v-1} - a_{v-1}].$$

Damit ist bewiesen:

Satz II: $f(z)$ sei eine Funktion, die in $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ (samt Integral) eindeutig ist und regulär mit Ausnahme der Stelle u , wo ein Pol zweiter Ordnung vorliegt mit der Potenzreihenentwicklung (6). Dann gilt für die Koeffizienten $c_n = (f, \varrho_n)$ von $f(z)$ die Darstellung

$$(9) \quad c_n = \pi \sum_{v=1}^n \beta_v^{(n)} (v-1)! [a_{v-1} + (-1)^v n_{v-1}].$$

In ähnlicher Weise ergeben sich solche Beziehungen bei Funktionen mit mehreren Polen verschiedener Ordnung.

Setzt man speziell

$$f(z) = -\frac{1}{(z-u)^2},$$

so wird aus (9)

$$-\left(\frac{1}{(z-u)^2}, \varrho_n(z)\right) = \pi \sum_{v=1}^n \beta_v^{(n)} (v-1)! (-1)^v n_{v-1}.$$

Daraus könnte man die Zahlen n_v bestimmen. Für $f(z) = N'(z, u)$ muß sich wegen B (19) ergeben

$$c_n = (N'(z, u), \varrho_n) = 0.$$

Das folgt auch aus (9). Man muß nur beachten, daß wegen der bekannten Beziehung

$$N'(z, u) = N'(u, z)$$

die Koeffizienten n_v für ungerades v verschwinden.

III. Die Koeffizienten anderer Orthonormalsysteme.

Es ist klar, daß sich ähnliche Aussagen auch für die in den Sätzen B X und B IX genannten Orthonormalsysteme machen lassen. An Stelle der Ableitungen

$$f(u), f'(u), f''(u), \dots$$

treten hier die Funktionswerte an den Stellen u_v der Punktfolge, die bei der Bildung des Systems $\mu_v(z)$ bzw. $\nu_k(z)$ benutzt wurde.

Die durch B (65) definierten Funktionen sind lineare Kombinationen der Funktionen $K_1(z, \bar{u}_v)$, ($v = 1, \dots, n$), können also dargestellt werden in der Form

$$\mu_n(z) = \sum_{v=1}^n \gamma_v^{(n)} K_1(z, \bar{u}_v).$$

Für das System dieser Funktionen $\{\mu_n(z)\}$ z. B. beweist man ähnlich wie im Abschnitt I unter Benutzung von B (37)

Satz III: *Es sei $g(z)$ eine Funktion der Klasse I^* (Satz B X). Dann ist $g(z)$ darstellbar in der Form*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_n(z), \quad d_n = [g, \mu_n],$$

und für die Koeffizienten d_n gilt

$$d_n = \sum_{v=1}^n \gamma_v^{(n)} g(u_v).$$

(Eingegangen am 20. März 1954.)

Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt*.)

Von

WALTER NEF in Bern.

1. Teil. Einleitung.

Im Jahre 1938 hat A. TARSKI eine Arbeit über eine *algebraische Fassung des Maßproblems* publiziert¹⁾. In dieser wird vorerst eine „abstrakte Inhaltstheorie“ beschrieben, indem von einer kommutativen Halbgruppe ausgegangen und gefragt wird, ob es einen Homomorphismus gibt, der diese Halbgruppe so auf eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen abbildet, daß ein bestimmtes vorgegebenes Element (Einheitselement) die Zahl 1 als Bild hat. Diese abstrakte Theorie wird auf das eigentliche, geometrische Inhaltsproblem angewendet, insbesondere zur Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen ein für alle E -beschränkten Punktmengen²⁾ eines metrischen oder homogenen Raumes R definierter Inhalt (universeller Inhalt) mit gegebener Einheitsmenge E existiert. Der Zusammenhang des abstrakten mit dem geometrischen Inhaltsproblem besteht darin, daß die „Zerlegungstypen“ der Punktmengen von R (d. h. die Klassen zerlegungsgleicher Punktmengen) eine kommutative Halbgruppe bilden, auf der ein universeller Inhalt als Linearform erscheint.

Das Hauptresultat sagt aus, daß *dann und nur dann ein universeller Inhalt existiert, wenn die Einheitsmenge E nicht paradoxal zerlegt werden kann*, d. h. wenn E nicht in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden kann, von denen jede mit E zerlegungsgleich ist³⁾. Dabei werden wie üblich zwei Mengen A und B zerlegungsgleich genannt, wenn sie in der Form

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, B = \bigcup_{k=1}^n B_k, A_k \cap A_l = B_k \cap B_l = O \ (k \neq l), A_k \cong B_k \ (k = 1, \dots, n)$$

dargestellt werden können. Von den Teilmengen A_k und B_k wird verlangt, daß sie E -beschränkt sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode von TARSKI so verallgemeinert, daß sie für die Untersuchung von beliebigen Inhaltssystemen (also nicht nur von universellen Inhalten) verwendet werden kann. Nach der Festsetzung der Bezeichnungen und Formulierung der grundlegenden Definitionen im zweiten Teil wird im dritten Teil die Relation der Zerlegungsgleichheit allgemeiner definiert, und zwar insbesondere dadurch, daß von den Teilmengen A_k und B_k verlangt wird, daß sie einem in jedem einzelnen Falle festgelegten, im übrigen aber weitgehend freien Mengensystem \mathfrak{M} angehören sollen. Da

*) Meinem verehrten Lehrer, Prof. Dr. Paul Finsler, zum sechzigsten Geburtstag gewidmet.

¹⁾ Lit.verz. [5].

²⁾ [5], Seite 61.

³⁾ [5], Seite 61.

diese verallgemeinerte Relation der Zerlegungsgleichheit nicht alle für unsere Zwecke benötigten Eigenschaften besitzt (es ist insbesondere nicht bekannt, ob sie mit der Relation $A \subseteq B$ verträglich ist), wird sie durch die schwächere Relation der *Zerlegungsäquivalenz* ersetzt. Geht man im Definitionsbereich eines Inhaltes, den wir nach dem Vorschlage von H. HADWIGER (vergl. Fußn. 7) „Feld“ nennen, zu den Klassen zerlegungsäquivalenter Mengen über, so bilden diese in natürlicher Weise eine teilgeordnete kommutative Halbgruppe. Im vierten Teil wird nachgewiesen, daß jeder Inhalt auf einem gegebenen Feld auf der zugehörigen Halbgruppe als monotone Linearform erscheint. Umgekehrt liefert jede (normierte) monotone Linearform auf der Halbgruppe einen Inhalt auf dem Feld. Der fünfte Teil handelt dementsprechend von den monotonen Linearformen auf teilgeordneten kommutativen Halbgruppen, insbesondere von ihrer Existenz und Fortsetzbarkeit. Der sechste Teil bringt die Anwendung auf das Inhaltsproblem, wobei insbesondere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Inhalten auf einem gegebenen Feld sowie für ihre Fortsetzbarkeit auf umfassendere Felder angegeben werden. Im siebenten und letzten Teil wird ein Beispiel betrachtet.

Die gegenwärtige Arbeit steht, vor allem in methodischer Hinsicht, in enger Beziehung zu [8], wo die entsprechenden Fragen für Integrationssysteme untersucht wurden.

2. Teil. Bezeichnungen und Definitionen.

Wir bezeichnen mit

R eine Menge, im folgenden „Raum“ genannt. Die Elemente von R nennen wir „Punkte“.

Γ eine Gruppe von eindeutigen Abbildungen von R auf sich selber.

A, B, C, \dots Untermengen von R , im folgenden „Punktmengen“ genannt.

E eine ein für allemal festgelegte Untermenge von R , die wir „Einheitsmenge“ nennen. Von dieser wird vorerst verlangt, daß sie die noch zu formulierende Bedingung 2.2 erfüllt. Erst in den Sätzen 6.3*—6.8* des 6. Teiles werden wir uns von dieser Voraussetzung befreien. Wo nichts anderes erwähnt wird, wird vorausgesetzt, daß E die Bedingung 2.2 erfüllt.

O die leere Untermenge von R .

$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ Systeme von Untermengen von R , insbesondere Inhaltsfelder (s. Def. 2.3).

σ, τ, \dots Transformationen aus der Gruppe Γ .

Ist $A \subseteq R$ und $\sigma \in \Gamma$, so bezeichnen wir mit A^σ das Bild von A bei der Transformation σ .

Zwei Punktmengen $A, B \subseteq R$ nennen wir „kongruent“ ($A \cong B$), wenn $\sigma \in \Gamma$ existiert, so daß $B = A^\sigma$ ist.

Definition 2.1: Eine Punktmenge $A \subseteq R$ heißt einfach E -beschränkt, wenn $\sigma \in \Gamma$ existiert, so daß $A \subseteq E^\sigma$ ist. A heißt E -beschränkt, wenn sie Vereinigungsmenge von endlich vielen einfach E -beschränkten Punktmengen ist.

E ist selber einfach E -beschränkt und damit E -beschränkt.

Bedingung 2.2: Zu endlich vielen beliebigen E -beschränkten Mengen A_1, \dots, A_n (die nicht verschieden zu sein brauchen) existieren Transformationen $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Gamma$, so daß die Mengen $A_1^{\sigma_1}, \dots, A_n^{\sigma_n}$ paarweise disjunkt sind.

Da E selber E -beschränkt ist, bedeutet das insbesondere, daß zu jeder natürlichen Zahl n Transformationen $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Gamma$ existieren, so daß die Mengen $E^{\sigma_1}, \dots, E^{\sigma_n}$ paarweise disjunkt sind.

Satz 2.1: Wenn eine Punktmenge $A \subseteq R$ (einfach) E -beschränkt und $B \subseteq A$ ist, so ist auch B (einfach) E -beschränkt. Ferner ist auch A^σ (einfach) E -beschränkt für $\sigma \in \Gamma$. Sind A und B zwei beliebige E -beschränkte Mengen, so sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ E -beschränkt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition 2.1.

Nach Satz 2.1 ist das System aller E -beschränkten Mengen ein Mengenkörper⁴⁾, der gegenüber Γ invariant ist und den wir im folgenden mit \mathfrak{B} bezeichnen.

Definition 2.3: Ein Inhaltsfeld (oder kurz Feld) ist ein System \mathfrak{M} von Punktmenge $\subseteq R$, das folgenden Postulaten genügt:

1) Jede Menge $A \in \mathfrak{M}$ ist Vereinigungsmenge von endlich vielen paarweise disjunkten einfach E -beschränkten Mengen, die alle zu \mathfrak{M} gehören⁵⁾.

2) $O \in \mathfrak{M}$, $E \in \mathfrak{M}$.

3) Aus $A \in \mathfrak{M}$ und $\sigma \in \Gamma$ folgt $A^\sigma \in \mathfrak{M}$: \mathfrak{M} ist invariant gegenüber Γ .

4) Aus $A, B \in \mathfrak{M}$ und $A \cap B = O$ folgt $A \cup B \in \mathfrak{M}$.

Demnach ist das System \mathfrak{B} aller E -beschränkten Mengen ein Inhaltsfeld [vgl. Anm. 4), 5)]. Wir nennen es das universelle Feld.

Aus der Definition 2.3 folgt, daß jedes Feld alle Mengen von der Form $k.E = E^{\sigma_1} \cup \dots \cup E^{\sigma_k}$ (k eine natürliche Zahl oder 0 , $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Gamma$, $E^{\sigma_i} \cap E^{\sigma_j} = O$

für $1 \leq i < j \leq k$)

enthält. Diese Mengen, für die wir die symbolische Bezeichnung $k.E$ verwenden, heißen „elementar“. Die Gesamtheit der elementaren Mengen ist selber ein Feld, das wir das „elementare Feld“ nennen und mit \mathfrak{E} bezeichnen. Jedes Feld enthält \mathfrak{E} als Unterfeld.

Definition 2.4: \mathfrak{M} sei ein Inhaltsfeld. Ein Inhalt auf \mathfrak{M} ist eine auf \mathfrak{M} definierte reellwertige Funktion $\Phi(A)$ ($A \in \mathfrak{M}$), die folgenden Postulaten genügt:

1°) $\Phi(O) = 0$, $\Phi(E) = 1$.

2°) Aus $A \supseteq B$ folgt $\Phi(A) \geq \Phi(B)$: Φ ist monoton.

3°) Aus $A \cap B = O$ folgt $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$: Φ ist additiv.

4°) Für $\sigma \in \Gamma$ ist $\Phi(A^\sigma) = \Phi(A)$: Φ ist invariant gegenüber der Gruppe Γ . Aus 1°) und 2°) folgt $\Phi(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathfrak{M}$: Φ ist positiv.

Wenn auf dem elementaren Feld ein Inhalt existiert, so ist er eindeutig bestimmt: $\Phi(k.E) = k$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dies ein Inhalt auf \mathfrak{E} ist, ist in Satz 6.9 ausgesprochen. Ist sie erfüllt, so nennen wir $\Phi(k.E) = k$ den elementaren Inhalt.

⁴⁾ Als Mengenkörper bezeichnen wir wie üblich ein Mengensystem, das mit zwei Mengen A und B auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A - B$ enthält.

⁵⁾ Wenn \mathfrak{M} ein Mengenkörper ist, kann das Postulat 1) einfacher so formuliert werden: Alle Mengen $A \in \mathfrak{M}$ sind E -beschränkt.

Jeder Inhalt auf irgendeinem Feld \mathfrak{M} ist Fortsetzung des elementaren Inhaltes (\mathfrak{M} enthält ja \mathfrak{E}).

Einen Inhalt auf dem universellen Feld \mathfrak{B} nennen wir *universellen Inhalt*⁶⁾.

Definition 2.5: Ein *Inhaltssystem* $[\mathfrak{M}, \Phi]$ besteht aus einem Inhaltsfeld \mathfrak{M} und einem auf \mathfrak{M} definierten Inhalt Φ .

Wenn auf dem Feld \mathfrak{E} der elementare Inhalt Φ existiert, so nennen wir $[\mathfrak{E}, \Phi]$ das *elementare Inhaltssystem*⁷⁾.

Ist Φ ein universeller Inhalt, so nennen wir $[\mathfrak{B}, \Phi]$ ein *universelles Inhaltssystem*.

3. Teil. Zerlegungsäquivalenz von Mengen.

Definition 3.1: \mathfrak{M} sei ein Inhaltsfeld. Zwei Punktmengen $A, B \in \mathfrak{M}$ heißen *einfach zerlegungsgleich* bezüglich \mathfrak{M} :

$$A \approx B (\mathfrak{M}),$$

wenn $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{M}$ existieren, so daß

$$1. A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = O \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

$$2. A_k \cong B_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$3. A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar: Ist $A \cong B, A, B \in \mathfrak{M}$, so ist $A \approx B (\mathfrak{M})$.

Aus $A \approx B (\mathfrak{M})$ folgt die Existenz einer „stückweise kongruenten“ eindeutigen Abbildung von A auf B . Dabei gehören die endlich vielen Untermengen von A , auf denen die Abbildung kongruent ist, zu \mathfrak{M} .

Satz 3.1: Die Relation $A \approx B (\mathfrak{M})$ ist reflexiv und symmetrisch. Wenn M ein Mengenring⁸⁾ ist, so ist sie auch transitiv.

Beweis: Die Reflexivität und Symmetrie folgt unmittelbar aus der Definition. Die letzte Behauptung wird bewiesen wie der entsprechende Satz in BANACH-TARSKI [3], S. 247.

Satz 3.2: Aus $A \approx A_1 (\mathfrak{M}), B \approx B_1 (\mathfrak{M}), A \cap B = A_1 \cap B_1 = O$ folgt

$$A \cup B \approx A_1 \cup B_1 (\mathfrak{M}).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Definition 3.1.

Satz 3.3: \mathfrak{M} sei ein Inhaltsfeld und gleichzeitig Mengenring. Sind $A, B, C \in \mathfrak{M}$ und $A \approx B (\mathfrak{M}), A \supseteq C$, so existiert $D \in \mathfrak{M}$, so daß $B \supseteq D$ und $C \approx D (\mathfrak{M})$. Der Satz wird bewiesen wie der entsprechende Satz in BANACH-TARSKI [3], S. 251.

Definition 3.2: \mathfrak{M} sei ein Inhaltsfeld. Zwei Punktmengen $A, B \in \mathfrak{M}$ heißen *mehrfach zerlegungsgleich* bezüglich \mathfrak{M} :

$$A \approx B (\mathfrak{M}),$$

⁶⁾ Auf Grund von [1] auch BANACHScher Inhalt genannt.

⁷⁾ Die Definitionen 2.3–2.5 entsprechen im wesentlichen denen, die H. HADWIGER [10] gegeben hat. Für die Theorie des sog. absoluten Inhaltes im wichtigen Spezialfall des euklidischen Raumes und bezogen auf die Translationsgruppe vgl. H. HADWIGER [12].

⁸⁾ Als Mengenring bezeichnen wir wie üblich ein Mengensystem, das mit zwei Mengen A und B auch $A \cup B$ und $A \cap B$ enthält.

wenn endlich viele Mengen $C_1, \dots, C_r \in \mathfrak{M}$ existieren, so daß

$$A \approx C_1 \approx \dots \approx C_r \approx B(\mathfrak{M}) \quad \text{ist.}$$

Bemerkung: Aus $A \approx B$ oder $A \approx B(\mathfrak{M})$ folgt $A \approx B(\mathfrak{M})$. Falls \mathfrak{M} ein Mengenring ist, sind die Relationen $\approx(\mathfrak{M})$ und $\approx(\mathfrak{M})$ miteinander identisch (nach Satz 3.1).

Satz 3.4: Die Relation $A \approx B(\mathfrak{M})$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Der Beweis folgt aus Satz 3.1 und Definition 3.2.

Satz 3.5: Aus $A \approx A_1(\mathfrak{M})$, $B \approx B_1(\mathfrak{M})$, $A \cap B = A_1 \cap B_1 = O$

$$\text{folgt} \quad A \cup B \approx A_1 \cup B_1(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Nach der Voraussetzung existieren Punktmengen

$$C_1, \dots, C_r \in \mathfrak{M},$$

so daß

$$A \approx C_1 \approx \dots \approx C_r \approx A'_1(\mathfrak{M}) \text{ ist für } A'_1 \cong A_1.$$

Auf Grund der Bedingung 2.2 können die Mengen C_k und A'_1 so gewählt werden, daß sie zu B disjunkt sind. Nach Satz 3.2 folgt dann:

$$A \cup B \approx C_1 \cup B \approx \dots \approx C_r \cup B \approx A'_1 \cup B(\mathfrak{M}),$$

also

$$A \cup B \approx A'_1 \cup B(\mathfrak{M}).$$

Ebenso beweist man

$$A_1 \cup B' \approx A_1 \cup B'_1(\mathfrak{M}) \quad (B' \cong B, A_1 \cap B' = O),$$

woraus wegen der Transitivität der Relation \approx die Behauptung folgt (denn es ist offensichtlich $A'_1 \cup B \approx A_1 \cup B'(\mathfrak{M})$).

Definition 3.3: M sei ein Feld und $A, B \in \mathfrak{M}$. A heißt einfach zerlegungsgrößer als B bezüglich \mathfrak{M} :

$$A \geq \approx B(\mathfrak{M}),$$

wenn $A', B' \in \mathfrak{M}$ existieren, so daß

$$A \approx A' \geq B' \approx B(\mathfrak{M})$$

ist.

Bemerkung: Aus $A \geq B$ oder $A \approx B(\mathfrak{M})$ folgt $A \geq \approx B(\mathfrak{M})$.

Satz 3.6: Die Relation $A \geq \approx B(\mathfrak{M})$ ist reflexiv. Wenn \mathfrak{M} ein Mengenring ist, so ist sie auch transitiv.

Beweis: a) Reflexivität: Es ist $A \approx A \geq A \approx A(\mathfrak{M})$.

b) \mathfrak{M} sei ein Mengenring und $A \approx \approx B(\mathfrak{M})$, $B \approx \approx C(\mathfrak{M})$, d. h. $A \approx A' \geq B' \approx B$ und $B \approx B'' \geq C'' \approx C(\mathfrak{M})$. Nach Satz 3.1 folgt $B' \approx B''(\mathfrak{M})$. Nach Satz 3.3 existiert D'' , so daß $B' \geq D'' \approx C''(\mathfrak{M})$. Schließlich folgt $A \approx A' \geq D'' \approx C(\mathfrak{M})$ (Satz 3.1!), also $A \geq \approx C(\mathfrak{M})$, w.z.b.w.

Satz 3.7: Aus $A, B, D \in \mathfrak{M}$, $A \geq \approx B(\mathfrak{M})$, $A \cap D = B \cap D = O$

$$\text{folgt} \quad A \cup D \geq \approx B \cup D(\mathfrak{M}).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3.2 und Bedingung 2.2.

Definition 3.4: \mathfrak{M} sei ein Feld und $A, B \in \mathfrak{M}$. A heißt mehrfach zerlegungsgrößer als B bezüglich \mathfrak{M} :

$$A \geq B(\mathfrak{M}),$$

wenn $C_1, \dots, C_r \in \mathfrak{M}$ existieren, so daß

$$(1) \quad A \cong C_1 \cong \dots \cong C_r \cong B(\mathfrak{M})$$

ist.

Bemerkung: Falls \mathfrak{M} ein Mengenring ist, sind die Relationen $\cong(\mathfrak{M})$ und $\geq(\mathfrak{M})$ identisch (nach Satz 3.6). Aus $A \geq B$ oder $A \cong B(\mathfrak{M})$ folgt $A \geq B(\mathfrak{M})$.

Satz 3.8: Die Relation $A \geq B(\mathfrak{M})$ ist reflexiv und transitiv.

Der Beweis folgt für die Reflexivität aus Satz 3.6 und Def. 3.4, für die Transitivität aus Definition 3.4 allein.

Satz 3.9: Aus $A, B, D \in \mathfrak{M}$, $A \geq B(\mathfrak{M})$, $A \cap D = B \cap D = O$.

$$\text{folgt} \quad A \cup D \geq B \cup D(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Wegen der Bedingung 2.2 können in (1) die Mengen C_1, \dots, C_r so gewählt werden, daß sie alle zu D disjunkt sind. Der Beweis folgt dann direkt aus Satz 3.7.

Definition 3.5: \mathfrak{M} sei ein Feld und $A, B \in \mathfrak{M}$. Wir nennen A zerlegungsäquivalent zu B bezüglich \mathfrak{M} :

$$A \sim B(\mathfrak{M}),$$

wenn $A \geq B(\mathfrak{M})$ und $B \geq A(\mathfrak{M})$ ist.

Bemerkung: Aus $A \cong B$ folgt $A \geq B(\mathfrak{M})$, daraus $A \sim B(\mathfrak{M})$ und daraus $A \sim B(\mathfrak{M})^9$.

Satz 3.10: Die Relation $A \sim B(\mathfrak{M})$ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3.8 und Definition 3.5.

Satz 3.11: Aus $A, B, D \in \mathfrak{M}$, $A \sim B(\mathfrak{M})$, $A \cap D = B \cap D = O$

$$\text{folgt} \quad A \cup D \sim B \cup D(\mathfrak{M}).$$

Der Beweis folgt aus Satz 3.9 und Definition 3.5.

Satz 3.12: \mathfrak{M} sei ein Feld. Aus $A \sim A_1(\mathfrak{M})$, $B \sim B_1(\mathfrak{M})$,

$$A \cap B = A_1 \cap B_1 = O \quad \text{folgt} \quad A \cup B \sim A_1 \cup B_1(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Wegen Bedingung 2.2 existiert B' so, daß $B \cong B'$ und $A \cap B' = A_1 \cap B' = O$ ist. Nach Satz 3.11 ist dann $A \cup B \sim A \cup B' \sim A_1 \cup B'(\mathfrak{M})$, also $A \cup B \sim A_1 \cup B'(\mathfrak{M})$. Ebenso existiert $A'_1 \cong A_1$ mit $A'_1 \cap B = O$ und $A'_1 \cup B \sim A_1 \cup B_1(\mathfrak{M})$. Daraus folgt die Behauptung auf Grund der Transitivität von $\sim(\mathfrak{M})$.

Definition 3.6: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Mit $\overline{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$ bezeichnen wir die Menge der $\sim(\mathfrak{M})$ -Klassen der Elemente von \mathfrak{L} . Sind $\overline{A}, \overline{B} \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$, so bezeichnen wir mit $\overline{A} + \overline{B}$ die Klasse von $A \cup B$ ($A \in \overline{A}$, $B \in \overline{B}$, $A \cap B = O$) (Bedg. 2.2!). Wir nennen \overline{A} größer als \overline{B} : $\overline{A} \geq \overline{B}$, wenn $A \in \overline{A}$ und $B \in \overline{B}$ existieren, so daß $A \geq B(\mathfrak{M})$ ist. Die letzte Beziehung ist dann nach Satz 3.8 und Definition 3.5 für beliebige $A \in \overline{A}$ und $B \in \overline{B}$ erfüllt.

⁹) Falls \mathfrak{M} gleich dem universellen Feld ist, sind die Relationen „ \sim “ und „ \cong “ miteinander identisch [vgl. [4], S. 49, Haupteigenschaft (V), aus der unsere Behauptung leicht folgt].

Satz 3.13: Durch die Relation $\bar{A} \geq \bar{B}$ und die Verknüpfung $\bar{A} + \bar{B}$ wird $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ eine teilgeordnete kommutative Halbgruppe¹⁰⁾. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$.

Beweis: 1) Daß $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ durch $\bar{A} \geq \bar{B}$ teilgeordnet wird, folgt aus Satz 3.8.

2) Die Kommutativität und Assoziativität von $\bar{A} + \bar{B}$ folgt unmittelbar aus der Definition dieser Verknüpfung.

3) Sei $\bar{A}, \bar{B}, \bar{D} \in \bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ und $\bar{A} \geq \bar{B}$. Ist $A \in \bar{A}$ und $B \in \bar{B}$, so ist $A \geq B(\mathfrak{M})$. Wegen Bedingung 2.2 kann $D \in \bar{D}$ so gewählt werden, daß $A \cap D = B \cap D = O$ ist. Nach Satz 3.9 wird dann $A \cup D \geq B \cup D(\mathfrak{M})$, also $\bar{A} + \bar{D} \geq \bar{B} + \bar{D}$.

In der Definition 3.6 und Satz 3.13 kann insbesondere $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}$ gewählt werden. Wir erhalten dann die teilgeordnete kommutative Halbgruppe $\bar{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M})$, die wir im folgenden auch mit \mathfrak{M}^* bezeichnen wollen. Ist $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{M}$, so ist $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ Unterstruktur von $\mathfrak{M}^{*11)}$.

Satz 3.14: Die teilgeordnete kommutative Halbgruppe $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ (insbesondere \mathfrak{M}^*) enthält ein neutrales Element O und es gilt $\bar{A} \geq O$ für alle $\bar{A} \in \bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$. Ferner existiert $\bar{E} \in \bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$, und zu jedem Element $\bar{A} \in \bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ eine natürliche Zahl k , so daß $\bar{A} \leq k \bar{E}$ ist.

Beweis: 1) O ist die $\sim(\mathfrak{M})$ -Klasse der leeren Punktmenge.

2) \bar{E} ist die $\sim(\mathfrak{M})$ -Klasse der Einheitsmenge $E \in \mathfrak{Q}$. Die letzte Behauptung ist der Ausdruck von Postulat 1) in Def. 2.3.

Satz 3.15: Ist \mathfrak{M} ein Mengenkörper, so hat \mathfrak{M}^* die folgende Eigenschaft: Zu $\bar{A}, \bar{B} \in \mathfrak{M}^*$, $\bar{A} \geq \bar{B}$ existiert $\bar{C} \in \mathfrak{M}^*$, so daß $\bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$ ist.

Beweis: $\bar{A} \geq \bar{B}$ bedeutet $A \geq B(\mathfrak{M})$ für $A \in \bar{A}$, $B \in \bar{B}$. Falls aber \mathfrak{M} ein Mengenkörper ist, bedeutet dies $A \approx A' \geq B' \approx B(\mathfrak{M})$. Setzen wir $C' = A' - B'$, so wird wegen $A' \in \bar{A}$, $B' \in \bar{B}$: $\bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$, wo \bar{C} die $\approx(\mathfrak{M})$ -Klasse von C' bedeutet.

4. Teil. Inhaltssysteme und monotone Linearformen.

Definition 4.1: \mathfrak{Q} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{M}$. Ein auf \mathfrak{Q} definierter Inhalt Φ heißt

- 1) $\approx(\mathfrak{M})$ -invariant, wenn aus $A, B \in \mathfrak{Q}$, $A \approx B(\mathfrak{M})$
folgt $\Phi(A) = \Phi(B)$.
- 2) $\sim(\mathfrak{M})$ -invariant, wenn aus $A, B \in \mathfrak{Q}$, $A \sim B(\mathfrak{M})$
folgt $\Phi(A) = \Phi(B)$.
- 3) $\geq(\mathfrak{M})$ -monoton, wenn aus $A, B \in \mathfrak{Q}$, $A \geq B(\mathfrak{M})$
folgt $\Phi(A) \geq \Phi(B)$.
- 4) $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton, wenn aus $A, B \in \mathfrak{Q}$, $D \in \mathfrak{M}$
 $A \cap D = B \cap D = O$ und $A \cup D \geq B \cup D(\mathfrak{M})$ folgt $\Phi(A) \geq \Phi(B)$.
- 5) Zerlegungsinvariant, wenn er $\approx(\mathfrak{B})$ -invariant ist.
- 6) Zerlegungsmonoton, wenn er $\geq(\mathfrak{B})$ -monoton ist.

Bemerkungen:

a) Aus der $\geq(\mathfrak{M})$ -Ergänzungsmonotonie eines Inhaltes folgt seine $\geq(\mathfrak{M})$ -Monotonie, daraus die $\sim(\mathfrak{M})$ -Invarianz und daraus die $\approx(\mathfrak{M})$ -Invarianz.

¹⁰⁾ Vgl. N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématique*, 1^{re} partie, livre II, chap. VI, § 1.1.

¹¹⁾ Genau genommen gilt dies erst, wenn jedes Element von $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ durch dasjenige Element von \mathfrak{M}^* ersetzt wird, dessen Untermenge es ist. Diese Ersetzung ist ein Isomorphismus und ändert an der Struktur von $\bar{\mathfrak{V}}(\mathfrak{M})$ nichts.

b) Wenn \mathfrak{M} ein Mengenkörper ist, so folgt die $\geq(\mathfrak{M})$ -Ergänzungsmonotonie aus der $\geq(\mathfrak{M})$ -Monotonie. Das wird später bewiesen (Satz 6.5).

c) Jeder auf \mathfrak{M} definierte Inhalt ist $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton und hat daher auch die Eigenschaften 1), 2), 3).

d) Die Zerlegungsinvarianz eines Inhaltes könnte auch wie folgt definiert werden: Aus $A \sim B(\mathfrak{B})$ folgt $\Phi(A) = \Phi(B)$ [nach der Bemerkung zu Definition 3.5 und Anm. 9)].

e) Im Anschluß an Definition 4.1, 6) könnte die Ergänzungsmonotonie eines Inhaltes wie folgt definiert werden: Aus $A \cup D \geq B \cup D(\mathfrak{B})$, $A \cap D = B \cap D = O$, $D \in \mathfrak{B}$, $A, B \in \mathfrak{L}$ folgt $\Phi(A) \geq \Phi(B)$. Nach Bemerkung b) ist diese Ergänzungsmonotonie mit der Zerlegungsmonotonie 6) identisch.

Definition 4.2: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. \mathfrak{L} heißt zerlegungsfrei bezüglich \mathfrak{M} , wenn aus $A \in \mathfrak{L}$, $B \in \mathfrak{M}$, $A \approx B(\mathfrak{M})$ folgt $B \in \mathfrak{L}$.

Ein Feld \mathfrak{L} heißt zerlegungsfrei (schlechthin), wenn es bezüglich dem universellen Feld \mathfrak{B} zerlegungsfrei ist.

Satz 4.1: \mathfrak{M} sei ein Feld und gleichzeitig Mengenring. \mathfrak{L} sei ein bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsfreies Unterfeld von \mathfrak{M} . Dann ist jeder auf \mathfrak{L} definierte und $\approx(\mathfrak{M})$ -invariante Inhalt $\geq(\mathfrak{M})$ -monoton.

Beweis: Sei der Inhalt $\Phi \approx(\mathfrak{M})$ -invariant und $A, B \in \mathfrak{L}$, $A \geq B(\mathfrak{M})$. Nach der Bemerkung nach Definition 3.4 ist dann $A \approx A' \geq B' \approx B(\mathfrak{M})$ mit $A', B' \in \mathfrak{M}$. Wegen der Zerlegungsfreiheit bezüglich \mathfrak{M} von \mathfrak{L} folgt aber $A', B' \in \mathfrak{L}$ und daraus die Behauptung.

Korollar: Ein auf einem zerlegungsfreien Feld definierter zerlegungsinvarianter Inhalt ist zerlegungsmonoton.

Definition 4.3: Unter einer monotonen Linearform $\varphi(x)$ auf einer teilgeordneten kommutativen Halbgruppe \mathfrak{H} verstehen wir eine auf \mathfrak{H} definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- 2) Aus $x \geq y$ folgt $\varphi(x) \geq \varphi(y)$.

Satz 4.2: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Zwischen den $\geq(\mathfrak{M})$ -monotonen Inhalten auf \mathfrak{L} und den normierten monotonen Linearformen¹²⁾ auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$ besteht eine eindeutige Beziehung.

Ausführlicher: Jeder $\geq(\mathfrak{M})$ -monotone Inhalt auf \mathfrak{L} ist $\sim(\mathfrak{M})$ -invariant und liefert deshalb eine Funktion auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$. Diese ist eine monotone normierte Linearform.

Sei umgekehrt φ eine normierte monotone Linearform auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$. Dann ist $\Phi(A) = \varphi(\bar{A})$ ($A \in \bar{A}$) ein Inhalt auf \mathfrak{L} .

Korollar: Die Inhalte auf einem Feld \mathfrak{M} und die normierten monotonen Linearformen auf \mathfrak{M}^* entsprechen einander in eindeutiger Weise. Der Beweis folgt aus der Bemerkung c) zu Definition 4.1.

Satz 4.3: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Φ sei ein auf \mathfrak{L} definierter $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonotoner Inhalt. Die Φ nach Satz 4.2 entsprechende monotone Linearform φ hat dann die Eigenschaft:

¹²⁾ Normiert nennen wir die Linearform φ , wenn $\varphi(E) = 1$ (E = Klasse von E).

Aus $\bar{A}, \bar{B} \in \bar{\mathfrak{P}}(\mathfrak{M}), \bar{C} \in \mathfrak{M}^*, \bar{A} + \bar{C} \geq \bar{B} + \bar{C}$

folgt $\varphi(\bar{A}) \geq \varphi(\bar{B})$.

Eine monotone Linearform auf $\bar{\mathfrak{P}}(\mathfrak{M})$, welche diese Eigenschaft hat, nennen wir \mathfrak{M}^* -ergänzungsmonoton.

5. Teil. Monotone Linearformen auf teilgeordneten Halbgruppen.

In diesem Teil bedeuten L und M zwei teilgeordnete kommutative Halbgruppen, wobei L Unterstruktur von M ist. Es wird durchwegs vorausgesetzt:

- a) L enthält ein neutrales Element 0 von M und es ist $a \geq 0$ für alle $a \in M$.
- b) L enthält ein Element e , so daß zu jedem $a \in M$ eine natürliche Zahl k existiert, so daß $a \leq ke$ ist.

$\varphi(x)$ bedeutet eine auf L definierte monotone Linearform mit $\varphi(e) = 1$.

Als *Voraussetzungsgruppe* A bezeichnen wir die Gesamtheit der Voraussetzungen a), b) und der folgenden:

- c₁) Aus $a, b \in L, c \in M, a + c \geq b + c$ folgt $\varphi(a) \geq \varphi(b)$.

Als *Voraussetzungsgruppe* B bezeichnen wir die Gesamtheit der Voraussetzungen a), b) und der folgenden:

- c₂) Sind $a, b \in M, a \geq b$, so existiert $c \in M$, so daß $a = b + c$ ist.

Abschnitt A des 5. Teiles.

In diesem Abschnitt wird durchwegs vorausgesetzt, daß die *Voraussetzungsgruppe* A erfüllt ist.

a sei ein beliebiges Element von M . Wir betrachten Beziehungen von der Form

- (α) $x + ka + c \geq y + la + c$ ($x, y \in L, k, l$ nat. Zahlen oder $0, k > l, c \in M$)

und ordnen jeder solchen Beziehung die reelle Zahl

$$\varrho_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)]$$

zu. Ebenso ordnen wir jeder Beziehung von der Form

- (β) $z + ra + d \geq w + sa + d$ ($z, w \in L, r, s$ nat. Zahlen oder $0, s > r, d \in M$) die reelle Zahl

$$\sigma_a = \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)]$$

zu.

Definition 5.1: Für jedes $a \in M$ bezeichnen wir mit R_a die Menge der zu a gehörigen reellen Zahlen ϱ_a , mit S_a die Menge der zugehörigen σ_a .

Satz 5.1: Die Mengen R_a und S_a sind nicht leer.

Beweis: $a \geq 0$ ist eine Beziehung von der Form (α). Sie liefert $\varrho_a = 0 \in R_a$. $k \geq a$ ist von der Form (β). Sie liefert $\sigma_a = k \in S_a$.

Satz 5.2: Aus $\varrho_a \in R_a$ und $\sigma_a \in S_a$ folgt $\varrho_a \leq \sigma_a$.

Beweis: Aus den zu ϱ_a bzw. σ_a gehörigen Beziehungen von der Form (α) bzw. (β) folgt nach Multiplikation mit $(s-r)$ bzw. $(k-l)$ und Addition:

$$(s-r)x + (k-l)z + (ks-lr)a + (s-r)c + (k-l)d \geq (s-r)y + (k-l)w + (ks-lr)a + (s-r)c + (k-l)d.$$

Wegen (c_1) folgt hieraus:

$$(s-r)\varphi(x) + (k-l)\varphi(z) \geq (s-r)\varphi(y) + (k-l)\varphi(w)$$

und daraus die Behauptung.

Aus Satz 5.2 folgt, daß die Menge R_a nach oben, die Menge S_a nach unten beschränkt ist. Es existieren deshalb die obere Grenze $\sup R_a$ und die untere Grenze $\inf S_a$.

Definition 5.2: Als Unterfunktion von $\varphi(x)$ bezeichnen wir die für $a \in M$ definierte Funktion

$$\underline{\varphi}(a) = \sup R_a,$$

als Oberfunktion

$$\overline{\varphi}(a) = \inf S_a.$$

Satz 5.3: Für $a \in M$ ist $0 \leq \underline{\varphi}(a) \leq \overline{\varphi}(a)$. Für $a \in L$ ist $\varphi(a) = \underline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(a)$.

Beweis: Der erste Teil folgt Definition 5.2, Satz 5.2 und $0 \in R_a$ (s. Beweis zu Satz 5.1). Für $a \in L$ folgt aus (α) wegen (c_1) :

$$\varphi(a) \geq \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \in R_a,$$

also auch $\varphi(a) \geq \sup R_a = \underline{\varphi}(a)$. Da die Beziehung $0 + 1a + 0 \geq a + 0 + 0$ für $a \in L$ vom Typus (α) ist, folgt ferner

$$\underline{\varphi}(a) \geq \varphi(a), \text{ also } \underline{\varphi}(a) = \varphi(a).$$

Die Gleichung $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ folgt durch analoge Überlegung auf Grund der Beziehung $a + 0a + 0 \geq 0 + 1a + 0$, die für $a \in L$ vom Typus (β) ist.

Satz 5.4: Wenn die Linearform $\varphi(x)$ auf M fortgesetzt werden kann, so gilt für $a \in M$: $\underline{\varphi}(a) \leq \varphi(a) \leq \overline{\varphi}(a)$.

Beweis: Für eine auf M definierte monotone Linearform folgt aus (α) und (β) :

$$\frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \leq \varphi(a) \leq \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)]$$

und daraus die Behauptung.

Satz 5.5: Für alle $a, b \in M$ gilt:

$$\underline{\varphi}(a+b) \geq \underline{\varphi}(a) + \underline{\varphi}(b)$$

$$\overline{\varphi}(a+b) \leq \overline{\varphi}(a) + \overline{\varphi}(b).$$

Beweis: Wir beweisen die erste Ungleichung. Der Beweis für die zweite verläuft analog.

Nach Definition 5.2 genügt es zu zeigen, daß aus

$$\varrho_a \in R_a, \varrho_b \in R_b$$

folgt

$$\varrho_a + \varrho_b \in R_{a+b}.$$

Die ϱ_a und ϱ_b entsprechenden Beziehungen vom Typus (α) seien:

$$(2) \quad x_1 + k_1 a + c_1 \geq y_1 + l_1 a + c_1, \quad k_1 \geq l_1$$

$$(3) \quad x_2 + k_2 b + c_2 \geq y_2 + l_2 b + c_2, \quad k_2 \geq l_2.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $k_2 l_1 \geq k_1 l_2$ ist. Dann erhalten wir durch Addition der mit $(k_2 - l_2)$ bzw. $(k_1 - l_1)$

multiplizierten Ungleichungen (2) und (3) und nach Hinzufügung von $(k_2 l_1 - k_1 l_2)$ b zu beiden Seiten:

$$\begin{aligned} (k_2 - l_2) x_1 + (k_1 - l_1) x_2 + k_1(k_2 - l_2) (a + b) + (k_2 - l_2) c_1 + (k_1 - l_1) c_2 &\geq \\ \geq (k_2 - l_2) y_1 + (k_1 - l_1) y_2 + l_1(k_2 - l_2) (a + b) + (k_2 - l_2) c_1 + (k_1 - l_1) c_2. \end{aligned}$$

Dies ist eine zu $a + b$ gehörige Ungleichung vom Typus (α) . Die ihr entsprechende reelle Zahl $\varrho_{a+b} \in R_{a+b}$ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, gleich $\varrho_a + \varrho_b$.

Abschnitt B des 5. Teiles

In diesem Abschnitt wird angenommen, daß die Voraussetzungsgruppe B (s. S. 212) erfüllt ist.

Für ein beliebiges Element $a \in M$ betrachten wir Beziehungen der Formen

$(\alpha^*) \quad x + ka \geq y + la \quad (x, y \in L, k, l \text{ nat. Zahlen oder } 0, k > l)$

$(\beta^*) \quad z + ra \geq w + sa \quad (z, w \in L, r, s \text{ nat. Zahlen oder } 0, s > r)$.

Jeder Beziehung von der Form (α^*) bzw. (β^*) ordnen wir die reelle Zahl

$$\varrho_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)]$$

bzw.

$$\sigma_a = \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)]$$

zu. Für jedes $a \in M$ bezeichnen wir sodann die Menge aller reellen Zahlen ϱ_a mit R_a , die Menge der σ_a mit S_a . Es ist leicht einzusehen, aber für unsere Zwecke belanglos, daß (wegen Voraussetzung c_2) wir dieselben Mengen R_a und S_a erhalten würden, wenn statt den Beziehungen der Formen (α^*) und (β^*) diejenigen der Formen (α) und (β) zugrunde gelegt würden.

Wir wollen nun auf Grund der Voraussetzung c_2) dieselben Resultate wie in Abschnitt A herleiten, jedoch ohne c_1) voraussetzen.

Von $\varphi(x)$ ist also in diesem Abschnitt nur vorausgesetzt, daß es eine auf L definierte monotone Linearform ist.

Satz 5.6: Die Mengen R_a und S_a sind nicht leer. Es ist $0 \in R_a$.

Beweis wie bei Satz 5.1.

Satz 5.7: Für $a \in L$ folgt aus (α^*) und (β^*) :

$$\varrho_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \leq \varphi(a) \leq \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)] = \sigma_a.$$

Der Beweis folgt unmittelbar, wenn man bedenkt, daß $\varphi(a)$ für $a \in L$ definiert ist.

Satz 5.8: Aus $a, b \in M$, $\varrho_a \in R_a$, $\varrho_b \in R_b$, $\sigma_a \in S_a$, $\sigma_b \in S_b$

folgt $\varrho_a + \varrho_b \in R_{a+b}$ und $\sigma_a + \sigma_b \in S_{a+b}$.

Der Beweis ist im Beweis zu Satz 5.5 enthalten.

Satz 5.9: Die Menge R_a ist nach oben beschränkt für alle $a \in M$.

Beweis: Sei $a \in M$. Wegen den Voraussetzungen (b) und (c_2) existiert $c \in M$, so daß $a + c = ne \in L$ ist. Sei $\varrho_a \in R_a$. Wegen $0 \in R_c$ (Satz 5.6) und Satz 5.8 ist auch $\varrho_a \in R_{a+c}$ und also nach Satz 5.7 $\varrho_a \leq \varphi(a + c)$.

Definition 5.3: Als Unterfunktion von $\varphi(x)$ bezeichnen wir die für $a \in M$ definierte Funktion

$$\underline{\varphi}(a) = \sup R_a.$$

Satz 5.10: Aus $\varrho_a \in R_a$ und $\sigma_a \in S_a$ folgt $\varrho_a \leq \sigma_a$.

Beweis: Die zu ϱ_a bzw. σ_a gehörigen Beziehungen vom Typus (α^*) bzw. (β^*) seien:

$$\begin{aligned} x + ka &\geq y + la & (k > l) \\ z + ra &\geq w + sa & (s > r). \end{aligned}$$

n sei eine beliebige natürliche Zahl. Multiplizieren wir beide Seiten der ersten Beziehung mit $n(s-r)$, die der zweiten mit $n(k-l)$, addieren wir dann die beiden Beziehungen und fügen wir schließlich zur linken Seite noch a hinzu, so folgt:

$$\begin{aligned} n(s-r)x + n(k-l)z + (n(ks-rl) + 1)a &\geq \\ &\geq n(s-r)y + n(k-l)w + n(ks-rl)a. \end{aligned}$$

Dies ist eine zu $a \in M$ gehörige Beziehung vom Typus (α^*) . Nach Definition 5.3 folgt aus ihr:

$$\begin{aligned} n(s-r) \varphi(x) + n(k-l) \varphi(z) + \varphi(a) &\geq \\ &\geq n(s-r) \varphi(y) + n(k-l) \varphi(w). \end{aligned}$$

Da dies für jede natürliche Zahl n gilt, folgt

$$\frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \leq \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)],$$

w.z.b.w.

Definition 5.4: Als Oberfunktion von $\varphi(x)$ bezeichnen wir die für $a \in M$ definierte Funktion

$$\bar{\varphi}(a) = \inf S_a.$$

Bemerkung: $\bar{\varphi}(a)$ existiert, weil nach den Sätzen 5.6 und 5.10 die Menge S_a nach unten beschränkt ist.

Satz 5.11: Für $a \in M$ ist $0 \leq \underline{\varphi}(a) \leq \varphi(a)$. Für $a \in L$ ist $\underline{\varphi}(a) = \varphi(a) = \bar{\varphi}(a)$.

Beweis: Der erste Teil folgt aus den Definitionen 5.3 und 5.4 und den Sätzen 5.6 und 5.10, der zweite Teil aus den Definitionen 5.3 und 5.4 (vgl. den Beweis zu Satz 5.3).

Satz 5.12: Wenn $\varphi(x)$ auf M fortgesetzt werden kann, so ist für $a \in M$:

$$\underline{\varphi}(a) \leq \varphi(a) \leq \bar{\varphi}(a).$$

Beweis: Wenn die monotone Linearform φ auf M definiert ist, so folgt aus (α^*) und (β^*) :

$$\varrho_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \leq \varphi(a) \leq \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)] \leq \sigma_a$$

und daraus die Behauptung nach den Definitionen 5.3 und 5.4.

Satz 5.13: Für alle $a, b \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(a+b) &\geq \underline{\varphi}(a) + \underline{\varphi}(b) \\ \bar{\varphi}(a+b) &\leq \bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b). \end{aligned}$$

Beweis: Er folgt wie bei Satz 5.5 aus Satz 5.8.

Abschnitt C des 5. Teiles.

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß von den Voraussetzungsgruppen A und B die eine erfüllt ist. Er ist also gleichzeitige Fortsetzung der Abschnitte A und B. Je nachdem werden wir im folgenden vom „Fall A“ oder vom „Fall B“ sprechen.

Für $a \in M$ bezeichnen wir mit $\{L, a\}$ die durch L und a erzeugte teilgeordnete Unterhalbgruppe von M. $\{L, a\}$ besteht aus allen Elementen von M, die in der Form $x + ka$ ($x \in L$, k eine natürliche Zahl oder 0) darstellbar sind.

Es ist unser Ziel, die auf L definierte monotone Linearform $\varphi(x)$ als monotone Linearform auf $\{L, a\}$ fortzusetzen. Im Falle A verlangen wir von der fortgesetzten Linearform, daß sie wieder die Bedingung (c_1) erfüllt.

Mit λ bezeichnen wir im folgenden eine reelle Zahl, für die

$$(4) \quad \underline{\varphi}(a) \leq \lambda \leq \overline{\varphi}(a)$$

ist.

Satz 5.14: Durch $\psi(x + ka) = \varphi(x) + k\lambda$ ist auf $\{L, a\}$ eine Funktion ψ eindeutig definiert. Sie ist auf L mit φ identisch.

Beweis: a) Eindeutigkeit von ψ . Es sei $x + ka = y + la$ (4a).

1. Fall: $k > l$. Da mit dem Gleichheitszeichen auch „ \geq “ und „ \leq “ gelten, erhält man aus (4a) sowohl eine Beziehung der Form (α) (Fall A) bzw. (α^*) (Fall B) als auch eine solche von der Form (β) bzw. (β^*). Es folgt also:

$$\underline{\varphi}(a) \geq \varrho_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)]$$

$$\overline{\varphi}(a) \leq \sigma_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Daraus und aus Satz 5.3 bzw. Satz 5.11 sowie aus (4) folgt $\underline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(a) = \lambda$.

Daraus und aus den Sätzen 5.3 bzw. 5.11 und 5.5 bzw. 5.13 erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi(x) + k\lambda &= \overline{\varphi}(x) + k\overline{\varphi}(a) \geq \overline{\varphi}(x + ka) \\ &= \overline{\varphi}(y + la) \geq \underline{\varphi}(y + la) \geq \underline{\varphi}(y) + l\underline{\varphi}(a) \\ &= \varphi(y) + l\lambda. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man: $\varphi(x) + k\lambda \leq \varphi(y) + l\lambda$, woraus der Beweis folgt.

2. Fall: $k = l$. Aus (4a) folgt, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

$$nx + (nk + 1)a \geq ny + nka.$$

Dies ist eine zum Element a gehörige Beziehung der Form (α) bzw. (α^*).

Nach Definition 5.2 bzw. 5.3 folgt also

$$\underline{\varphi}(a) \geq n(\varphi(y) - \varphi(x)).$$

Ebenso zeigt man

$$\underline{\varphi}(a) \geq n(\varphi(x) - \varphi(y)), \text{ also } \varphi(x) = \varphi(y),$$

woraus wiederum der Beweis folgt.

b) Daß $\psi(x)$ auf L mit $\varphi(x)$ identisch ist, ist klar.

Satz 5.15: $\psi(x)$ ist auf $\{L, a\}$ eine monotone Linearform. Im Fall A hat sie die Eigenschaft (c_1).

Beweis: a) Daß $\psi(x)$ auf $\{L, a\}$ eine Linearform ist, ist klar.

b) *Fall A.* Wir zeigen, daß $\varphi(x)$ die Eigenschaft (c_1) hat, woraus die Monotonie unmittelbar folgt. Sei

$$(5) \quad x + ka + c \geq y + la + c \quad (x, y \in L, c \in M).$$

1. *Fall:* $k > l$. (5) ist vom Typus (α) . Also ist

$$\lambda \geq \underline{\varphi}(a) \geq \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)]$$

und damit

$$\varphi(x) + k\lambda \geq \varphi(y) + l\lambda$$

w.z.b.w.

2. *Fall:* $k < l$. (5) ist vom Typus (β) . Also ist

$$\lambda \leq \overline{\varphi}(a) \leq \frac{1}{l-k} [\varphi(x) - \varphi(y)]$$

und damit

$$\varphi(x) + k\lambda \geq \varphi(y) + l\lambda$$

w.z.b.w.

3. *Fall:* $k = l$. n sei eine natürliche Zahl. Durch Multiplikation beider Seiten von (5) mit n und Addition von a zur linken Seite erhalten wir:

$$nx + (nk + 1)a + nc \geq ny + nka + nc.$$

Dies ist für das Element a vom Typus (α) und es folgt:

$$\underline{\varphi}(a) \geq \varphi_a = n(\varphi(y) - \varphi(x)).$$

Da dies für jede natürliche Zahl n gilt, ist $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ und damit $\varphi(x) + k\lambda \geq \varphi(y) + k\lambda$, w.z.b.w.

c) Die Monotonie im Falle B wird fast wörtlich gleich bewiesen. Der Beweis möge deshalb übergangen werden.

Satz 5.16: Durch $\psi(x + ka) = \varphi(x) + k\lambda$ (λ eine feste reelle Zahl mit $\underline{\varphi}(a) \leq \lambda \leq \overline{\varphi}(a)$) erhält man alle Fortsetzungen von $\varphi(x)$ auf $\{L, a\}$ als monotone Linearform (Fall B) bzw. monotone Linearform mit der Eigenschaft (c_1) (Fall A).

Beweis: a) *Fall A.* Für eine auf $\{L, a\}$ definierte monotone Linearform $\psi(x)$ mit der Eigenschaft (c_1) , die Fortsetzung von $\varphi(x)$ ist, folgt aus (α) und (β) :

$$\varphi_a = \frac{1}{k-l} [\varphi(y) - \varphi(x)] \leq \psi(a) \leq \frac{1}{s-r} [\varphi(z) - \varphi(w)] = \sigma_a$$

und damit nach Definition 5.2

$$\underline{\varphi}(a) \leq \psi(a) \leq \overline{\varphi}(a),$$

also

$$\psi(x + ka) = \varphi(x) + k\lambda \quad \text{mit} \quad \underline{\varphi}(a) \leq \lambda \leq \overline{\varphi}(a).$$

b) Der Beweis für den Fall B verläuft analog und möge deshalb übergangen werden.

Bemerkung: Wenn $\underline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(a)$ ist, ist also die Fortsetzung von $\varphi(x)$ auf $\{L, a\}$ eindeutig bestimmt. Ist jedoch $\underline{\varphi}(a) < \overline{\varphi}(a)$, so hat die Menge der Fortsetzungen die Mächtigkeit des Kontinuums.

Abschnitt D des 5. Teiles.

Auch in diesem Abschnitt wird angenommen, daß von den Voraussetzungsgruppen A und B eine erfüllt ist. Das Ziel ist, die auf L definierte monotone Linearform $\varphi(x)$ auf M fortzusetzen. Der Beweis, daß dies möglich ist, wird auf Grund der Resultate von Abschnitt C mittels transfiniter Induktion geführt.

1. Schritt.

M sei durch eine Relation $b < a$ in solcher Weise wohlgeordnet, daß die Elemente von L allen andern vorangehen. Jedem Element $a \in M$ ordnen wir die Zwischenhalbgruppe $L(a)$ ($L \subseteq L(a) \subseteq M$) zu, die aus L durch Adjunktion aller $b < a$ und von a selber hervorgeht. Es gilt dann:

- a) $a \in L(a)$,
- b) Aus $b < a$ folgt $L(b) \subseteq L(a)$.
- c) $L(a) = \left\{ \bigcup_{b < a} L(b), a \right\}$,
- d) $M = \bigcup_{a \in M} L(a)$.

2. Schritt. Induktionsvoraussetzung:

Für ein Element $a \in M$ möge gelten: Für jedes $b < a$ existiert auf $L(b)$ eine Funktion $\varphi_b(x)$ mit den Eigenschaften:

- 1) Aus $b \in L$, also $L(b) = L$ folgt $\varphi_b(x) = \varphi(x)$.
 - 2) Aus $x \in L(b)$, $x \in L(c)$ ($c < b$) folgt $\varphi_b(x) = \varphi_c(x)$.
 - 3) $\varphi_b(x)$ ist eine monotone Linearform auf $L(b)$. Im Fall A erfüllt sie (mit $L(b)$ anstelle von L) die Voraussetzung c_1 .
- Diese Induktionsvoraussetzung ist erfüllt für das erste Element a_0 von $M - L$, nämlich mit $\varphi_b(x) = \varphi(x)$ für $b < a_0$.

3. Schritt.

Wir zeigen, daß auf Grund der Induktionsvoraussetzung eine Funktion $\varphi_a(x)$ auf $L(a)$ existiert, welche die Eigenschaften 1), 2), 3) (für $b = a$) hat.

- a) Auf $\bigcup_{b < a} L(b)$ definieren wir:

$$\varphi_a^*(x) = \varphi_b(x).$$

$\varphi_a^*(x)$ ist monotone Linearform auf $\bigcup_{b < a} L(b)$. Im Fall A hat sie die Eigenschaft c_1 .

- b) $\alpha) a \in \bigcup_{b < a} L(b)$. Dann setzen wir $\varphi_a(x) = \varphi_a^*(x)$.

$\beta) a \notin \bigcup_{b < a} L(b)$. Gemäß Abschnitt C setzen wir $\varphi_a^*(x)$ auf $L(a) = \left\{ \bigcup_{b < a} L(b), a \right\}$ fort (mit $\bigcup_{b < a} L(b)$ anstelle von L , $\varphi_a^*(x)$ anstelle von $\varphi(x)$), und setzen $\varphi_a(x)$ gleich der fortgesetzten Funktion. Daß die so konstruierte Funktion $\varphi_a(x)$ die Eigenschaften 1), 2), 3) für $b = a$ hat, ist leicht einzusehen.

4. Schritt.

Vermöge Konstruktion durch transfinite Induktion ist nun für jedes Element $a \in M$ auf $L(a)$ eine Funktion $\varphi_a(x)$ mit den Eigenschaften 1), 2), 3) definiert.

5. Schritt.

$\psi(x) = \varphi_x(x)$ ist jetzt eine auf M definierte monotone Linearform, die Fortsetzung der Funktion $\varphi(x)$ ist.

Damit ist bewiesen:

Satz 5.17: L und M seien zwei teilgeordnete kommutative Halbgruppen und $L \subset M$. $\varphi(x)$ sei eine monotone Linearform auf L . Wenn die Voraussetzungsgruppe A oder B (s. S. 212) erfüllt ist, so kann $\varphi(x)$ als monotone Linearform auf M fortgesetzt werden.

Aus der Bemerkung nach Satz 5.16 folgt, daß die Menge der möglichen Fortsetzungen mindestens die Mächtigkeit des Kontinuums hat, wenn für mindestens ein Element $a \in M$ gilt: $\underline{\varphi}(a) < \overline{\varphi}(a)$. Andernfalls ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

6. Teil. Sätze über Inhaltssysteme.

Es sei daran erinnert, daß die bisherigen (und die folgenden) Resultate nur als gültig erwiesen sind, wenn die Bedingung 2.2 erfüllt ist. Im Anhang zum 6. Teil werden wir sehen, wie man sich von dieser Bedingung befreien kann.

Mit $k.E$ wird wie nach Definition 2.3 eine elementare Menge bezeichnet.

Satz 6.1: \mathfrak{M} sei ein Inhaltsfeld. Dann und nur dann existiert ein Unterfeld $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ und ein $\geq(\mathfrak{M})$ -monotoner Inhalt Φ auf \mathfrak{L} , wenn aus $k.E \geq l.E(\mathfrak{M})$ folgt $k \geq l$.

Beweis: 1) Notwendigkeit der Bedingung: Wenn ein Unterfeld $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ von der verlangten Art existiert, so ist

$$k.E \in \mathfrak{L} \text{ und } \Phi(k.E) = k, \text{ ebenso}$$

$$l.E \in \mathfrak{L} \text{ und } \Phi(l.E) = l \text{ für jeden Inhalt } \Phi \text{ auf } \mathfrak{L}.$$

Ist nun Φ ein $\geq(\mathfrak{M})$ -monotoner Inhalt auf \mathfrak{L} , so folgt also aus $k.E \geq l.E(\mathfrak{M})$: $k \geq l$.

2) Die Bedingung ist hinreichend: Die Mengen von der Form $k.E$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) bilden das elementare Feld \mathfrak{E} und dieses ist Unterfeld von \mathfrak{M} . Ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt, so ist $\Phi(k.E) = k$ ein $\geq(\mathfrak{M})$ -monotoner Inhalt auf $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{M}$.

Satz 6.2: \mathfrak{M} sei ein Feld. Dann und nur dann existiert ein Unterfeld $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ und ein $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonotoner Inhalt Φ auf \mathfrak{L} , wenn aus $k.E \cup C \geq l.E \cup C(\mathfrak{M})$ ($C \in \mathfrak{M}$, $k.E \cap C = l.E \cap C = O$) folgt $k \geq l$.

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 6.1 und wird deshalb übergangen.

Satz 6.3: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Ein auf \mathfrak{L} definierter Inhalt läßt sich dann und nur dann auf \mathfrak{M} fortsetzen, wenn er $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton ist.

Beweis: 1) Die Notwendigkeit der Bedingung ist deshalb klar, weil nach der Bemerkung c) zu Definition 4.1 jeder auf \mathfrak{M} definierte Inhalt $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton ist.

2) Die Bedingung ist hinreichend. Ein auf \mathfrak{L} definierter $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonotoner Inhalt erscheint nämlich auf der Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$ von \mathfrak{M}^* als \mathfrak{M}^* -ergänzungsmonotone normierte Linearform (Sätze 4.2 und 4.3) $\varphi(x)$.

Demnach und nach Satz 3.14 ist für $L = \overline{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$, $M = \mathfrak{M}^*$ und $\varphi(x)$ die Voraussetzungsgruppe A (S. 212) erfüllt. Nach Satz 5.17 kann also $\varphi(x)$ als monotone Linearform auf \mathfrak{M}^* fortgesetzt werden. Dieser entspricht, da sie normiert ist, nach dem Korollar zu Satz 4.2 ein Inhalt auf \mathfrak{M} , der Fortsetzung des gegebenen Inhaltes auf \mathfrak{L} ist.

Satz 6.4: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} sei außerdem Mengenkörper. Ein auf \mathfrak{L} definierter Inhalt läßt sich dann und nur dann auf \mathfrak{M} fortsetzen, wenn er $\geq(\mathfrak{M})$ -monoton ist.

Beweis: Er verläuft analog zu dem des vorhergehenden Satzes. Statt der Voraussetzungsgruppe A ist nach Satz 3.15 für $L = \overline{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$ und $M = \mathfrak{M}^*$ die Voraussetzungsgruppe B erfüllt.

Korollar: Ein auf einem beliebigen Feld definierter Inhalt läßt sich dann und nur dann zu einem universellen Inhalt fortsetzen, wenn er zerlegungsmonoton ist.

Satz 6.5: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} sei außerdem Mengenkörper. Dann ist jeder auf \mathfrak{L} definierte $\geq(\mathfrak{M})$ -monotone Inhalt $\geq(\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton.

Beweis: Sätze 6.3 und 6.4.

Korollar: Ein auf irgendeinem Feld definierter zerlegungsmonotoner Inhalt ist ergänzungsmonoton.

Satz 6.6: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. \mathfrak{L} sei bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsfrei und \mathfrak{M} ein Mengenkörper. Ein auf \mathfrak{L} definierter Inhalt läßt sich dann und nur dann auf \mathfrak{M} fortsetzen, wenn er $\approx(\mathfrak{M})$ -invariant ist.

Beweis: Definition 4.2, Sätze 4.1 und 6.4.

Korollar: Ein auf einem zerlegungsfreien Feld definierter Inhalt läßt sich dann und nur dann zu einem universellen Inhalt fortsetzen, wenn er zerlegungs-invariant ist¹³⁾.

Satz 6.7: Auf einem Feld \mathfrak{M} existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn aus $k.E \cup C \geq l.E \cup C(\mathfrak{M})$ ($C \in \mathfrak{M}$, $k.E \cap C = l.E \cap C = O$) folgt $k \geq l$.

Beweis: Sätze 6.2 und 6.3.

Satz 6.8: Auf einem Feld \mathfrak{M} , das zugleich Mengenkörper ist, existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn

$$\text{aus } k.E \geq l.E(\mathfrak{M}) \quad \text{folgt } k \geq l.$$

Beweis: Sätze 6.1 und 6.4.

Korollar: Dann und nur dann existiert ein universeller Inhalt, wenn aus $k.E \geq l.E(\mathfrak{B})$ folgt $k \geq l$.

Satz 6.9: Notwendig und hinreichend dafür, daß bei gegebenem R, Γ, E überhaupt ein Inhaltssystem existiert, ist, daß aus

$$(6) \quad k.E \geq l.E \quad \text{folgt } k \geq l.$$

Beweis: 1) Notwendigkeit: Wenn ein Inhaltssystem existiert, so enthält sein Feld das elementare Feld. Auf diesem gilt für den Inhalt $\Phi: \Phi(k.E) = k$, $\Phi(l.E) = l$. Aus (6) und Postulat 2') folgt also $k \geq l$.

2) Die Bedingung ist hinreichend. Ist sie nämlich erfüllt, so ist $\Phi(k.E) = k$ ein Inhalt auf dem elementaren Feld.

¹³⁾ Vgl. Def. 4.1, 5) und Def. 4.2.

Bemerkung: Die Bedingung von Satz 6.9 ist keineswegs immer erfüllt. Beispielsweise existiert in der euklidischen Ebene eine Menge, die in zwei disjunkte, zu ihr selber kongruente Teilmengen zerlegt werden kann¹⁴⁾. Nimmt man diese Menge als Einheitsmenge, so ist natürlich die Bedingung des Satzes nicht erfüllt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß sie immer erfüllt ist, wenn die Gruppe Γ abelsch ist¹⁵⁾.

Man sieht leicht, daß die Bedingung von Satz 6.9 wie folgt formuliert werden kann:

$$\text{Aus } k.E \geq l.E(\mathfrak{E}) \text{ folgt } k \geq l.$$

Damit erscheint Satz 6.9 als Spezialfall von Satz 6.7, wenn man noch bedenkt, daß die Existenz irgendeines Inhaltssystems diejenige des elementaren Systemes zur Folge hat.

Satz 6.10: Wenn die Gruppe Γ abelsch ist, so existiert ein Inhaltssystem (nämlich in jedem Falle das elementare).

Beweis: Wir zeigen, daß die Bedingung von Satz 6.9 erfüllt ist. Mit $E(P)$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion von E , mit $k.E(P)$ diejenige von $k.E$. Aus $k.E \geq l.E$ folgt dann $k.E(P) \geq l.E(P)$ und daraus nach einem Existenzkriterium der Integrationstheorie $k \geq l$ ¹⁶⁾.

Satz 6.11: Wenn die Gruppe Γ abelsch ist, so existiert ein universelles Inhaltssystem.

Beweis: Mit der charakteristischen Funktion von E als Einheitsfunktion existiert ein universelles Integrationssystem¹⁷⁾. Sei A eine E -beschränkte Menge, $A(P)$ ihre charakteristische Funktion. Bezeichnen wir das Integral mit T , so ist $\Phi(A) = T(A(P))$ ein universeller Inhalt.

Satz 6.12: Wenn die Gruppe Γ abelsch ist, so ist der elementare Inhalt ergänzungsmonoton, also auch zerlegungsmonoton und zerlegungsinvariant¹⁸⁾.

Beweis: Nach Satz 6.11 existiert ein universeller Inhalt. Dieser ist Fortsetzung des elementaren Inhaltes, wonach die Behauptung aus Satz 6.3 folgt.

Definition 6.1: \mathfrak{Q} sei ein Inhaltsfeld. Die Menge der auf R definierten Funktionen

$$f(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k(P) \quad (\alpha_k \text{ reell, } A_k \in \mathfrak{Q} (k=1, \dots, n), A_k(P) \\ = \text{charakteristische Funktion von } A_k)$$

ist ein Integralfeld \mathfrak{F} . Wir nennen \mathfrak{F} das zu \mathfrak{Q} gehörige Integralfeld¹⁹⁾.

Satz 6.13: \mathfrak{Q} sei ein Inhaltsfeld und zugleich Mengenkörper, Φ ein Inhalt auf \mathfrak{Q} . Durch

$$(7) \quad T(f(P)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi(A_k)$$

ist auf dem zu \mathfrak{Q} gehörigen Integralfeld \mathfrak{F} ein Integral definiert.

¹⁴⁾ Vgl. [9].

¹⁵⁾ [7] Satz 5 (S. 316).

¹⁶⁾ siehe Anm. 15.

¹⁷⁾ [6], Seite 358.

¹⁸⁾ Vgl. Def. 4.1.

¹⁹⁾ [7] Def. 1 (S. 307).

Beweis: Ein Integral auf \mathfrak{F} ist definiert²⁰⁾ als eine Funktion, die 1. linear, 2. invariant gegenüber der Gruppe Γ , 3. normiert (d. h. $T(E(P)) = 1$), 4. monoton ist.

Daß die durch (7) definierte Funktion T die Eigenschaften 1.—3. hat, ist klar. Es bleibt zu zeigen, daß sie eindeutig bestimmt und monoton ist. Da die Eindeutigkeit unmittelbar aus der Monotonie folgt, ist nur die letztere nachzuweisen, d. h. es ist zu zeigen, daß

$$\text{aus } f(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k(P) \geq 0 \\ \text{folgt } T(f(P)) = \sum_k \alpha_k \Phi(A_k) \geq 0.$$

Dazu ordnen wir jedem Punkte $P \in B = \bigcup_{k=1}^n A_k$ die auf der Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ definierte Funktion

$$\vartheta_P(A_k) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } P \notin A_k \\ 1, & \text{wenn } P \in A_k \end{cases}$$

zu. Sodann unterteilen wir B in Klassen B_r nach der Äquivalenzrelation:

$$P \sim Q, \text{ wenn } \vartheta_P(A_k) = \vartheta_Q(A_k) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Statt $\vartheta_P(A_k)$ mit $P \in B_r$ schreiben wir dann auch $\vartheta_{B_r}(A_k)$. Es wird: $B_r \in \mathfrak{M}$ (da \mathfrak{M} ein Mengenkörper ist), $B_r \cap B_s = O$ ($r \neq s$) und $A_k = \bigcup_r {}^*B_r$, wo die Summation auf diejenigen B_r zu erstrecken ist, für die $\vartheta_{B_r}(A_k) = 1$ ist.

Auf B_r hat $f(P)$ den konstanten Wert $\sum_k {}^*\alpha_k$, wo die Summe über diejenigen Werte von k zu erstrecken ist, für die wiederum $\vartheta_{B_r}(A_k) = 1$ ist. Also wird:

$$T(f(P)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi(A_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_r {}^*\Phi(B_r) = \sum_r \Phi(B_r) \sum_k {}^*\alpha_k \geq 0$$

falls $f(P) \geq 0$ ist.

Satz 6.14: Wenn die Gruppe Γ abelsch ist, so läßt sich jeder auf einem Feld \mathfrak{L} , das zugleich Mengenkörper ist, definierte Inhalt zu einem universellen Inhalt fortsetzen.

Beweis: Man bilde das zu \mathfrak{L} gehörige Integralfeld \mathfrak{F} und auf diesem das Integral T gemäß Satz 6.13. Dieses Integral kann zu einem universellen Integral fortgesetzt werden²¹⁾. Wird dieses wieder mit T bezeichnet, so ist durch $\Phi(A) = T(A(P))$ ($A \in \mathfrak{B}$) ein universeller Inhalt definiert, der Fortsetzung des auf \mathfrak{L} gegebenen Inhaltes ist.

Korollar: Jeder auf einem Feld, das zugleich Mengenkörper ist, definierte Inhalt ist ergänzungsmonoton, wenn die Gruppe Γ abelsch ist. Damit ist er auch zerlegungsmonoton und zerlegungsinvariant.

²⁰⁾ [7] Def. 2 (S. 307).

²¹⁾ [8], Seite 358 und [11], Seite 61 (Satz 1). In diesen beiden Abhandlungen wird die Zerlegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes (s. u.) auf direktem Wege nachgewiesen.

Beispielsweise sind in den euklidischen Räumen der elementare Polyederinhalt und der LEBUESQUESCHE Inhalt *bezüglich der Translationsgruppe* zerlegungsinvariant.

Wenn die Gruppe Γ nicht abelsch ist, ist die Folgerung von Satz 6.14 nicht immer richtig, wie durch folgendes Beispiel belegt werden kann:

$R = 3$ -dim.euklidischer Raum, $\Gamma =$ seine Bewegungsgruppe, $E =$ dem Würfel $0 \leq x_k < 1$ ($k = 1, 2, 3$), $\mathfrak{L} =$ der Menge der Polyeder in R , $\Phi =$ der elementare Polyederinhalt. In diesem Fall läßt sich Φ nicht zu einem universellen Inhalt fortsetzen, da bekanntlich zwei Polyeder immer zerlegungsgleich sind²³).

Anhang zum 6. Teil.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die *Bedingung 2.2* erfüllt ist. Dadurch werden interessante Fälle ausgeschlossen (Beispiel: $R =$ Kugelfläche, $\Gamma =$ Drehungsgruppe, $E = R$). Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Resultate des 6. Teiles auf den allgemeineren Fall übertragen werden können, wo die Bedingung 2.2 nicht notwendigerweise erfüllt ist. Dies geschieht dadurch, daß R , Γ , E durch gewisse \widehat{R} , $\widehat{\Gamma}$, \widehat{E} ersetzt werden, für die die Bedingung 2.2 erfüllt ist.

Wir ersetzen:

R durch das direkte Produkt \widehat{R} von R mit der Menge Z der ganzen Zahlen: $R = R \times Z$, d. h. die Menge aller Paare (P, k) , wo $P \in R$, k eine ganze Zahl ist. Γ durch das direkte Produkt $\widehat{\Gamma}$ von Γ mit der additiven Gruppe G der ganzen Zahlen: $\widehat{\Gamma} = \Gamma \times G$.

Die Wirkung von $\widehat{\Gamma}$ auf \widehat{R} wird beschrieben durch

$$(\tau, n)(P, k) = (\tau P, k + n).$$

Schließlich wird E ersetzt durch die Menge $\widehat{E} \subset \widehat{R}$, die aus allen $(P, 0)$ mit $P \in E$ besteht.

Es ist offensichtlich, daß die Bedingung 2.2 für \widehat{R} , $\widehat{\Gamma}$, \widehat{E} immer erfüllt ist.

Jedem Inhaltsfeld \mathfrak{M} auf R ordnen wir das Feld $\widehat{\mathfrak{M}}$ auf \widehat{R} zu, das aus allen Mengen der Form

$\widehat{A} = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} (A_i, i)$ ($A_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), nur endlich viele A_i nicht leer) besteht.

Ist \mathfrak{M} Mengenring bzw. Mengenkörper, so hat $\widehat{\mathfrak{M}}$ dieselbe Eigenschaft.

Dem elementaren Feld auf R entspricht das elementare Feld auf \widehat{R} , ebenso entsprechen die universellen Felder einander.

Gilt für zwei Felder \mathfrak{L} , \mathfrak{M} auf R : $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$, so ist auch $\widehat{\mathfrak{L}} \subset \widehat{\mathfrak{M}}$.

Jedem Inhalt Φ auf \mathfrak{M} entspricht ein Inhalt $\widehat{\Phi}$ auf $\widehat{\mathfrak{M}}$ vermöge:

$$(8) \quad \widehat{\Phi}(\widehat{A}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Phi(A_i).$$

²³) [4], Seite 50.

Umgekehrt entspricht jedem Inhalt $\widehat{\Phi}$ auf $\widehat{\mathfrak{M}}$ ein Inhalt Φ auf \mathfrak{M} vermöge:

$$(9) \quad \Phi(A) = \widehat{\Phi}(A, 0).$$

Φ und $\widehat{\Phi}$ bestimmen einander auf umkehrbar eindeutige Weise. Dem elementaren Inhalt auf R (falls er existiert) entspricht der elementare Inhalt auf \widehat{R} . Ebenso entspricht jedem universellen Inhalt auf R ein ebensolcher auf \widehat{R} . Es gilt also:

Satz 6.15: Die Inhaltssysteme auf R bzw. \widehat{R} entsprechen einander vermöge der Beziehungen (8) und (9) in eindeutiger Weise. Auf einem Feld \mathfrak{M} existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn ein solcher auf $\widehat{\mathfrak{M}}$ existiert.

Auf Grund dieses Satzes erhält man aus Sätzen des 6. Teiles in entsprechender Numerierung folgende Theoreme:

Satz 6.3*: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Ein auf \mathfrak{L} definierter Inhalt Φ läßt sich dann und nur dann auf \mathfrak{M} fortsetzen, wenn $\widehat{\Phi} \geq (\mathfrak{M})$ -ergänzungsmonoton ist.

Satz 6.4*: \mathfrak{L} und \mathfrak{M} seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} sei zugleich Mengenkörper. Ein auf \mathfrak{L} definierter Inhalt Φ läßt sich dann und nur dann auf \mathfrak{M} fortsetzen, wenn $\widehat{\Phi} \geq (\mathfrak{M})$ -monoton ist.

Korollar: Ein auf einem beliebigen Feld definierter Inhalt Φ läßt sich dann und nur dann zu einem universellen Inhalt fortsetzen, wenn $\widehat{\Phi}$ zerlegungsmonoton ist.

Satz 6.7*: Auf einem Feld \mathfrak{M} existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn aus

$$k.\widehat{E} \cup \widehat{C} \geq l.\widehat{E} \cup \widehat{C}(\widehat{\mathfrak{M}}) \quad (\widehat{C} \in \widehat{\mathfrak{M}}, k.\widehat{E} \cap \widehat{C} = l.\widehat{E} \cap \widehat{C} = 0)$$

folgt $k \geq l$.

Satz 6.8*: Auf einem Feld \mathfrak{M} , das zugleich Mengenkörper ist, existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn aus

$$k.\widehat{E} \geq l.\widehat{E}(\widehat{\mathfrak{M}}) \quad \text{folgt } k \geq l.$$

Schließlich gelten die Sätze 6.9, 6.10, 6.11, 6.14 (ohne Korollar) wörtlich auch für den gegenwärtigen allgemeineren Fall.

7. Teil. Ein Beispiel.

In diesem letzten Teil sollen die wichtigsten Begriffsbildungen anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht werden. Durch dieses Beispiel werden gleichzeitig zwei Fragen beantwortet, die sich im Laufe der Untersuchung gestellt haben mögen:

1) Nach Bemerkung a) zu Definition 4.1 folgt die $\approx (\mathfrak{M})$ -Invarianz eines Inhalts aus seiner $\geq (\mathfrak{M})$ -Monotonie. Durch das folgende Beispiel wird bewiesen, daß das Umgekehrte nicht gilt.

2) Durch die Sätze 6.11 und 6.14 wurde gezeigt, daß bei abelscher Gruppe Γ jeder auf einem Feld, das zugleich Mengenkörper ist, definierte Inhalt zu einem universellen Inhalt fortgesetzt werden kann und daß dasselbe für den elementaren Inhalt gilt. Die Frage, ob dies für Inhalte auf beliebigen Feldern gilt, ist zu verneinen, wie ebenfalls das folgende Beispiel zeigen wird.

Beispiel. Wir setzen:

R = der Menge der reellen Zahlen,

Γ = der zur additiven Gruppe der reellen Zahlen gehörigen Translationsgruppe,

E = dem abgeschlossenen Intervall $\langle 0, 1 \rangle$.

Als Inhaltsfeld \mathfrak{M} führen wir den Mengenkörper ein, der von der Gesamtheit aller abgeschlossenen Intervalle und der Gesamtheit aller aus einem einzigen Punkt bestehenden Mengen erzeugt wird.

Eine Menge $A \subset R$ gehört dann und nur dann zu \mathfrak{M} , wenn sie durch Ausführung zweier Operationen der folgenden Art in eine Vereinigungsmenge A^+ von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen oder in die leere Menge verwandelt werden kann:

1) Hinzufügung von 0 oder endlich vielen nicht zu A gehörigen Punkten. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $d(A)$.

2) Wegnahme von 0 oder endlich vielen Punkten. Ihre Anzahl werde mit $i(A)$ bezeichnet.

Die Anzahl der abgeschlossenen Intervalle, aus denen A^+ sich zusammensetzt, ist durch A eindeutig bestimmt und sei mit $z(A)$ bezeichnet. Hingegen sind $d(A)$ und $i(A)$ nur bis auf eine gemeinsame additive Konstante bestimmt. Demnach ist die ganze Zahl

$$H(A) = -d(A) + i(A) + z(A)$$

durch die Menge A eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für die Summe der Längen der abgeschlossenen Intervalle, aus denen A^+ zusammengesetzt ist. Diese wird mit $L(A)$ bezeichnet.

Wir behaupten nun:

Zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{M}$ sind dann und nur dann bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsgleich, wenn

$$(10) \quad L(A) = L(B) \quad \text{und} \quad H(A) = H(B) \quad \text{ist.}$$

a) Die Bedingung ist notwendig. Man sieht nämlich leicht ein, daß bei der Zerlegung einer Menge $A \in \mathfrak{M}$ in zu \mathfrak{M} gehörige, paarweise disjunkte Teilmengen A_1, \dots, A_n gilt:

$$H(A) = \sum_{k=1}^n H(A_k), \quad L(A) = \sum_{k=1}^n L(A_k).$$

Ferner sind $H(A)$ und $L(A)$ invariant gegenüber der Gruppe Γ .

b) Die Bedingung ist hinreichend. Es sei nämlich für zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{M}$ die Bedingung (10) erfüllt. Bezeichnen wir mit $\{n\}$ eine Menge, die aus n Punkten besteht, so folgt:

1) Aus $L(A) = L(B) : A^+ \cup \{z(B)\} \approx B^+ \cup \{z(A)\}(\mathfrak{M})^{23}$.

2) Es ist $A \cup \{d(A)\} \approx A^+ \cup \{i(A)\}(\mathfrak{M})$ und die entsprechende Beziehung gilt für B .

²³⁾ Im folgenden ist vorausgesetzt, daß die zueinander addierten Mengen stets disjunkt sind.

3) Aus 1) und 2) folgt jetzt:

$$\begin{aligned} A \cup \{d(A) + z(B) + i(B)\} &\approx A^+ \cup \{i(A) + z(B) + i(B)\} \approx \\ &\approx B^+ \cup \{z(A) + i(A) + i(B)\} \approx B \cup \{d(B) + i(A) + z(A)\} (\mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Aus $H(A) = H(B)$ folgt also, daß A und B durch Hinzufügung derselben endlichen Zahl von Punkten bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsgleich werden. Man sieht leicht, daß daraus in unserem besonderen Fall die Zerlegungsgleichheit von A und B folgt.

Auf Grund dieses Resultates können wir nun leicht die Struktur der zu \mathfrak{M} gehörigen teilgeordneten Halbgruppe \mathfrak{M}^* überblicken²⁴⁾: \mathfrak{M}^* ist isomorph zur direkten Summe der additiven Halbgruppe der reellen Zahlen $L \geq 0$ und der additiven Gruppe der ganzen rationalen Zahlen H . Die Elemente von \mathfrak{M}^* können in der Form (L, H) bezeichnet werden, wobei

$$(L_1, H_1) + (L_2, H_2) = (L_1 + L_2, H_1 + H_2)$$

und $(L_1, H_1) \geq (L_2, H_2)$ dann und nur dann, wenn

$$(11) \quad \begin{aligned} &\text{entweder } L_1 > L_2 \\ &\text{oder } L_1 = L_2 \text{ und } H_1 \geq H_2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir das Unterfeld $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$, das erzeugt wird von allen abgeschlossenen Intervallen $\langle a, a+1 \rangle$ mit der Länge 1 und allen Mengen $\langle b // b+1 \rangle = E_x (b \leq x \leq b+1, x \neq b+1/2)$, die aus einem abgeschlossenen Intervall mit der Länge 1 durch Wegnehmen des Mittelpunktes entstehen.

\mathfrak{Q} besteht dann aus allen Vereinigungsmengen von 0 oder endlich vielen paarweise disjunkten Mengen der Formen $\langle a, a+1 \rangle$ und $\langle b // b+1 \rangle$.

Aus dem vorhergehenden allgemeinen Resultat folgt, daß zwei Mengen aus \mathfrak{Q} dann und nur dann bezüglich \mathfrak{M} zerlegungsgleich sind, wenn sie je gleichviele Intervalle der beiden Typen enthalten. (Das bedeutet, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{M})$ die Unterhalbgruppe von \mathfrak{M}^* ist, die aus allen (L, H) besteht, wo L eine ganze Zahl ≥ 0 und H eine ganze Zahl mit $0 \leq -H \leq L$ ist).

Setzen wir für eine Menge $A \in \mathfrak{Q}$:

$\Phi(A)$ = Anzahl der Mengen vom Typus $\langle a, a+1 \rangle$, die in A enthalten sind, so ist $\Phi(A)$ ein $\approx (M)$ -invarianter Inhalt auf \mathfrak{Q} . Hingegen ist Φ nicht $\geq (\mathfrak{M})$ -monoton. Denn es ist beispielsweise $\langle 0//1 \rangle \cup \langle 2//3 \rangle \geq \langle 0, 1 \rangle (\mathfrak{M})$ (indem man einen beliebigen Punkt von $\langle 2//3 \rangle$ (der als Menge Element von \mathfrak{M} ist) an die Stelle $1/2$ verschiebt, erhält man aus $\langle 0//1 \rangle \cup \langle 2//3 \rangle$ eine Menge, die $\langle 0, 1 \rangle$ überdeckt), aber

$$\Phi(\langle 0//1 \rangle \cup \langle 2//3 \rangle) = 0 < 1 = \Phi\langle 0, 1 \rangle.$$

Damit ist die erste der am Anfang des 7. Teiles gestellten Fragen beantwortet.

Aus Satz 6.4 folgt ferner, daß der Inhalt Φ nicht auf \mathfrak{M} und also erst recht nicht zu einem universellen Inhalt fortgesetzt werden kann, womit auch die Antwort auf die zweite Frage gegeben ist.

²⁴⁾ Auf Grund von Formel (11) sieht man leicht ein, daß im vorliegenden Falle die Relationen $\approx (\mathfrak{M})$ und $\sim (\mathfrak{M})$ identisch sind.

Literatur.

Eingeklammerte arabische Zahlen im Text [] sind Hinweise auf die entsprechende Nummer des Literaturverzeichnisses.

- [1] BANACH, ST.: Sur le problème de la mesure. Fund. Math. 4, 7—33 (1923). — [2] HAUSDORFF, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914. — [3] BANACH, ST., und A. TARSKI: Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fund. Math. 6, 244—277 (1924). — [4] HADWIGER, H.: Die Multikongruenz und der Satz von BANACH und TARSKI. Abh. Math. Seminar Hamburg 16, 48—53 (1949). — [5] TARSKI, A.: Algebraische Fassung des Maßproblems. Fund. Math. 31, 47—66 (1938). — [6] KIRSCH, A.: Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen. Math. Ann. 124, 343—363 (1952). — [7] HADWIGER, H., und W. NEF: Axiomatische Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Math. Z. 60, 305—319 (1954). — [8] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Comment. Math. Helvet. 28, 162—172 (1954). — [9] SIERPINSKI, W.: Sur la congruence des ensembles de points et ses généralisations. Comment. Math. Helvet 19, 215—226 (1947). — [10] HADWIGER, H.: Kolloquium über axiomatische Integrationstheorie im SS. 1951 in Bern. — [11] HADWIGER, H., und A. KIRSCH: Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit. Portugaliae Math. 11 57—67 (1952). — [12] HADWIGER, H.: Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum Comment. Math. Helv. 28, 119—148 (1954).

(Eingegangen am 18. März 1954.)

Zur Theorie der Spingruppen.

Von

FRIEDRICH L. BAUER in München.

§ 1. Einleitung.

1.1. Zur Problemstellung.

Die halbzahligen Darstellungen der orthogonalen Gruppe lassen sich, wie nach ihren topologischen Eigenschaften auch nicht anders zu erwarten ist, in keiner Weise durch Einschränkung von Darstellungen der linearen Gruppe im n -dimensionalen gewinnen. Damit erscheinen sie in der invariantentheoretischen Behandlung etwas am Rande. Einige der nachfolgend mitgeteilten Ergebnisse halten wir für geeignet erkennen zu lassen, daß den Spingruppen und damit auch den halbzahligen Darstellungen eine zentralere Stellung in der Theorie der klassischen Gruppen zukommt. Die halbzahligen Darstellungen treten bekanntlich gleichberechtigt neben die geläufigen ganzzahligen innerhalb der Invariantentheorie der Spingruppe und ihrer Substrate, für die wir den Namen Undoren verwenden, um Verwechslungen zu vermeiden. Von der Spingruppe und der Invariantentheorie der Undoren handelt die vorliegende Untersuchung.

1.2. Inhaltsübersicht.

Für das in § 2 genauer umrissene Problem, Art und Vielfachheit der irreduziblen Bestandteile eines mehrstufigen Undors anzugeben, wird ein Zugang erschlossen durch einen weitreichenden Satz (*Struktursatz*) über eine innere, als *Komplementarität* bezeichnete involutorische Beziehung zwischen je zwei Darstellungen orthogonaler Gruppen (§ 3). Die Aussagen des Struktursatzes, die auch für sich allein von praktischem Wert sind, geben darüber hinaus unmittelbar Aufschluß über die ausreduzierende Algebra der mehrstufigen Undoren (die jene Rolle spielt, die der Gruppenring der Permutationsgruppe bei mehrstufigen Tensoren einnimmt). Insbesondere ergibt sich explizit der Rang dieser Algebra und ihre Kennzeichnung durch die zugehörigen Invariantenbildungen. Die aufschlußreichen Einzelfälle $n = 3$ und $n = 5$ ermöglichen einen Vergleich mit einer von BRAUER angegebenen Algebra. Es ergibt sich auch in unserem Fall eine Darstellung durch ein Graphensystem, die übrigens auf eine in einem anderen Zusammenhang von RUMER durchgeführte Untersuchung zurückgeführt werden kann (§ 4). Ferner erhält man eine explizite Angabe des Ranges der einhüllenden Matrixalgebra des Undors N -ter Stufe (§ 5). Untersuchungen über die Gestalt der ausreduzierenden Operationen (§ 6) führen zu einer abschließenden Aufklärung der Komplementaritätsbeziehungen (§ 7). Dabei ergibt sich ein überraschender

Ausblick: die Deutung der Ergebnisse führt uns zur Definition und Untersuchung von verallgemeinerten symplektischen Invarianten *auch für den Fall ungeradzahligler Dimension*.

In einem Anhang ist ein entsprechender Struktursatz auch für gewisse Darstellungen der linearen Gruppe formuliert. Er ist invariantentheoretisch von geringerem Interesse, vermittelt aber einen Zusammenhang zwischen der Ausreduktion von Tensoren durch Spurbildung und dem Übergang von einer orthogonalen Gruppe geradzahligler Dimension zu ihrer Untergruppe unimodularer Transformationen von halber Dimensionszahl.

1.3. Bezeichnungen.

Die *spezielle (unimodulare) lineare Gruppe* der Dimension n sei als nSL bezeichnet, die *orthogonale Gruppe* der Dimension $n = 2\nu$ oder $n = 2\nu + 1$ sei als nO , die *symplektische* der Dimension $n = 2\nu$ als nSp bezeichnet. Im allgemeinen seien darunter die „unitär eingeschränkten“ Gruppen verstanden gemäß dem *unitarian trick* von WEYL¹⁾. Abgesehen vom Spiegelungsverhalten der Darstellungen der orthogonalen Gruppe werden Zusammenhangsverhältnisse und topologische Gesichtspunkte uns nicht beschäftigen; daher wird es uns meist gestattet sein, uns auf den „infinitesimalen Standpunkt“ zu stellen, mit anderen Worten unter nSL , nO , nSp auch die zugehörigen Lie-Algebren (infinitesimaler Transformationen) zu verstehen, ohne daß wir dies jeweils gesondert erwähnen müßten.

Die Darstellungen mit den CARTANSchen Gewichten²⁾ m_i werden wir als ${}^nSL(m_i)$, $i = 1, \dots, n$, als ${}^nO(m_i)$, $i = 1, \dots, \nu$ und als ${}^nSp(m_i)$, $i = 1, \dots, \nu$, bezeichnen³⁾. Nötigenfalls werden wir den Darstellungsgrad als Index rechts unten beifügen.

Bekanntlich sind bei der gewählten Bezeichnung für die nSL Darstellungen mit den Gewichten m_i und $m_i + \alpha$ als identisch anzusehen, wir werden aber die m_i stets ganzzahlig und im allgemeinen nicht-negativ schreiben. Ferner sind für die nSp die Gewichte stets ganzzahlig nicht-negativ, für die nO ebenfalls nicht-negativ und entweder sämtlich ganzzahlig oder sämtlich halbzahlig; letzteres soll heißen, daß sie die Hälfte ungerader Zahlen sind. Wir unterscheiden sinngemäß zwischen *ganzzahligen* und *halbzahligen* Darstellungen der orthogonalen Gruppe. Für eine Folge identischer Gewichtskomponenten wird wie üblich formale Potenzschreibweise angewandt, also zum Beispiel für ${}^nO(2111)$ auch ${}^nO(21^3)$; Nullen werden, wo keine Verwechslungen zu befürchten sind, auch oft unterdrückt.

Bekanntlich ergeben die der Einheit benachbarten Transformationen nur die mit ${}^nO^+$ bezeichnete *Drehungsgruppe*; einen Normalteiler vom Index 2 der

¹⁾ H. WEYL: Math. Z. **23**, 271 (1925); **24**, 328 (1925). — H. WEYL: The Classical Groups, their Invariants and Representations, Princeton 1938. Im folgenden kurz „Classical Groups“ genannt.

²⁾ E. CARTAN: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse Paris 1894.

³⁾ Einzelheiten bei der orthogonalen Gruppe siehe unten.

„vollen“ orthogonalen Gruppe. Es gibt außer im Falle $n = 2\nu$, $m_\nu \neq 0$ zwei inäquivalente, mit ${}^nO(m_i)$ und ${}^nO_\varepsilon(m_i)$ bezeichnete Darstellungen der vollen Gruppe, die in dieselbe Darstellung ${}^nO^+(m_i)$ der Drehungsgruppe zusammenfallen. Beide Darstellungen werden, wie üblich, zueinander assoziiert genannt; mit ${}^nO(m_i)$ ist diejenige gemeint, die spiegelungsinvariant (von der Parität 1) ist, die andere werde von der Parität ε genannt, wo ε die Transformationsdeterminante ist. Für geradzahlig Dimension $n = 2\nu$ heißt die irreduzible Darstellung ${}^nO(m_i)$ der vollen Gruppe mit $m_\nu \neq 0$ selbstassoziiert. Sie bricht bei Beschränkung auf die Drehungsgruppe ${}^nO^+$ in zwei irreduzible Hälften auseinander; diese Eigenschaft gilt auch für alle halbzahligen Darstellungen geradzahlig Dimension, wir bezeichnen diese im folgenden als *formal-selbstassoziiert*. Die beiden irreduziblen Hälften haben in der CARTANSchen Bezeichnung die Gewichtskomponenten $(m_1 \dots m_{\nu-1}, +m_\nu)$ und $(m_1 \dots m_{\nu-1}, -m_\nu)$, wir bezeichnen sie der Einfachheit halber mit ${}^nO^+(m_i^+)$ und ${}^nO^+(m_i^-)$, die zusammengesetzte Darstellung mit ${}^nO^+(m_i)$.

Zu jeder Darstellung der nSL , nO oder nSp gehört ein „invariantentheoretisches Substrat“, nämlich ein Darstellungsmodul, dessen Transformationsregel (wenn man von den halbzahligen Darstellungen der nO zunächst absieht) mit der eines Tensors zusammenfällt. Und zwar stimmt das Young-Tableau dieses Tensors bzw. die zugehörige Partition mit dem CARTANSchen Gewicht (m_i) überein. Darstellungen mit der Gewichtskomponente $m_1 = 1$ und allen übrigen $m_i = 0$ sind Vektordarstellungen oder Darstellungen der abstrakten Gruppe „durch sich (als konkrete Gruppe) selbst“.

Von den halbzahligen Darstellungen der orthogonalen Gruppe (sie besitzen bekanntlich kein tensorielles Substrat⁴⁾) ist die wichtigste die *Clifford-darstellung* vom Grad 2^n mit den Gewichten $m_i = \frac{1}{2}$, $i = 1 \dots \nu$, die wir mit ${}^nO(\Delta)$ bezeichnen.

Die lineare Hülle einer (reduziblen oder irreduziblen) Darstellung bezeichnen wir als die *einshüllende Matrixalgebra* dieser Darstellung. Sie ergibt sich auch als die (assoziative) Matrixalgebra, die von den Basiselementen einer Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra erzeugt wird. Die einshüllende Algebra der Clifford-Darstellung ist die *Clifford-Algebra*⁵⁾.

Das direkte Produkt zweier Darstellungen nennen wir eine *Verschmelzung*⁶⁾, die N -fache Verschmelzung einer Darstellung mit sich selbst bezeichnen wir mit N und nennen sie *Ausdehnung N -ter Stufe*⁷⁾.

Wir beziehen uns stets auf einen reellen, reell-abgeschlossenen, allenfalls durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ algebraisch abgeschlossenen Körper als Grundkörper.

⁴⁾ Siehe aber § 6.

⁵⁾ Spezialfälle für $n = 3$ und $n = 5$ sind bekanntlich die Pauli-Algebra und die Dirac-Algebra, die in der Quantentheorie eine Rolle spielen.

⁶⁾ Die Bezeichnung ist aus der Bildung $1 \times A + B \times 1$ mit den Darstellungen A, B der Lie-Algebra zu verstehen.

⁷⁾ In Anlehnung an GRASSMANNs „extensive Größen“.

§ 2. Spingruppen und ihre Invariantentheorie.

Bekanntlich ist die Vektordarstellung ${}^nSL(1)$ der linearen Gruppe eine primitive Erzeugende aller Darstellungen der nSL ; man erhält diese sämtlich durch Ausdehnung (der Bildung von Tensoren höherer Stufe entsprechend), die Vektordarstellung selbst aber kann durch keine echte Ausdehnung ($N > 1$) erhalten werden.

Demgegenüber ist die Vektordarstellung ${}^nO(1)$ der orthogonalen Gruppe weder vollständige Erzeugende noch primitiv; sie vermag keine halbzahligen Darstellungen zu erzeugen und ist andererseits in der zweistufigen Ausdehnung der Clifforddarstellung ${}^nO(\Delta)$ enthalten.

Die Clifforddarstellungen spielen dagegen in der orthogonalen Gruppe gerade die Rolle der primitiven Erzeugenden; ihre Primitivität geht aus der CARTANSchen Bestimmung aller Darstellungen hervor. Sofort einzusehen ist, daß man bei geradzahligem Verschmelzungsstufe ganzzahlige, bei ungeradzahligem halbzahlige Darstellungen erhält; daß man wirklich alle Darstellungen der orthogonalen Gruppe so bekommt, wird sich in dieser Arbeit nebenbei in unmittelbarer Weise erneut ergeben.

Entsprechend dem Grad $\varrho = 2^r$ der Clifforddarstellung ${}^nO(\Delta)_\varrho$ ist der zugehörige Darstellungsmodul ϱ -gliedrig. Der N -fachen Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\varrho^N$ entspricht die Bildung einer N -stufigen extensiven Größe der Dimension ϱ . Diese invariantentheoretisch legitime Bildung könnte als Tensor bezeichnet werden; um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir die BELINFANTESche Bezeichnung „Undor“^{*)}, die zunächst auf den eigentümlichen Zusammenhang des Transformationsverhaltens der ϱ Komponenten mit dem eines „gewöhnlichen Vektors“ hinweisen soll.

Der Zerfallung der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\varrho^N$ in irreduzible Bestandteile entspricht die Zerfallung ihres Substrats, des allgemeinen Undors N -ter Stufe im ϱ -Dimensionalen, in irreduzible Undoren. Hier soll mit der Bezeichnung Undor gerade auch die typische Art dieser Ausreduktion angedeutet werden, die (siehe unten) über die Zerfallung eines Tensors hinausgeht.

Man kann auch den Sachverhalt so sehen, daß man die Darstellung ${}^nO(\Delta)$ als Selbstdarstellung einer gewissen ϱ -dimensionalen Gruppe linearer Transformationen ($\varrho = 2^r$) ansieht, die man als Spingruppe ${}^eSpin^*)$ bezeichnet. Sie ist somit definiert durch die Isomorphie ${}^nO(\Delta) \cong {}^eSpin(1)^{10)}$. Dann handelt es sich darum, die Ausdehnung ${}^eSpin(1)_\varrho^N$ zu betrachten, eine Schreibweise, die stärker daran erinnert, daß man als Substrat den allgemeinen Undor N -ter Stufe im ϱ -dimensionalen erhält. Insbesondere macht diese Schreibweise deutlich, daß die Zerfallung des allgemeinen Undors zunächst min-

*) F. J. BELINFANTE: *Physica* 6, 887 (1939). Die Bezeichnung „Spinor“ wird landläufig mit dem Spezialfall $n = 4$ und einigen damit zusammenhängenden Eigentümlichkeiten (Verwendung punktierter und unpunktierter Indizes) bereits zu sehr identifiziert.

*) Über die topologische Seite dieses Zusammenhanges vgl. C. CHEVALLEY: *Theory of Lie Groups I*. Princeton 1946, p. 65.

¹⁰⁾ Wir verzichten in dieser Schreibweise darauf, den (aus dem Zusammenhang stets ersichtlichen) Unterschied zwischen $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$ anzudeuten.

destens durch Symmetriebedingungen geschieht; die ausreduzierende Algebra enthält den Gruppenring der Permutationsgruppe \mathfrak{S}_N . Denn offensichtlich ist ${}^e\text{Spin}$ als Gruppe gewisser linearer unimodularer Transformationen im g -dimensionalen eine Untergruppe von ${}^e\text{SL}$. Da sie aber, wie aus einer Abzählung ihrer Parameter sofort hervorgeht, von trivialen Ausnahmen abgesehen, eine echte Untergruppe ist, tritt im allgemeinen auch eine weitere Reduktionsmöglichkeit des symmetrisierten Undors ein. Es gilt, diese zu bestimmen, also Art und Vielfachheit der irreduziblen Bestandteile des N -stufigen Undors anzugeben, sowie die zerfallenden Operationen zu kennzeichnen. Damit handelt es sich um invariantentheoretische Fragen im Rahmen der Spingruppe. Es wird sich zeigen, daß die Aufgabe dem Wesen nach komplizierter ist als etwa die weitere Ausreduktion von ${}^nO(1)_N^N$ oder ${}^nSp(1)_N^N$ durch Spur- bzw. Schiefspurbedingungen. Ein überraschender Zugang wird sich in § 3 ergeben.

§ 3. Der allgemeine Struktursatz für die Spingruppen.

3.1. Definition der komplementären Darstellung.

Wir definieren:

Die N -komplementäre Darstellung zu einer Darstellung ${}^nO(m_1 m_2 \dots m_r)$ der orthogonalen Gruppe ist die Darstellung

$$\begin{aligned} {}^nO\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\alpha_2} \dots 1^{x_{r-1}} 0^{x_r}\right) & \quad \text{für } n = 2\nu \\ {}^nO\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha_{r-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_r}\right) & \quad \text{für } n = 2\nu + 1 \end{aligned}$$

der N -dimensionalen orthogonalen Gruppe, wo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{N}{2} - m_1 \\ \alpha_i &= m_i - m_{i+1} & \text{für } i = 1 \dots \nu - 1 \\ \alpha_r &= \begin{cases} m_r & \text{falls } N \text{ gerade} \\ m_r - \frac{1}{2} & \text{falls } N \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

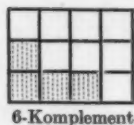
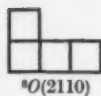
wenn diese Bildung sinnvoll ist, d. h. wenn $\alpha_0 = \frac{N}{2} - m_1$ eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Wir bezeichnen dieses N -Komplement gelegentlich kurz als $\overline{{}^nO(m)}^N$. Die Komplementierung ist besonders einfach durchzuführen an dem zu einer Darstellung gehörigen Young-Tableau. Man setze das Young-Tableau in die linke untere Ecke eines Rechtecks mit den Seitenlängen $\frac{n}{2}$ in der Horizontalen, $\frac{N}{2}$ in der Vertikalen. Das geometrische Komplement liefert dann, vertikal von rechts nach links gelesen, das Tableau des N -Komplements. Man hat dabei für halbzahlige Darstellungen formal auch halbzahlige Stufenhöhen in den Tableaus anzusetzen, eine Maßnahme, deren invariantentheoretische Deutung vorerst nicht untersucht werden soll (vgl. dafür § 6).

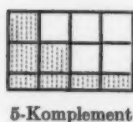
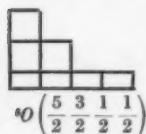
Das Verfahren ist in Tab. 1 an Beispielen erläutert:

Tabelle 1. Beispiele komplementärer Darstellungen.

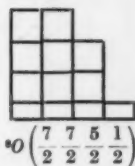
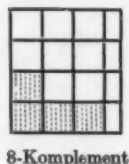
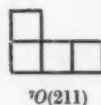
1) n gerade, N gerade



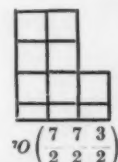
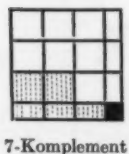
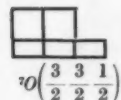
2) n gerade, N ungerade



3) n ungerade, N gerade



4) n ungerade, N ungerade



Zu beachten ist, daß für n ungerade, N ungerade bei dieser bildlichen Veranschaulichung ein Viertelquadrat wegfällt.

Offensichtlich ist, wenn ${}^nO(m)^N = {}^NO(m')$; auch ${}^NO(m')^n = {}^nO(m)$.

Die Komplementierung ist also bei festem n, N eine involutorische Operation.

3.2. Teilbarkeit des Grades halbzahlgiger Darstellungen.

Der Grad einer ganzzahligen oder halbzahligen Darstellung der orthogonalen Gruppe geht aus den Formeln von WEYL¹¹⁾ explizit hervor. Für halbzahlige Darstellungen bezeichnen wir als *reduzierten Grad* den Grad der Darstellung, dividiert durch 2^n , also $\frac{N[{}^nO(m)]}{N[{}^nO(\triangle)]}$ ¹²⁾. Der reduzierte Grad ist

¹¹⁾ H. WEYL: Math. Z. **24**, p. 349 (1925).

¹²⁾ $N[\dots]$ bezeichnet den Grad der betreffenden Darstellung.

stets eine ganze Zahl. Dies wird sich in § 3 beim Beweis des dortigen Satzes von selbst ergeben. Es geht auch aus einem Satz über Beziehungen zwischen den Charakteristiken der orthogonalen und der symplektischen Gruppe hervor. Wir werden darauf in § 6.2 zurückkommen.

Mit diesen Vorbereitungen können wir den Struktursatz für die Spingruppen formulieren.

3.3 Der allgemeine Struktursatz.

Satz I (Struktursatz): In der Ausdehnung ${}^N O(\Delta)_\infty^N$ tritt die irreduzible Darstellung ${}^N O(m)$ so oft auf, wie der Grad (für $n = 2\nu$) bzw. der reduzierte Grad (für $n = 2\nu + 1$) der N -komplementären Darstellung $\overline{{}^N O(m)}^N$ angibt¹³⁾.

Zusatz 1: Eine Darstellung ${}^N O(m)$ tritt nicht auf, wenn $\overline{{}^N O(m)}^N$ nicht definiert ist oder, wie wir nun sagen wollen, nicht existiert.

Zusatz 2: Bei der Abzählung wird zwischen zwei assoziierten Darstellungen nicht unterschieden. Für $n = 2\nu$ treten, wenn ${}^N O(m)$ nicht selbstassoziiert (auch formal) ist, ${}^N O \varepsilon(m)$ und ${}^N O(m)$ gleich oft, jede also mit der halben angegebenen Anzahl auf.

Zusatz 1 allein ist unmittelbar einzusehen: Nach dem Cartan-Kalkül ist das höchste auftretende Gewicht $\left(\frac{N}{2} \frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}\right)$. Für alle auftretenden Darstellungen ist also das N -Komplement definiert. Satz I behauptet aber auch, daß alle Darstellungen wirklich mindestens einmal auftreten, deren Tableaus in das zur anschaulichen Definition der Komplementierung benutzte $\frac{n}{2} \times \frac{N}{2}$ -Rechteck eingefügt werden können, denn dann ist ein N -Komplement definiert, dessen Grad mindestens Eins ist.

Vertauscht man in Satz I N mit n , so ergibt sich: In ${}^N O(\Delta)_\infty^n$ tritt ${}^N O(m')$ so oft auf, als der (u. U. reduzierte) Grad von $\overline{{}^N O(m')}^n = {}^N O(m)$ angibt. Das bedeutet nach der involutorischen Eigenschaft der Komplementierung, daß das in Satz I vorkommende N -Komplement $\overline{{}^N O(m)}^N$ so oft in der Ausdehnung ${}^N O(\Delta)_\infty^n$ vorkommt, als der Grad von ${}^N O(m)$ angibt. Man hat also die Fassung Ia des Satzes I:

Satz Ia: Ordnet man die in den Ausdehnungen ${}^N O(\Delta)_\infty^N$ und ${}^N O(\Delta)_\infty^n$ zueinander assoziierten einander gegenseitig durch Komplementierung zu, so gibt jeweils der (u. U. reduzierte) Grad einer Darstellung die Vielfachheit des Auftretens der anderen an und umgekehrt.

Wir sagen auch, die beiden Ausdehnungen sind zueinander paarweise komplementär.

Zusatz 2a: Insbesondere ist offensichtlich für $n = 2\nu$ und N gerade zwei zueinander assoziierten einander selbstassoziierte (bzw. deren beide Hälften bei Beschränkung auf die Drehungsgruppe) zuzuordnen und umgekehrt.

Aus der Fassung Ia heraus läßt sich der Weg für einen Induktionsbeweis skizzieren. Induktionsannahme: Der Satz sei richtig für n und $N - 1$, ${}^N O(\Delta)_\infty^{N-1}$ und ${}^{N-1} O(\Delta)_\infty^n$ seien nach Maßgabe des Satzes einander zugeordnet. Dann

¹³⁾ Vorläufige Mitteilung in C. r. Acad. Sci. (Paris) 234, 1743 (1952).

betrachte man die bei der Verschmelzung ${}^nO(\Delta) \times {}^{N-1}O(\Delta)$ auftretenden Darstellungen. Man wird versuchen zu zeigen, daß bei dieser Verschmelzung eine bestimmte Darstellung ${}^nO(m)$ gerade aus soviel und solchen verschiedenen Darstellungen ${}^nO(m') \in {}^nO(\Delta) \times {}^{N-1}O(\Delta)$ entsteht, wie die komplementäre ${}^n\overline{O(m)}^N = {}^{N-1}\overline{O(m')}^N$ in entsprechende Darstellungen ${}^{N-1}\overline{O(m')}^N = \overline{O(m')}^{N-1}$ zerfällt. Dann entspricht die Addition der Vielfachheiten der Addition der Darstellungsgrade, der Satz gilt also für n und N .

Tabelle 2. Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\times^N$.

Bestandteile ${}^nO(\Delta)_\times^N$	Vielfachheiten des Auftretens						N -Komplemente				
	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
${}^nO(00)_1$	1	3	14				${}^nO\left(\frac{5}{2}\right)_2$	${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)_{12}$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)_{112}$	
$\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_4$	1	3	14				${}^nO\left(\frac{5}{2}\right)_6$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)_{56}$		
$(10)_5$	1	5	30				${}^nO\left(\frac{3}{2}\right)_2$	${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)_{20}$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)_{210}$	
$(11)_{10}$	1	6	40				${}^nO\left(\frac{1}{2}\right)_2$	${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)_{24}$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)_{320}$	
$\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)_{16}$	—	2	16				${}^nO\left(\frac{3}{2}\right)_4$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)_{64}$		
$\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_{20}$	—	1	10				${}^nO\left(\frac{1}{2}\right)_2$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)_{40}$		
$(20)_{14}$	—	2	21					${}^nO\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_6$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_{168}$	
$(21)_{25}$	—	3	35					${}^nO\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)_{12}$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)_{280}$	
$(22)_{25}$	—	1	15					${}^nO\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_4$		${}^nO\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_{120}$	
$\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)_{40}$	—	—	5						${}^nO\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_{20}$		
$\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)_{64}$	—	—	4						${}^nO\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)_{16}$		
$\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)_{56}$	—	—	1						${}^nO\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_4$		
$(30)_{30}$	—	—	5							${}^nO\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_{40}$	
usw.										usw.	
.										.	
.										.	

Wird aber etwa gezeigt, daß er für $n=3$ und $N=2$ gilt, so gilt er für $n=3$ und beliebiges N , durch Vertauschung von n und N also auch für beliebiges n und $N=3$, somit schließlich in voller Allgemeinheit.

Bevor wir zum Beweis übergehen, sollen einige Beispiele angeführt werden.

3.4. Beispiele.

Wir betrachten zunächst die in der Ausdehnung ${}^sO(\Delta)_r^N$ enthaltenen Darstellungen der sO , in lexikographischer Ordnung und deren jeweilige N -Komplemente mit angehängtem Darstellungsgrad (Tab. 2).

Die Vielfachheiten des Auftretens werden durch die reduzierten Grade gegeben.

Tabelle 3. Ausdehnung ${}^sO(\Delta)^4$.

Vielfachheit für $n = 2r$		${}^sO(\Delta)_2^4$	${}^sO(\Delta)_3^4$	${}^sO(\Delta)_4^4$	${}^sO(\Delta)_5^4$	${}^sO(\Delta)_6^4$	${}^sO(\Delta)_7^4$	${}^sO(\Delta)_8^4$	Vielfachheit für $n = 2r + 1$
${}^sO(00)_1$	1	(2) ₂	(2) ₃	(22) ₁₀	(22) ₃₅	(222) ₇₀	(222) ₂₀₁	(2222) ₃₅₄	1 ${}^sO\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_4$
(10) ₄	4	(1) ₂	(1) ₃	(21) ₁₆	(21) ₃₅	(221) ₁₄₀	(221) ₃₇₈	(2221) ₆₇₂	3 $\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)_{12}$
(11) ₆	3+3	(0) ₁	(0) ₁	(20) ₉	(20) ₁₄	(220) ₈₄	(220) ₁₈₈	(2220) ₈₄₀	2 $\left(\frac{3}{2} \frac{3}{2}\right)_8$
(20) ₉	9			(11) ₆	(11) ₁₀	(211) ₉₀	(211) ₁₈₉	(2211) ₅₆₇	6 $\left(\frac{5}{2} \frac{1}{2}\right)_{24}$
(21) ₁₆	8+8			(10) ₄	(10) ₅	(210) ₆₄	(210) ₁₀₅	(2210) ₈₄₀	5 $\left(\frac{5}{2} \frac{3}{2}\right)_{20}$
(22) ₁₀	5+5			(00) ₁	(00) ₁	(200) ₃₀	(200) ₂₇	(2200) ₃₀₀	3 $\left(\frac{5}{2} \frac{5}{2}\right)_{12}$
(30) ₁₆	16					(111) ₃₀	(111) ₃₅	(2111) ₃₃₁	10 $\left(\frac{7}{2} \frac{1}{2}\right)_{40}$
(31) ₂₀	15+15					(110) ₁₅	(110) ₃₁	(2110) ₃₃₀	9 $\left(\frac{7}{2} \frac{3}{2}\right)_{36}$
(32) ₂₄	12+12					(100) ₆	(100) ₇	(2100) ₁₀₀	7 $\left(\frac{7}{2} \frac{5}{2}\right)_{28}$
(33) ₁₄	7+7					(000) ₁	(000) ₁	(2000) ₃₅	4 $\left(\frac{7}{2} \frac{7}{2}\right)_{16}$
(40) ₂₅	25							(1111) ₃₅	
(41) ₄₀	24+24							(1110) ₅₆	
(42) ₄₈	21+21							(1100) ₃₃	
(43) ₃₃	16+16							(1000) ₈	
(44) ₁₃	9+9							(0000) ₁	

Man beachte die von der Definition der N -Komplemente herrührende Gesetzmäßigkeit: In jeder zweiten Spalte wird das Gewicht der Darstellung von vorne durch $\frac{n}{2} = \frac{5}{2}$ ergänzt.

Für festes N empfiehlt sich eine andere Anordnung, z. B. für $N = 4$ in Tab. 3.

Hier ist wiederum die Gesetzmäßigkeit, daß in jeder zweiten Spalte das Gewicht von vorne durch $\frac{N}{2} = 2$ ergänzt wird, zu beachten. Der Umstand, daß für jede neue Dimension immer nur wenige Vielfachheiten neu zu berechnen sind, erhöht die praktische Brauchbarkeit. Wir greifen noch den Fall ${}^4O(\Delta)_n^1$ heraus. Hier fällt ${}^nO(\Delta)_n^1$ mit ${}^N O(\Delta)_n^1$ zusammen. Ganz allgemein sind je zwei Darstellungen in ${}^nO(\Delta)_n^1$ zueinander komplementär, die Gradzahl der einen gibt die Vielfachheit der anderen; speziell für $n = N$ gerade ist zu zwei assoziierten eine selbstassoziierte Darstellung komplementär und umgekehrt.

3.5 Beweis des Struktursatzes.

a) Zum Beweis benötigen wir den Verschmelzungssatz für die Clifforddarstellung der orthogonalen Gruppe, der angibt, welche Darstellungen bei der Verschmelzung ${}^nO(m) \times {}^nO(\Delta)$ auftreten, sowie den Verzweigungssatz für die orthogonale Gruppe, der angibt, welche Darstellungen der ${}^{N-1}O$ aus einer Darstellung ${}^N O(m)$ bei Dimensionserniedrigung (bei Beschränkung auf die Untergruppe) entstehen.

Ein Verschmelzungssatz für die orthogonale Gruppe in sehr allgemeiner Form wurde von WEYL¹⁴⁾ angegeben. Für die Verschmelzung mit einer Clifforddarstellung erhält man daraus¹⁵⁾ einen Verschmelzungssatz für die Clifforddarstellung.

Verschmelzungssatz für die Clifforddarstellung:

$${}^nO(m_1 m_2 \dots m_r) \times {}^nO(\Delta) = \sum {}^nO\left(m_1 \pm \frac{1}{2}, m_2 \pm \frac{1}{2}, \dots, m_r \pm \frac{1}{2}\right),$$

wo alle Vorzeichenkombinationen zulässig sind, die keine gegen die Bedingung einer nicht-aufsteigenden Reihenfolge verstoßenden Gewichtskomponenten ergeben. Jede solche Darstellung oder ihre assoziierte tritt genau einmal auf, außer im Fall $n = 2\nu$ für halbzahlige (also formal-selbstassoziierte) Ausgangsdarstellungen, wo mit jeder Darstellung, die nicht selbstassoziiert ist, auch ihre assoziierte vorkommt.

In der zuletzt zitierten Arbeit findet sich auch der

Verzweigungssatz für die orthogonale Gruppe:

$${}^N O(m_1 m_2 \dots m_r) = \begin{cases} \sum {}^{N-1}O(m'_1 m'_2 \dots m'_r) & \text{für } N = 2\nu + 1 \geq 3 \\ \sum {}^{N-1}O(m'_1 m'_2 \dots m'_{r-1}) & \text{für } N = 2\nu \geq 4, \end{cases}$$

wo die Gewichtskomponenten m'_i den Bedingungen

$$m_x \geq m'_x \geq m_{x+1} \quad \chi = 1 \dots \nu - 1$$

sowie

$$m_r \geq m'_r \geq 0 \quad \text{falls } N = 2\nu + 1$$

genügen.

Jede solche Darstellung tritt genau einmal auf, außer im Fall $N = 2\nu$ für selbstassoziierte (auch formal-selbstassoziierte) Ausgangsdarstellungen, wo mit jeder den Bedingungen genügenden Darstellung auch ihre assoziierte auftritt.

¹⁴⁾ Classical Groups, p. 231.

¹⁵⁾ F. L. BAUER: Sitzgsber. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1952, 111.

b) Wir sehen zunächst von den mit dem Spiegelungsverhalten zusammenhängenden Bemerkungen ab. Nach der Induktionsannahme des Satzes hat man dann folgenden Sachverhalt:

Die Ausdehnung ${}^nO(\Delta) \times^{N-1}$ enthält nur solche Darstellungen ${}^nO(m')$, für die $m_i \leq \frac{N-1}{2}$. Die in Frage stehende Darstellung ${}^nO(m)$ entsteht bei der Verschmelzung ${}^nO(\Delta) \times^{N-1} \times {}^nO(\Delta)$ gerade aus denjenigen Darstellungen ${}^nO(m') \in {}^nO(\Delta) \times^{N-1}$, für die $m_i = m'_i \pm \frac{1}{2}$ und nun noch $m_i \leq \frac{N-1}{2}$ ist, sowie natürlich die Bedingung der nicht-aufsteigenden Reihenfolge gilt.

Diese Bedingungen sind aber gewissermaßen „komplementär“ zu denjenigen des Verzweigungssatzes. Wir werden zeigen: Wenn gewisse ${}^{N-1}O(\bar{m}')$ die Bedingungen des Verzweigungssatzes erfüllen, so genügen die Komplemente $\overline{{}^{N-1}O(\bar{m}')} = {}^nO(m')$ den obigen Bedingungen.

Eine Darstellung ${}^nO(\bar{m}) = \overline{{}^nO(m)}$ zerfalle also in gewisse ${}^{N-1}O(\bar{m}')$. Das Komplement $\overline{{}^{N-1}O(\bar{m}')} = {}^nO(m')$ ist dann nach Definition

$${}^nO\left(\underbrace{\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}}_{\frac{n}{2} - \bar{m}'_1}, \underbrace{\frac{N-3}{2}, \frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-3}{2}}_{\bar{m}'_1 - \bar{m}'_2}, \dots, \underbrace{\frac{N-5}{2}, \frac{N-5}{2}, \dots, \frac{N-5}{2}}_{\bar{m}'_2 - \bar{m}'_3}, \underbrace{\frac{N-7}{2}, \dots, \dots}_{\dots}\right).$$

Offenbar hängt die Lage der ersten „Stufe“ $\frac{N-1}{2}, \frac{N-3}{2}$ nur von \bar{m}'_1 ab, desgleichen die Lage der zweiten, $\frac{N-3}{2}, \frac{N-5}{2}$ nur von \bar{m}'_2 , usw. Variiert nun \bar{m}'_i unter den Bedingungen des Verzweigungssatzes, $\bar{m}_i \geq \bar{m}'_i \geq \bar{m}_{i+1}$, so heißt das, daß die ϱ -te Stufe zwischen der ϱ -ten und der $(\varrho+1)$ -ten Stufe von

$$\begin{aligned} {}^nO(m) &= \overline{{}^nO(\bar{m})} \\ &= {}^nO\left(\underbrace{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}}_{\frac{n}{2} - \bar{m}_1}, \underbrace{\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{N}{2} - 1}_{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}, \underbrace{\frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} - 2, \dots, \frac{N}{2} - 2}_{\bar{m}_2 - \bar{m}_3}, \dots\right) \end{aligned}$$

variiert. Eine Verschiebung der ϱ -ten Stufe über irgendeine Gewichtskomponente hinweg bedeutet aber, daß diese die Werte $\frac{N}{2} - \varrho \pm \frac{1}{2}$ annimmt. Man sieht unmittelbar, daß ${}^nO(m')$ damit gerade den obigen Bedingungen genügt, die diejenigen Darstellungen kennzeichnen, die zu ${}^nO(m)$ beitragen, und zwar trifft diese Korrespondenz zwischen Verzweigung und Undorverschmelzung auch gerade im Hinblick auf die verfeinernden Bemerkungen über das Spiegelungsverhalten zu. Für ungerades $n = 2\varrho + 1$ ist lediglich noch zu bemerken,

daß hier der Verschmelzung einer halbzahigen Darstellung mit ${}^nO(\Delta)$ das paarweise Auftreten entsprechender Darstellungen bei der Verzweigung entspricht. Während sich für $n = 2 \nu$ die Vielfachheiten des Auftretens durch die Summe der Grade der verzweigten Darstellungen ergeben, ist also für ungerades $n = 2 \nu + 1$ jeweils für $N = 2, 4, 6, \dots$ der Darstellungsgrad von ${}^N O(\overline{m})$ durch 2 zu dividieren, insgesamt also durch den Grad von ${}^N O(\Delta)$. Man erhält also hier die Vielfachheiten gleich dem reduzierten Grad, w.z.b.w.

c) Es fehlt noch der Beweis, daß der Struktursatz für $N = 2$ richtig ist. Da der Verzweigungssatz bis zur Verzweigung ${}^3O \rightarrow {}^2O$ gilt, würde es an sich genügen, den Struktursatz etwa für $n = 3$, $N = 2$ nachzuweisen. Jedoch folgt aus dem Verschmelzungssatz für beliebiges n und $N = 2$ sofort¹⁶⁾:

$$(1) \quad {}^nO(\Delta)_x^2 = \begin{cases} {}^nO(0) + \varepsilon(1) + (1^2) + \varepsilon(1^3) + \dots + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} (1^\nu) & \text{für } n = 2 \nu + 1 \\ {}^nO(0) + (1) + (1^2) + \dots + (1^{\nu-1}) + \varepsilon(0) + \varepsilon(1) + \varepsilon(1^2) + \dots + \varepsilon(1^{\nu-1}) + (1^\nu) & \text{für } n = 2 \nu \end{cases}$$

Im ersteren Fall sind die zugehörigen 2-Komplemente der Reihe nach

$${}^2O\left(\frac{n}{2}\right), {}^2O\left(\frac{n}{2} - 1\right), \dots, {}^2O\left(\frac{3}{2}\right), {}^2O\left(\frac{1}{2}\right);$$

sie sind sämtlich vom Grad 2 und vom reduzierten Grad 1. Im letzteren Fall sind die zugehörigen 2-Komplemente der Reihe nach

$${}^2O\left(\frac{n}{2}\right), \dots, {}^2O(1), {}^2O(0);$$

sie sind vom Grad 2 bis auf die letzte, die vom Grad 1 ist, w.z.b.w.

d) Durch die Aufdeckung der Komplementarität zwischen Underverschmelzung und Verzweigung bei der Spingruppe ist ein für praktische Anwendungen wichtiger Schritt getan, der mit dem Struktursatz zur Aufzählung aller in einem allgemeinen Under enthaltenen irreduziblen Bestandteile unter expliziter Angabe der Vielfachheit ihres Auftretens führt. Es brauchte dazu nicht auf die ausreduzierende Algebra selbst zurückgegriffen zu werden. Diese soll vielmehr im nächsten Abschnitt untersucht werden.

§ 4. Die ausreduzierende Algebra mehrstufigen Underen.

4.1. Die ausreduzierende Algebra als Kommutatorialgebra der Ausdehnung.

Zur Untersuchung der ausreduzierenden Algebra der mehrstufigen Under knüpfen wir (zunächst) direkt am Struktursatz an. Damit wird sich auch der Schlüssel zum funktionellen Verständnis dieses bisher formal erscheinenden Ergebnisses finden.

Nach der Auffassung von WEYL und BRAUER¹⁷⁾ ist die ausreduzierende Algebra einer vollreduziblen Darstellung, speziell einer Verschmelzung oder

¹⁶⁾ Für die Zuordnung der Paritäten vgl. R. BRAUER und H. WEYL: Amer. J. of Math. 57, 425 (1935).

¹⁷⁾ Classical Groups, p. 137.

Ausdehnung, nichts anderes als die Kommutatoralgebra dieser Darstellung. Dies beruht auf einem fundamentalen Satz der Algebrentheorie, der eine unmittelbare Folge des SCHURSchen Lemmas ist und den wir in folgender Fassung zugrunde legen¹⁸⁾.

Sei Q eine Menge von Elementen (in concreto Matrizen), die, falls sie nicht eine Halbgruppe ist, durch Bildung aller endlichen (Matrix-)Produkte zu einer solchen gemacht werde. Die lineare Hülle dieser Halbgruppe werde als einhüllende Algebra \bar{Q} von Q bezeichnet. Die Menge aller Matrizen $\mathfrak{P} \in P$, die mit jedem Element $\mathfrak{Q} \in Q$ vertauschbar sind, ist gegen Hüllenbildung abgeschlossen, also eine Algebra, und wird als Kommutatoralgebra $P = \bar{P}$ von Q bezeichnet.

Satz von BRAUER und WEYL:

Die Kommutatoralgebra $B = \bar{B}$ einer Menge A vollreduzierbarer Matrizen ist selbst vollreduzibel. Ihre Kommutatoralgebra ist ihrerseits (vollreduzibel und) die einhüllende Algebra \bar{A} von A .

Die gegenseitigen Kommutatoralgebren zerfallen als vollreduzible Algebren in volle Matrixringe über Schiefkörpern. Zerfällt dabei ein erzeugendes System von \bar{A} in r inäquivalente Darstellungen, wobei die Darstellung D_u vom Grad s_u über einem Schiefkörper \mathfrak{D}_u gerade t_u -mal auftritt,

$$(2) \quad \bar{A} \sim \sum_{u=1}^r \dot{+} 1_{t_u} \times (D_u)_{s_u},$$

so zerfällt ein erzeugendes System von \bar{B} gleichzeitig ebenfalls in r inäquivalente Darstellungen, wobei die Darstellung D'_u vom Grad t_u über dem Schiefkörper \mathfrak{D}'_u gerade s_u -mal vorkommt,

$$(3) \quad \bar{B} \sim \sum_{u=1}^r \dot{+} (D'_u)_{t_u} \times 1_{s_u}$$

(\times bedeute Kroneckerprodukt, 1_α die α -reihige Einheitsmatrix, \mathfrak{D}' ist der zu \mathfrak{D} inverse Schiefkörper).

Bekanntlich sind alle Darstellungen der nSL , nO (und nSp) vollreduzibel über dem algebraisch-abgeschlossenen Körper der komplexen Zahlen. Die Voraussetzungen für den Satz von BRAUER und WEYL sind also in den Fällen $A = {}^nSL(1)_N^N$, ${}^nO(1)_N^N$ und auch ${}^nO(\Delta)_N^N$ erfüllt; als Schiefkörper \mathfrak{D}_u haben wir in den betrachteten Fällen stets einen Körper.

In der Tat ist der Gruppenring S_N der Symmetriegruppe \mathfrak{S}_N isomorph zur Kommutatoralgebra der ${}^nSL(1)_N^N$; die Ausdehnung ist eine „bisymmetrische“ Operation (WEYL), d. h. eine gegen Permutation der N Faktoren des Verschmelzungsproduktes invariante.

Die Kommutatoralgebra jeder Ausdehnung enthält deshalb den Gruppenring der Permutationsgruppe als Unter algebra. Man darf aber nicht erwarten, daß alle derartigen Kommutatoralgebren selbst Gruppenringe sind. Dies trifft z. B. schon nicht zu bei der Ausdehnung ${}^nO(1)_N^N$, die BRAUER¹⁹⁾ unter-

¹⁸⁾ Classical Groups, p. 95.

¹⁹⁾ R. BRAUER: Ann. of Math. 38, 857 (1937).

sucht hat. Der Grund ist leicht einzusehen: die ausreduzierenden Operationen umfassen hier die Spurbildung, die keine Inverse hat.

Es ist ferner nicht der Fall in dem uns berührenden Fall der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_x^N$, wie sich sogleich zeigen wird. In Anbetracht des Struktursatzes liefert der Satz von BRAUER und WEYL für den einfachsten Fall $n = 2v$, N gerade, wenn man Zusatz 2a beachtet, ganz unmittelbar

Satz II: Die Kommutatoralgebra von ${}^nO(\Delta)_x^N$ ist isomorph zur einhüllenden Algebra von ${}^N O^+(\Delta)_x^{2v}$; ebenso verhält sich die Kommutatoralgebra von ${}^{2v}O^+(\Delta)_x^N$ zur einhüllenden Algebra von ${}^N O(\Delta)_x^{2v}$. Die gegenseitige Zuordnung der irreduziblen Bestandteile wird geliefert durch die Komplementarität.

Für die übrigen Fälle ist der entsprechende Sachverhalt wohl genügend erhellt, aber wegen des Auftretens der reduzierten Grade nicht so einfach auszusprechen. Wir werden auf eine knappere Formulierung in § 7 zurückkommen.

4.2. Der Rang der ausreduzierenden Algebra.

Die Kommutatoralgebra \bar{B} einer Darstellung A einer Gruppe hat eine unmittelbare invariantentheoretische Bedeutung. Für jedes $\mathfrak{A} \in A$ und irgendein festes $\mathfrak{B} \in B$ ist $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Eine lineare Basis von B liefert somit sämtliche linear unabhängigen Invarianten, die mit einer N -fachen Ausdehnung vorkommen, in der Form

$$(4) \quad J(\mathfrak{B}) = (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_N) \mathfrak{B} (u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_N),$$

wo x_i ein Zeilen-, u_i ein Spaltenvektor ist, der sich nach der Grunddarstellung der Ausdehnung transformiert. Umgekehrt ist jede solche Invariante mit Hilfe dieser Basis von B darzustellen. Es gibt also genau so viele Invarianten dieser Art, wie der Rang der Kommutatoralgebra B beträgt.

Wiederum ist das Ergebnis für die ${}^nSL(1)_x^N$ geläufig. Man hat dort gerade $N!$ Invarianten, nämlich

$$J_\pi = (x_1 u_{i_1}) (x_2 u_{i_2}) \cdots (x_N u_{i_N}), \text{ wo } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ i_1 & i_2 & \dots & i_N \end{pmatrix}$$

eine Permutation der N Teilräume der Ausdehnung ist. Man findet damit auch explizit eine Basisdarstellung für die Kommutatoralgebra: die Matrix $\mathfrak{B}_\pi \in B$ ist nach (4) bestimmt durch

$$J(\mathfrak{B}_\pi) = J_\pi.$$

Im BRAUERSchen Fall der Ausdehnung ${}^nO(1)_x^N$ tragen zur Invariantenbildung auch die Skalarprodukte zwischen je zwei Zeilenvektoren oder je zwei Spaltenvektoren, die Spurbildungen, bei. Die Abzählung ergibt $(2N-1)(2N-3)(2N-5) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ Möglichkeiten, demgemäß ist der Rang $R_D(N)$ der BRAUERSchen Kommutatoralgebra Ω_N

$$(5) \quad R_D(N) = (2N-1)(2N-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

Einen ähnlichen Sachverhalt hat man nun auch bei der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\times^N$, auch hier braucht bei der Invariantenbildung zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren nicht unterschieden zu werden.

Bekanntlich gibt es in einer Cliffordalgebra C stets eine feste Matrix \mathfrak{C} , die eine ganze erzeugende Cliffordbasis $\{I_i\} \in C$, $i = 1, \dots, 2\nu$ oder $1, \dots, 2\nu + 1$, elementweise in die positiven oder negativen Transponierten transformiert²⁰⁾

$$(6) \quad (-1)^i I_i^T = \mathfrak{C} I_i \mathfrak{C}^{-1}.$$

Dann ist $(x_i, I_a u_k)$ proportional $(u_k^T \mathfrak{C} I_a \mathfrak{C}^{-1} x_i^T)$, also transformiert sich neben x_i auch $u_i^T \mathfrak{C}$ kontragredient zu den u_k . Die Bestimmung der Kommutatoralgebra läuft also auf die Frage hinaus, welche Invarianten man aus den $2N$ Undoren $x_1, x_2, \dots, x_N, u_1^T \mathfrak{C}, u_2^T \mathfrak{C}, \dots, u_N^T \mathfrak{C}$ bilden kann.

Zunächst läßt sich die Anzahl linear unabhängiger unter diesen Invarianten nach dem Struktursatz sofort angeben. Sie und damit der Rang $R_\Theta(N, n)$ der Kommutatoralgebra $\Theta_{N, n}$ zur Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\times^N$ ist gleich der Vielfachheit des Auftretens des Skalars in der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_\times^{2N}$, also gleich dem Grad bzw. dem reduzierten Grad der Darstellung ${}^{2N}O^+\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}\right)^{21)}$. Dieser ist²²⁾

$$(7) \quad \frac{P\left(N-1+\frac{n}{2}, N-2+\frac{n}{2}, \dots, 1+\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{P(N-1, N-2, \dots, 1, 0)} \quad \text{für } n = 2\nu \text{ und}$$

$$(8) \quad \frac{P\left(N-1+\frac{n}{2}, N-2+\frac{n}{2}, \dots, 1+\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{P\left(N-\frac{1}{2}, N-\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} \quad \text{für } n = 2\nu + 1,$$

da der Grad von ${}^{2N}O^+(\Delta^+)$ gerade

$$P\left(N-\frac{1}{2}, N-\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) / P(N-1, N-2, \dots, 1, 0) \text{ ist.}$$

Dabei ist $P(x_1 x_2, \dots, x_N) = \prod_{i < k} (x_i - x_k) (x_i + x_k)$.

Wird der Zähler in (7) mit $P_{N, \frac{n}{2}}$ bezeichnet, so ergibt sich z. B. durch Rekursion nach $P_{N-1, \frac{n}{2}}$

Satz III. Der Rang der ausreduzierenden Algebra $\Theta_{N, n}$ des allgemeinen Undors N -ter Stufe ist

$$(9) \quad R_\Theta(N, n) = \begin{cases} \frac{\nu!}{(N+\nu-1)!} \cdot \frac{S(N)}{S(1)} & \text{für } n = 2\nu \\ \frac{(2\nu)!}{(N+2\nu-1)!} \cdot \frac{S(N)}{S(1)} & \text{für } n = 2\nu + 1, \end{cases}$$

²⁰⁾ In der speziellen Repräsentation von WEYL: Classical Groups p. 271, ergibt sich $\mathfrak{C} = Q_1 Q_2 \dots Q_\nu$. Wir weichen von der üblichen Definition, Classical Groups p. 272 unten, geringfügig ab, um die Basismatrix $\Gamma_{2\nu+1}$ einheitlich mit einbeziehen zu können.

²¹⁾ $\frac{N[{}^nO^+(m^+)]}{N[{}^nO^+(\Delta^+)]}$ stimmt überein mit $\frac{N[{}^nO(m)]}{N[{}^nO(\Delta)]}$ und kann also auch den reduzierten Grad von ${}^nO^+(m^+)$ bezeichnen.

²²⁾ H. WEYL: Math. Z. 24, 349 (1925).

wo

$$(10) \quad S(\alpha) = \frac{(2\alpha + 2\nu - 2)! (2\alpha + 2\nu - 4)! \dots (2\alpha + 2)! (2\alpha)!}{(\alpha + 2\nu - 2)! (\alpha + 2\nu - 3)! \dots (\alpha + 1)! \alpha!}$$

Für $n = 2, 3, 4$ ergibt sich

$$(11) \quad R_{\alpha}(N, 2) = \frac{1}{2} \binom{2N}{N}$$

$$(12) \quad R_{\alpha}(N, 3) = \binom{2N}{N} - \binom{2N}{N-1}$$

$$(13) \quad R_{\alpha}(N, 4) = \frac{1}{2} \left(\binom{2N}{N} - \binom{2N}{N-1} \right) \left(\binom{2N+1}{N} - \binom{2N+1}{N-1} \right).$$

Für den Rang der ausreduzierenden Algebra der Ausdehnung ${}^nO^+(\Delta)_N^N$, $n = 2\nu$ hat man offensichtlich den Grad der Darstellung ${}^{2N}O\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}\right)$, also das Doppelte der angegebenen Anzahl.

In Tab. 4 sind die Werte von $R_{\alpha}(N, n)$ für die einfachsten Fälle zusammengestellt.

Tabelle 4. Rang der ausreduzierenden Algebra der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_N^N$.

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$N=1$	1	1	1	1	1	1	1
$N=2$	3	2	5	3	7	4	9
$N=3$	10	5	35	14	84	30	165
$N=4$	35	14	294	84	1386	330	4719
$N=5$	126	42	2772				
$N=6$	462	132	28314				

4.3. Invariantentheoretische Kennzeichnung der ausreduzierenden Algebra.

Wir kommen nun zur Angabe der Elemente der Algebra $\Theta_{N,n}$ selbst mit Hilfe der Invarianten, die sich aus $2N$ Undoren bilden lassen.

Wir müssen zunächst an die fundamentale Eigenschaft der Cliffordalgebra erinnern, daß sich jede orthogonale Substitution der erzeugenden Cliffordbasis Γ_i als Transformation mit der Clifford-Darstellung $S(o) \in {}^nO(\Delta)$ schreiben läßt

$$(14) \quad S(o) \Gamma_i S(o)^{-1} = \sum_k o_{ik} \Gamma_k.$$

Ist x ein Zeilen-, u ein Spaltenundor, so transformiert sich also $(x \Gamma_i u)$ wie ein Vektor. Darüber hinaus ist wegen der Schiefkommutativität der Basis-elemente Γ_i

$$(x \Gamma_{ikl} \dots_m u) = (x \Gamma_i \Gamma_k \Gamma_l \dots \Gamma_m u) \quad (R \text{ Indizes})$$

ein total schiefsymmetrischer („Clifford“-)Tensor der Stufe R . In der Tat gibt (1) das entsprechende Transformationsverhalten der irreduziblen Bestandteile der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_N^2$ an. Für $n = 2\nu + 1$ beachte man gegenüber $n = 2\nu$ das Ausfallen der Hälfte aller Darstellungen.

Wir bezeichnen $1, \Gamma_i, \Gamma_{ik}, \dots$ kurz mit $\Gamma_{(F)}$. Wird ferner noch $u_1^T \mathfrak{C}, u_2^T \mathfrak{C}, \dots, u_N^T \mathfrak{C}$ mit $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{2N}$ bezeichnet, so hat man offenbar die Möglichkeit, aus den $2N$ Undoren x_i all diejenigen Invarianten zu bilden, die sich durch vollständige Kontraktion mittels Spurbildungen aus den N , jeweils ein Paar von Undoren betreffenden Flächengrößen

$$(15) \quad (x_i, \Gamma_{(F)} \mathfrak{C}^{-1} x_{i_1}^T), (x_i, \Gamma_{(F)} \mathfrak{C}^{-1} x_{i_2}^T), \dots, (x_{i_{2N-1}}, \Gamma_{(F)} \mathfrak{C}^{-1} x_{i_{2N}}^T)$$

($i_1 \dots i_{2N} = 1 \dots 2N$) ergeben. Dabei umfaßt (F) für $n = 2\nu$ sämtliche, für $n = 2\nu + 1$ nur alle geradstufigen Flächengrößen. Jede dieser Bildungen entspricht einer Bildung (4) mit einer gewissen Matrix \mathfrak{B} , alle derartigen \mathfrak{B} geben eine Basis für die Algebra $\Theta_{N,n}$, natürlich nicht notwendig eine minimale, da noch lineare Abhängigkeiten bestehen können (und im allgemeinen auch bestehen, wie Beispiele in 4.5 zeigen werden), aber doch eine vollständige: Die Bildungen (15) umfassen sicher sämtliche Invarianten, die sich aus einer Anzahl N irgendwelcher Flächengrößen bilden lassen und die sich damit in der Ausdehnung ${}^nO(\square)_x^{2N}$ als Skalare anzeigen. Die Ausdehnung ${}^nO(\square)_x^{2N}$ ist aber identisch mit ${}^nO(\Delta)_x^{2N}$ und hat also mit dieser speziell die Darstellungen ${}^nO(0)$ gemeinsam.

Damit ist die ausreduzierende Algebra des Undors N -ter Stufe vollständig gekennzeichnet.

4.4. Einige ergänzende Bemerkungen.

Es mag gegenüber dem Gruppenring S_N und der BRAUERSchen Algebra Ω_N auffallen, daß der Rang der Algebra $\Theta_{N,n}$ — was äußerlich durch den zweiten Index ausgedrückt ist — von n abhängt. Das erklärt sich darin, daß es sich um die konkrete Matrixalgebra handelt. Demgegenüber sind der Gruppenring S_N und die Algebra Ω_N die abstrakten Gebilde der betreffenden, als Matrixalgebren gegebenen konkreten Kommutatoralgebren. Für den Fall $n < N$ gelten tatsächlich lineare Abhängigkeiten unter den Invarianten, die konkreten Matrixalgebren $S_{N,n}$ und $\Omega_{N,n}$ — der zweite Index ist nun gerechtfertigt — sind also für $n < N$ verkürzte Darstellungen ihrer abstrakten Gebilde und von diesen insofern verschieden, insbesondere sind sie von geringerem Rang.

Offensichtlich geht jedoch der Rang der Algebra $\Theta_{N,n}$ für wachsendes n über alle Grenzen, es gibt also keine abstrakte, von n unabhängige Algebra endlichen Ranges, die die konkreten $\Theta_{N,n}$ einhüllt. Jedoch gibt es eine solche, als Θ_N zu bezeichnende, mit abzählbarer Basis. Wir erinnern an Tab. 3, wo bei festgehaltener Stufe N der Ausdehnung für gerades und ungerades n abwechselnd immer neue Darstellungen der nO bei der Abzählung der Vielfachheiten auftreten. Man sieht unmittelbar, daß mit unbeschränkt wachsendem n sämtliche der abzählbar vielen Darstellungen der nO ins Spiel kommen. Wir können also konstatieren:

Satz IV: Die abstrakte Algebra Θ_N der Ausreduktion eines Undors N -ter Stufe ist die einer direkten Summe der vollen Matrixalgebren aller inäqui-

²²⁾ ${}^nO(\square) = {}^nO(\Delta)_x^{2N}$ sei die zusammengesetzte Darstellung (1).

valenten (abzählbar vielen) Darstellungen der ${}^N O$ - oder, wie man auch kurz sagen könnte, die abstrakte Algebra der Gruppe ${}^N O$. Die konkreten Algebren $\Theta_{N,n}$ enthalten genau nur jenen Teil der treuen Darstellung der abstrakten Algebra Θ_N , der durch Gruppendarstellungen ${}^N O(m_i)$ mit $m_i \leq \frac{n}{2}$ bezeichnet wird (ganzzahlige oder halbzahlige, je nachdem n gerade oder ungerade ist).

Unser ganzes Vorgehen betraf ja nun offensichtlich die konkrete Algebra, da wir sie aus dem Struktursatz heraus durch die Menge *linear unabhängiger* Invarianten charakterisiert haben. Der abgezählte Rang der Algebra ist also gleich der Quadratsumme der Darstellungsgrade aller tatsächlich in der konkreten Kommutatoralgebra enthaltenen irreduziblen Bestandteile. Damit ergibt sich für praktische Zwecke eine Probe für die Quadratsumme der Vielfachheiten des Auftretens inäquivalenter Darstellungen in der Ausdehnung ${}^n O(\Delta)_X^N$.

4.5. Beispiele.

a) Wir greifen die Fälle $n = 3$ und $n = 5$ noch heraus, da hier die Isomorphismen

$${}^3 O \cong {}^2 Spin \cong {}^2 SL \quad \text{und} \quad {}^5 O \cong {}^4 Spin \cong {}^4 Sp$$

bestehen²⁴). Da die Darstellung ${}^3 O(\Delta)$ bei der ersten der Isomorphismen in ${}^2 SL(1)$ übergeht, kann man also die Ausdehnung ${}^3 O(\Delta)_X^N$ unmittelbar vergleichen mit der Tensorbildung ${}^2 SL(1)_X^N$. Die Vielfachheit des Auftretens der Darstellung ${}^2 SL(N - \alpha, \alpha)$ wird durch den Grad der Darstellung der Symmetriegruppe \mathfrak{S}_N gegeben, die zur (höchstens zweigliedrigen) Partition $(\overline{N - \alpha} + \alpha)$ von N gehört. Aus einer bekannten Formel²⁵) ergibt sich dafür $\binom{N}{\alpha} - \binom{N}{\alpha - 1}$, (den gleichen Wert erhält man natürlich für den reduzierten Grad von ${}^N O \left(\left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{2} \right)^{|N/2| - \alpha} \right)$). Die Quadratsumme dieser Vielfachheiten ist $\binom{2N}{N} - \binom{2N}{N - 1}$, — man vergleiche mit (12). Diese Anzahl ist der Rang der konkreten Algebra $S_{N,2}$, die durch das Ausfallen aller Darstellungen zu mehr als zweigliedrigen Partitionen gekennzeichnet ist. Er ist für $N \geq 3$ in der Tat geringer als der Rang $N!$ der abstrakten Symmetriegruppe \mathfrak{S}_N . Wir haben also:

Satz V: Der Rang der konkreten ausreduzierenden Algebra $S_{N,2}$ der Ausdehnung ${}^2 SL(1)_X^N$ ist gleich dem Grad der Darstellung $\mathfrak{S}_{2N}(N, N)$, die zur Partition $(N + N)$ der Symmetriegruppe von $2N$ Elementen gehört.

b) Des weiteren geht bei der zweiten der oben angegebenen Isomorphismen ${}^5 O(\Delta)$ in ${}^4 Sp(1)$ über. Die Vielfachheiten in der Ausdehnung ${}^5 O(\Delta)_X^N$ stimmen also überein mit denen in der Ausdehnung ${}^4 Sp(1)_X^N$. Wiederum ist der Rang $R_{\omega}(N, 5) = R_{\omega}(N, 4)$ der konkreten ausreduzierenden Algebra für $N \geq 3$ geringer als der Rang $R_{\omega}(N)$ der abstrakten Algebra²⁶), entsprechend dem

²⁴) Für Einzelheiten vgl. F. L. BAUER, a. a. O.

²⁵) G. FROBENIUS: Sitzgsber. Berl. Akad. 1900, 516.

²⁶) $R_{\omega}(N)$ ist auch der Rang der ausreduzierenden Algebra eines symplektisch eingeschränkten Tensors (vgl. BRAUER l. c.).

Umstand, daß symplektische Tensoren leer sind, wenn die zugehörige Partition mehr als ν -gliedrig, d. h. hier mehr als 2-gliedrig ist.

c) BRAUER hat (l. c.) für die Algebra Ω_N (und ihre Unter algebra S_N) eine Graphendarstellung angegeben. Wir wollen eine solche auch für die konkrete Algebra $S_{N,2}$ bzw. $\Theta_{N,3}$ formulieren. Sämtliche Invarianten der binären linearen Gruppe lassen sich durch Verjüngung $(x_i u_k)$ und durch Determinanten $\langle x_i x_k \rangle$ darstellen, offensichtlich hat man also alle linear unabhängigen Invarianten (15) bereits mit dem Ansatz

$$(17) \quad (x_{i_1} \mathbb{C}^{-1} x_{i_2}^T) \cdot (x_{i_2} \mathbb{C}^{-1} x_{i_3}^T) \cdots (x_{i_{2N-1}} \mathbb{C}^{-1} x_{i_{2N}}^T)$$

erfaßt. Nach RUMER²⁷⁾ gilt aber die Identität

$$(18) \quad (x_1 \mathbb{C}^{-1} x_2^T)(x_3 \mathbb{C}^{-1} x_4^T) + (x_1 \mathbb{C}^{-1} x_3^T)(x_2 \mathbb{C}^{-1} x_4^T) + (x_1 \mathbb{C}^{-1} x_4^T)(x_2 \mathbb{C}^{-1} x_3^T) = 0,$$

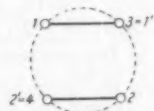
und man kommt also zu folgender Anwendung des von RUMER in etwas anderem Zusammenhang angegebenen Graphensystems:

Ordnet man den $2N$ Vektoren $x_1 x_{N+1} x_2 x_{N+2} \cdots x_N x_{2N}$ in dieser Reihenfolge $2N$ Punkte auf dem Umfang eines Kreises zu und jeder Bildung $(x_{i_k} \mathbb{C}^{-1} x_{i_k}^T)$ in (17) eine Verbindung der zwei entsprechenden Punkte, so ist jede Invariante durch einen Graph gekennzeichnet. Diejenigen Graphen, in denen sich keine zwei Verbindungen kreuzen, geben eine Minimalbasis der konkreten Algebra $S_{N,2}$ bzw. $\Theta_{N,3}$ an. Denn je zwei kreuzende Verbindungen lassen sich nach RUMER mit Hilfe der Identität (17) auf eine Linearkombination zweier kreuzungsfreier umformen.

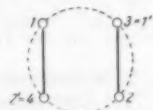
Bei der gewählten Anordnung auf dem Kreis tritt die Eigenschaft der $\Theta_{N,3}$, in der abstrakten S_N enthalten zu sein, offen zu Tage. Die kreuzungsfreien Graphen enthalten nur Verbindungen, die Paarungen zueinander kontragredienter Vektoren entsprechen und das Graphensystem ist damit in der Graphendarstellung der Θ_N enthalten, wo jede Permutation $(i'_1 i'_2 \dots i'_N)$ durch die N Verbindungen zwischen 1 und $N + i'_1$, 2 und $N + i'_2$, ..., N und $N + i'_N$ dargestellt wird.

Wir behandeln damit das Beispiel $N = 2$. Eine Basis bilden

$$J_1 = (x_1 u_1)(x_2 u_2) = x_1 \times x_2 \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} u_1 \times u_2, \quad \text{Graph:}$$



$$J_2 = (x_1 u_2)(x_2 u_1) = x_1 \times x_2 \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} u_1 \times u_2, \quad \text{Graph:}$$



²⁷⁾ G. RUMER: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1932, 337.

Die weitere Invariante

$$(\mathbf{x}_1 \mathbb{C}^{-1} \mathbf{x}_2^T) (u_1^T \mathbb{C} u_2) = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} u_1 \times u_2 \text{ Graph:}$$



$$= J_1 - J_2$$

ist offensichtlich eine Linearkombination, desgleichen die Invariante

$$\frac{\chi}{\xi} (\mathbf{x}_1 \Gamma_{\xi} u_1) (\mathbf{x}_2 \Gamma_{\xi} u_2) = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & \cdot \\ \cdot & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} u_1 \times u_2$$

$$= 2J_2 - J_1.$$

§ 5. Der Rang der einhüllenden Matrixalgebra des Undors N -ter Stufe.

Nach dem Struktursatz in der Fassung Ia geben die Darstellungsgrade (für $n = 2v$) bzw. die reduzierten Darstellungsgrade (für $n = 2v + 1$) der in der Ausdehnung ${}^N O(\Delta)_x^n$ enthaltenen inäquivalenten irreduziblen Bestandteile ${}^N O(\bar{m})$ die Vielfachheit des Auftretens der Darstellung ${}^N O(m)$ in der Ausdehnung ${}^N O(\Delta)_x^n$ an. Für $n = 2v$ ist der Rang der einhüllenden Algebra der Ausdehnung ${}^N O^+(\Delta)_x^n$ unmittelbar gleich dem Rang der Algebra $\Theta_{N,n}$,

also gleich $2^N O^+ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right)$. Für $n = 2v + 1$ sind noch die Fälle N gerade und N ungerade zu unterscheiden. Im letzteren Fall entsteht der reduzierte

Grad von ${}^N O^+(\bar{m})^{21}$ durch Division mit $2^{\binom{N-1}{2}} = N [{}^N O^+(\Delta^+)]$, der Rang der einhüllenden Algebra von ${}^N O^+(\Delta)_x^n$ ist also der mit 2^{N-1} multiplizierte Rang der Algebra $\Theta_{N,n}$. 2^{N-1} ist aber der Darstellungsgrad von $2^N O^+(\Delta^+)$, der Rang ist also auch hier gleich dem Darstellungsgrad von $2^N O^+ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right)$. Das

gleiche gilt für den ersteren Fall, hier ist der reduzierte Grad der durch $2^{\binom{N-2}{2}}$ dividierte Grad von ${}^N O^+(\bar{m}^+)$ oder ${}^N O^+(\bar{m}^-)$; da hier stets beide Hälften der formal-selbstassozierten Darstellung auftreten, ist der Rang von $\Theta_{N,n}$ mit $2 \cdot 2^{(N-2)}$, d. h. ebenfalls mit 2^{N-1} zu multiplizieren.

Überdies ist bei Betrachtung der Ausdehnung ${}^N O(\Delta)_x^n$, also (was nur für gerades N etwas ändert) beim Fortfall der Beschränkung auf die Drehungsgruppe, unmittelbar einzusehen, daß der Rang hier doppelt so groß, also gleich dem Grad der vollen selbstassozierten Darstellung $2^N O \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right)$ ist.

Vertauscht man nun N mit n , so hat man das komplementäre Gegenstück zu Satz III.

Satz VI: Der Rang der einhüllenden Matrixalgebra aller in einer N -fachen Ausdehnung ${}^N O^+(\Delta)_x^n$ enthaltenen Darstellungen der ${}^N O^+$ ist gleich dem Grad von $2^N O^+ \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \right)$. Für $n = 2v$ ist der Rang von ${}^N O(\Delta)_x^n$ gleich dem Grad von $2^N O \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \right)$.

In der folgenden Tab. 5, die sich nach dem vorstehenden unmittelbar aus Tab. 4 ergibt, sind einige Werte zusammengestellt. Für gerades $n = 2v$ sind die angegebenen Zahlen zu verdoppeln, wenn die Beschränkung auf die Drehungsgruppe fortfällt.

Speziell der Rang der einhüllenden Algebra der Darstellung ${}^nO^+(\Delta)$ selbst ist gleich dem Grad von ${}^{2n}O^+(\Delta^+)$, nämlich $(2^{v-1})^2 + (2^{v-1})^2 = 2^{n-1}$ für $n = 2v$, $(2^v)^2 = 2^{n-1}$ für $n = 2v + 1$.

Tabelle 5. Rang der einhüllenden Algebra der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_N^N$.

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$N=1$	2	4	8	16	32
$N=2$	3	10	35	126	462
$N=3$	4	20	112	672	4224
$N=4$	5	35	294	2772	28314
$N=5$	6	56	672		
$N=6$	7	84	1386		
$N=7$	8	120	2640		
$N=8$	9	165	4719		

§ 6. Kovarianten der Spingruppe.

6.1. Tensorielle Substrate.

Während sich Art und Vielfachheit der irreduziblen Bestandteile eines N -stufigen Undors bereits aus dem Struktursatz I ergeben, liegen die ausreduzierenden Operationen tiefer. Man erhält sie dadurch, daß man die Idempotenten der Algebra $\Theta_{N,n}$ auf die Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_N^N$ anwendet, so wie es mit den symmetrisierenden Operationen der linearen Gruppe üblicherweise geschieht. Bekanntlich verbietet sich bereits dort die explizite Angabe dieser Operationen in allgemeinsten Form wegen der Unhandlichkeit und Undurchsichtigkeit der entstehenden Ausdrücke, die Ausreduktion kann aber in jedem konkreten Einzelfall mit den bekannten Methoden der Darstellungstheorie durchgeführt werden.

Wir werden dementsprechend hier nur einige aufschlußreiche Spezialfälle etwas allgemeiner besprechen, zunächst den nach den Untersuchungen in 4.3 nun fast trivialen Fall der Ausdehnung ${}^nO(\Delta)_N^2$. Den irreduziblen Bestandteilen in (1) entsprechen die Bildungen von Flächengrößen $F_{ik\dots l} = (u_1^T \otimes \Gamma_{(F)} u_2)$ aus den Basis-Spaltenundoren u_1, u_2 mit Hilfe der Matrizen $\Gamma_{(F)} = \Gamma_{ik\dots l}$. Diese Bildungen sind jedoch hier, der gegenüber 4.3 veränderten Situation gemäß, so aufzufassen: die $\binom{n}{x}$ Komponenten der Größen $F_{ik\dots l}$ von der Stufe x bilden in irgendeiner, etwa lexikographischer Anordnung einen Darstellungsmodul für die zugehörige irreduzible Darstellung.

Diese Darstellungen verteilen sich auf die symmetrische und die antisymmetrische Linearkombination der Moduln u_1 und u_2 ²⁸⁾, je nachdem ob die Matrizen

²⁸⁾ Das heißt der Plethysmen ${}^nO(\Delta) \otimes \{2\}$ und ${}^nO(\Delta) \otimes \{11\}$. Der LITTLEWOODSche Ausdruck „Plethysmus“ (D. E. LITTLEWOOD, The Theory of Group Characters, 2^d ed.).

$\Gamma_{(F)}$ einer bestimmten Flächengröße F (alle) symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Auf die Bestandteile beider Linearkombinationen im einzelnen soll hier nicht eingegangen werden. Es mag nur noch zur Abrundung der Kennzeichnung der Spingruppen angeführt werden, daß die skalare Darstellung ${}^nO(0)$ für $n = 8\eta + 2, 8\eta + 3, 8\eta + 4, 8\eta + 5$ in der antisymmetrischen, für $n = 8\eta + 6, 8\eta + 7, 8\eta + 8, 8\eta + 9$ in der symmetrischen Linearkombination liegt ($\eta = 0, 1, 2, 3, \dots$). Das bedeutet, daß in den betrachteten Fällen die Spingruppe ${}^{2^v}Spin$ eine antisymmetrische bzw. symmetrische Bilinearform invariant läßt und damit Untergruppe der ${}^{2^v}Sp$ ($v = 4\eta + 1, 4\eta + 2$) bzw. der ${}^{2^v}O$ ($v = 4\eta + 3, 4\eta + 4$) ist²⁹). Der Beweis ergibt sich leicht aus der Definition von \mathfrak{C} .

Führt man nunmehr für gerades $N = 2M$ die Ausdehnung ${}^nO(\Delta)^{2M}$ auf die gleichbedeutende ${}^nO(\square)^{M2}$ zurück, so sind die ausreduzierenden Transformationen von tensorieller Art und ohne grundsätzliche Schwierigkeiten. Auf diese Ausdehnung läßt sich aber auch der Fall, daß N ungerade ist, $N = 2M + 1$, zurückführen, wenn man ${}^nO(\Delta)^{2M+1} = {}^nO(\square)^M \times {}^nO(\Delta)$ betrachtet. Mit der Kenntnis eines irreduziblen Bestandteils ${}^nO(m)$ von ${}^nO(\square)^M$ handelt es sich dann darum, die ausreduzierende Transformation der Verschmelzung ${}^nO(m) \times {}^nO(\Delta)$ zu finden, wobei ${}^nO(m)$ eine ganzzahlige (tensorielle) Darstellung ist. Wir behandeln die ausreduzierenden Operationen dieser Verschmelzung im nächsten Abschnitt.

6.2. Charakteristiken der halbzahlgigen Darstellungen.

Wir sind in 3.2 die Erklärung schuldig geblieben, was es bedeutet, daß der Grad einer halbzahlgigen Darstellung ${}^nO(m_i + \frac{1}{2})$ stets durch 2^v , den Grad der Darstellung ${}^nO(\Delta)$, teilbar ist. Die bloße Tatsache geht explizit bereits aus den Formeln hervor, die bei MURNAGHAN oder LITTLEWOOD anlässlich der Berechnung der Charakteristiken der halbzahlgigen Darstellungen als Zwischenresultate auftreten^{30, 31}). LITTLEWOOD zeigt, daß die Charakteristik einer halbzahlgigen

Darstellung ${}^nO(\lambda_i + \frac{1}{2})$ als Faktor die Charakteristik $\chi_\Delta = \prod_{i=1}^v 2 \cos \frac{\Phi_i}{2}$ der Darstellung ${}^nO(\Delta)$ enthält: sie ist

$$(19a) \quad \frac{|C_i(\lambda_i + v - s + \frac{1}{2})|}{|C_i(v - s + \frac{1}{2})|} \cdot \chi_\Delta \quad \text{falls } n = 2v$$

Oxford 1950) bezeichnet eine Ausdehnungsoperation, gefolgt von einer ganz bestimmten Ausreduktion: Für eine Darstellung D_ξ vom Grad ξ ist $D_\xi \otimes \{\lambda\}$, wo $\{\lambda\}$ eine Partition von N ist, definiert als diejenige zerfallende Operation an der Ausdehnung $D_{\xi N}$, die aus der Ausdehnung ${}^{\xi}SL(1)_N^N$ die irreduzible Darstellung ${}^{\xi}SL(\lambda)$ ausblendet: ${}^{\xi}SL(1) \otimes \{\lambda\} = {}^{\xi}SL(\lambda)$. $D_\xi \otimes \{\lambda\}$ ist im allgemeinen nicht irreduzibel.

²⁹) Für die niedrigsten Dimensionszahlen ist dieses Ergebnis geläufig (vgl. das Beispiel ${}^4O \cong {}^4Sp$ in 4.3.)

³⁰) F. D. MURNAGHAN: The Theory of Group Representations, Baltimore 1938, Formel 10.23, 10.31.

³¹) D. E. LITTLEWOOD, a. a. O., p. 258 unten, p. 259 Mitte.

$$(19b) \quad \frac{|S_i^{(\lambda_s + \nu - s + 1)}|}{|S_i^{(\nu - s + 1)}|} \cdot \chi_{\Delta} \quad \text{falls } n = 2\nu + 1,$$

wo $C_i^{(j)} = 2 \cos j \Phi_i$, $S_i^{(j)} = 2 \sin j \Phi_i$ bedeutet.

Es wurde jedoch anscheinend bisher nicht ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch der erste Faktor bekannt ist und gedeutet werden kann.

Wir greifen zunächst den Fall $n = 2\nu + 1$ heraus. Der Quotient in (19b) ist nichts anderes als die Charakteristik der Darstellung ${}^{2\nu}Sp(\lambda_i)$ der symplektischen Gruppe. Dies verifiziert man unmittelbar an Hand der bekannten Formeln²²⁾. Man kann dieses Ergebnis auch folgendermaßen formulieren²³⁾:

Satz VII: Die Charakteristik des führenden Terms ${}^nO(m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}, \dots, m_r + \frac{1}{2})$, der bei der Verschmelzung ${}^nO(m_1 m_2, \dots, m_r) \times {}^nO(\Delta)$ entsteht, ist die Charakteristik der Darstellung ${}^{n-1}Sp(m_1 m_2, \dots, m_r)$ der symplektischen Gruppe, multipliziert mit der Charakteristik der Darstellung ${}^nO(\Delta)$. (Für $n = 2\nu + 1$.)

6.3. Tensoren über der Clifford-Algebra.

Der Darstellungsmodul der verschmolzenen und im allgemeinen zusammengesetzten Darstellung ${}^nO(m) \times {}^nO(\Delta)$ ist das direkte Produkt des Moduls der ganzzahligen, tensorartigen Darstellung ${}^nO(m)$ mit einem Linksideal der zur Darstellung ${}^nO(\Delta)$ gehörigen Clifford-Algebra. Anders ausgedrückt, handelt es sich hier um einen Tensor mit Koeffizienten nicht mehr aus dem Grundkörper, sondern aus dieser Cliffordalgebra. Wir bezeichnen ihn als einen *Tensor über der Clifford-Algebra*. Dabei weisen wir besonders darauf hin, daß sein gesamtes Transformationsverhalten sowohl von demjenigen seiner tensoriellen Indizes als auch von der Transformationseigenschaft der Cliffordbasis abhängt, also von *gemischt tensoriell-undorieller* Art ist und daß beide Eigenschaften sich direkt (im mengentheoretischen Sinn) überlagern. Nun besagt aber die MURNAGHAN-LITTLEWOODSche Form der Faktorisierung der Charakteristika das Überraschende: auch die irreduziblen (ausreduzierten) Bestandteile der Verschmelzung ${}^nO(m) \times {}^nO(\Delta)$ zeigen ein Transformationsverhalten, das die Transformation einer Cliffordbasis als direkten Faktor enthält. Der Vergleich des anderen Faktors mit der Charakteristik der symplektischen Gruppe zeigt, daß die irreduziblen Bestandteile das Transformationsverhalten von symplektisch eingeschränkten Tensoren über die Cliffordalgebra haben.

Wie es dazu kommt, nämlich zur Erniedrigung der Dimensionszahl von n auf $n - 1$ und zur symplektischen Schiefspur-Einschränkung anstelle der orthogonalen Spur-Einschränkung, ist nunmehr invariantentheoretisch leicht zu verstehen. Das Substrat von ${}^nO(m)$ sei der K -stufige Tensor $M_{ik, \dots, l}$. Offenbar sind Verjüngungen irgendeines seiner Indizes mit der Clifford-Basis Γ_r zulässig; das kovariante Gebilde (die *Clifford-Linearform*) $M_{ik, \dots, r, \dots, l} \Gamma_r$ transformiert sich in sich und kann abgespalten werden, indem man es gleich Null setzt. Weiterhin sind auch Verjüngungen von irgend zwei, drei, ... K Indizes

²²⁾ H. WEYL: Math. Z. **24**, 339 (1925).

²³⁾ Vorläufige Mitteilung in C. r. Acad. Sci. (Paris) **235**, 793 (1952).

mit dem 2-, 3-, ..., K -stufigen schiefsymmetrischen Cliffordtensor³⁴⁾ $\Gamma_{r_1 r_2}, \Gamma_{r_1 r_2 r_3}, \dots, \Gamma_{r_1 r_2 \dots r_k}$ zulässig. Man sieht unmittelbar, daß ihr Verschwinden bereits aus dem Verschwinden aller Clifford-Linearformen folgt. Der durch die Bedingung verschwindender Clifford-Linearformen reduzierte Tensor über der Clifford-Algebra ist irreduzibel und entspricht dem führenden Term ${}^n O(m_i + \frac{1}{2})$ als Substrat, wie wir sogleich zeigen werden.

Das Verschwinden der Clifford-Linearformen erlaubt die Elimination aller Tensorkomponenten, in denen irgendein Index einen bestimmten festen Wert, etwa den Wert n , annimmt. So entsteht ein Tensor, dessen Komponenten nur noch $n-1$ Werte annehmen, also ein Tensor im $(n-1)$ -dimensionalen. Dabei entfällt auch die orthogonale, über n Werte der Indizes erstreckte Spur-Einschränkung. Dagegen ist für die verbleibenden Komponenten jetzt eigens zu fordern, daß alle Verjüngungen mit dem zweistufigen schiefsymmetrischen Clifford-Tensor $\Gamma_{rs}; r, s = 1, \dots, n-1$, verschwinden. Dann verschwinden auch alle Verjüngungen höherer Stufe.

Eine Bildung $x_\mu y_\nu \Gamma_{\mu\nu}$ ist eine schiefsymmetrische Bilinearform in x und y . Dementsprechend bedeutet die Forderung $M_{ik, \dots, \mu, \dots, \nu, \dots, l} \Gamma_{\mu\nu} = 0$ für ein symmetrisches Indexpaar μ, ν keinerlei Einschränkung, sondern ist von selbst erfüllt; für ein antisymmetrisches Indexpaar μ, ν dagegen wirkt sie sich voll aus. Sie hat damit invariantentheoretisch genau die Qualität der symplektischen Schiefspur, durch deren Verschwinden die Substrate der symplektischen Gruppe ausgezeichnet sind. Wir bezeichnen sie als *symplektische Clifford-Schiefspur*.

Man gelangt also in der Tat zu einem Gebilde, das sich in seinen tensoriellen Indizes nach der Darstellung ${}^{n-1} Sp(m_i)$ der symplektischen Gruppe im $(n-1)$ -dimensionalen, in Übereinstimmung mit der Faktorisierung der Charakteristik, transformiert. Wir haben bewiesen:

Satz VIII: Der führende Term ${}^n O(m_i + \frac{1}{2})$ in der Verschmelzung ${}^n O(m_i) \times {}^n O(\Delta)$, also eine beliebige halbzahlige Darstellung, hat als Substrat einen symplektisch eingeschränkten Tensor über der Clifford-Algebra, der sich in seinen tensoriellen Indizes für $n = 2\nu + 1$ nach der Darstellung ${}^{n-1} Sp(m_i)$ transformiert.

6.4. Symplektische Invarianten bei ungeradzahlicher Dimension.

Die invariantentheoretischen Überlegungen in 6.3 sind an die Parität der Dimensionszahl nicht gebunden, sie gelten also auch für den Fall $n = 2\nu$. Man wird hier auf Tensoren im $(2\nu-1)$ -dimensionalen geführt, die ebenfalls durch das Verschwinden aller Clifford-Schiefspuren „symplektisch“ eingeschränkt sind. Im Gegensatz zu Tensoren über dem Grundkörper erlauben offensichtlich Tensoren über der Clifford-Algebra einheitlich für beliebige Dimension, insbesondere also auch für ungeradzahlige, diese Einschränkung durch *symplektische Clifford-Invarianten*.

³⁴⁾ $\Gamma_{ik, \dots, l} = \Gamma_i \Gamma_k \dots \Gamma_l$.

Bezeichnet man nun das tensorielle Transformationsverhalten *allein* von solchen irreduziblen Tensoren über der Clifford-Algebra mit dem *symplektischen Symbol* ${}^{n-1}Sp(m_i)$, so hat man den

Zusatz zu Satz VIII: Der Satz gilt auch für gerades $n = 2\nu$, wenn ${}^{n-1}Sp(m_i)$ nur als Symbol für das Transformationsverhalten eines Tensors im $(2\nu - 1)$ -dimensionalen mit dem Symmetrietableau (m_i) , dessen sämtliche Clifford-Schiefspuren verschwinden, aufgefaßt wird.

Im Gegensatz zu ihren glücklicheren Geschwistern geradzahliger Dimension, läßt sich den symplektischen Symbolen ${}^{2\nu-1}Sp(m)$ von ungeradzahliger Dimension offenbar keine frei von der Clifford-Algebra definierte (symplektische) Gruppe zuordnen, deren Darstellung sie wahlweise bezeichnen könnten.

Jedoch läßt sich wenigstens für die Charakteristiken der symplektischen Gruppe eine vernünftige formale Übertragung auf den Fall ungerader Dimension angeben. Wird nämlich eine Darstellung ${}^nO(m)$ oder ${}^nSp(m)$ als verallgemeinerte Summe von Darstellungen der linearen Gruppe geschrieben und bezeichnet $()^*$ die Transponierung, d. h. Vertauschung von Zeilen und Spalten an den Tableaus dieser Darstellungen der linearen Gruppe, so gilt der³⁵⁾

Satz von MURNAGHAN:

Es ist (für $n = 2\nu$)

$$(20) \quad ({}^nO(m))^* = {}^nSp(m^*) \quad \text{und umgekehrt} \quad ({}^nSp(m))^* = {}^nO(m^*),$$

wo (m^*) das konjugierte Tableau zu (m) bedeutet.

Man kann mit diesem Satz alle Eigenschaften der symplektischen Gruppe auf solche der orthogonalen zurückführen; postuliert man die Gültigkeit von (20) auch für $n = 2\nu + 1$, so kann man etwa für die Symbole ${}^{2\nu+1}Sp(m)$ formale Charakteristiken mit Hilfe der bekannten der ${}^{2\nu+1}O$ definieren. Man darf erwarten, daß man dabei auf den ersten Faktor in (19a) kommt, die Durchführung dieser Vermutung würde hier zu weit vom Gegenstand weg-führen³⁶⁾.

§ 7. Der Kern der Komplementaritätsbeziehungen.

Nach Satz VIII und Zusatz ist es sinnvoll, den reduzierten Grad (vgl. 3.2) einer halbzahligen Darstellung ${}^nO(m_i + \frac{1}{2})$ als *formalen Grad des symplektischen Symbols* ${}^{n-1}Sp(m_i)$ zu bezeichnen. Der formale Grad ist im Falle $n = 2\nu$ der Wert des ersten Faktors in (19a), im Falle $n = 2\nu + 1$ der Wert des ersten Faktors in (19b) für $\Phi_i = 0$. Im letzteren Fall ist dies natürlich tatsächlich der Darstellungsgrad von ${}^{2\nu}Sp(m_i)$. Weiterhin können wir das symplektische Symbol ${}^{n-1}Sp(m_i)$ als *reduziertes Symbol der Darstellung* ${}^nO(m_i + \frac{1}{2})$ bezeichnen.

Die damit mögliche Neuformulierung des Struktursatzes ist offenkundig, wir können auf die Durchführung verzichten und uns mit dem Hinweis

³⁵⁾ F. D. MURNAGHAN: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1952, 966.

³⁶⁾ Merkwürdig ist, daß dieser Faktor mit der Charakteristik für die Transformationen *negativer Determinante* der Darstellung ${}^{2\nu+1}O(\lambda_i)$, also der *orthogonalen Gruppe* von einer um *Eins größeren Dimensionenzahl* übereinstimmt. Ob dies nur zufällig ist oder einen tieferen Grund besitzt, müssen wir mit einem Gefühl der Unzufriedenheit offenlassen.

begnügen, daß sie nach den Überlegungen des vorangehenden Abschnittes dem zugrunde liegenden Sachverhalt besser angemessen erscheint. Der Kern der im Struktursatz zutage tretenden Komplementaritätsbeziehungen läßt sich nämlich nunmehr zusammenfassend ausdrücken in den folgenden Sätzen über gegenseitige Kommutatoralgebren.

Für $n = 2\nu$, $N = 2M$ hat man als Neuformulierung von Satz II:

Satz IIa: Die einhüllenden Matrixalgebren der Ausdehnungen

$${}^{2\nu}O(\square)_{\times}^M \text{ und } {}^{2M}O^{+}(\square)_{\times}^{\nu}$$

sind gegenseitige Kommutatoralgebren. Die gegenseitige Zuordnung der irreduziblen Bestandteile wird geliefert durch die $2M$ -Komplemente bzw. 2ν -Komplemente.

Dabei ist wie bisher

$${}^{2\alpha}O(\square) = {}^{2\alpha}O(\triangle)_{\times}^2.$$

Weiter gilt für $n = 2\nu + 1$, $N = 2M + 1$

Satz IX: Die einhüllenden Matrixalgebren der Ausdehnungen

$${}^{2\nu}Sp(\square)_{\times}^M \text{ und } {}^{2M}Sp(\square)_{\times}^{\nu}$$

sind gegenseitige Kommutatoralgebren. Die gegenseitige Zuordnung der irreduziblen Bestandteile wird geliefert durch die $2M$ -Komplemente bzw. 2ν -Komplemente.

Dabei ist unter ${}^{2\alpha}Sp(\square)$ die zusammengesetzte Darstellung

$${}^{2\alpha}Sp(1^{\alpha}) + 2(1^{\alpha-1}) + 3(1^{\alpha-2}) + \cdots + \alpha(1) + \overline{\alpha+1}(0)$$

zu verstehen, die sich aus der zusammengesetzten Darstellung ${}^{2\alpha}SL(\square)$ $= {}^{2\alpha}SL(1^{2\alpha}) + (1^{2\alpha-1}) + \cdots + (1) + (0)$ bei Beschränkung auf die Untergruppe symplektischer Transformationen ergibt.

Aus dem Struktursatz in Verbindung mit dem Satz von BRAUER und WEYL folgt unmittelbar die Aussage nur, wenn man unter ${}^{2\alpha}Sp(\square)_{\times}^{\beta}$ die reduzierten Symbole, bzw. hier Darstellungen, die zu den irreduziblen Bestandteilen der Ausdehnung ${}^{2\alpha+1}O(\triangle)_{\times}^{2\beta+1}$ gehören, versteht. Das sind aber die reduzierten Darstellungen von ${}^{2\alpha+1}O(\square)_{\times}^{2\beta+1} \times {}^{2\alpha+1}O(\triangle)$, und es ist offenbar gleichgültig, ob man nach oder vor der β -fachen Ausdehnung die Reduzierung durchführt, also von der ${}^{2\alpha+1}O$ zur ${}^{2\alpha}Sp$ übergeht. Denn dieser Übergang bedeutet nach 6.3 nur das Hinzufügen einschränkender Bedingungen, welches mit dem Ausdehnungsprozeß vertauschbar ist.

Die angegebenen Bestandteile von ${}^{2\alpha}Sp(\square)$ ergeben sich sofort als die reduzierten Bestandteile von ${}^{2\alpha+1}O(\square) \times {}^{2\alpha+1}O(\triangle) = {}^{2\alpha+1}O(\triangle)_{\times}^3$ aus dem Struktursatz. Ihr Entstehen durch symplektische Einschränkung von ${}^{2\alpha}SL(\square)$ ist leicht direkt nachzuweisen oder an der Argumentation in 6.3 zu verfolgen.

Die angegebene Zuordnung mittels der $2M$ - und 2ν -Komplemente ist nach der Definition der Komplemente in 3.1 und nach der eingangs nochmals formulierten Definition der Reduzierung evident.

Schließlich ergibt sich in gleicher Weise der die Fälle $n = 2\nu$, $N = 2M + 1$ und $n = 2\nu + 1$, $N = 2M$ deckende

Satz X: Die einhüllenden Matrixalgebren der Ausdehnungen

$${}^{2\nu-1}Sp(\square)_{\times}^M \text{ und } {}^{2M+1}O(\square)_{\times}^*$$

bzw.

$${}^{2\nu+1}O(\square)_{\times}^M \text{ und } {}^{2M-1}Sp(\square)_{\times}^*$$

sind gegenseitige Kommutatoralgebren. Die gegenseitige Zuordnung der irreduziblen Bestandteile wird geliefert durch die $2M$ -Komplemente bzw. 2ν -Komplemente.

Dabei ist ${}^{2\alpha-1}Sp(\square)_{\times}^{\beta}$ nur als Abkürzung für die reduzierten Bestandteile von ${}^{2\alpha}O(\triangle)_{\times}^{2\beta+1}$ zu verstehen. Man kann natürlich durch diese Vorschrift eine rein formale „Ausdehnung“ von

$${}^{2\alpha-1}Sp(\square) = {}^{2\alpha-1}Sp(1^{\alpha}) + 3(1^{\alpha-1}) + 5(1^{\alpha-2}) + \cdots + 3 + \overline{2\alpha-1}(1) + \overline{2\alpha+1}(0)$$

definieren, die dann durch den Satz beschrieben wird. Auch der Ausdruck „einhüllende Matrixalgebren“ ist *cum grano salis* zu verstehen. Ihn zu verwenden mag gerechtfertigt erscheinen, da man für ein Symbol ${}^{2\alpha-1}Sp$ ja vernünftigerweise einen Grad definieren kann, wie eingangs geschehen, und da durch Angabe dieser Grade (und der zugehörigen Vielfachheiten) die Algebra in abstracto festgelegt ist.

Man bemerkt an den Sätzen IIa, IX und X das Auftreten der zusammengesetzten „Flächengrößen-Darstellungen“ ${}^nO(\square)$, ${}^nSp(\square)$. Im Anhang findet sich ein dem Struktursatz analoger Satz für die Ausdehnung der zusammengesetzten Darstellung ${}^nSL(\square)$. Man kann also diese Ergebnisse auch als allgemeine Sätze über die Ausdehnung solcher Flächengrößen-Darstellungen auffassen.

Meinem Freund, Herrn Dr. K. SAMELSON, danke ich für hilfreiche Diskussionen.

Anhang.

Ein analoger Struktursatz für die lineare Gruppe.

Die in Satz I auftretende Erscheinung der Komplementarität zwischen Vielfachheit und Darstellungsgrad ist nicht auf die Spingruppen beschränkt. Wird mit ${}^nSL(\square)$ die zusammengesetzte Darstellung

$${}^nSL(\square) = {}^nSL(0) + (1) + (11) + \cdots + \underbrace{(111 \cdots 11)}_n$$

der linearen Gruppe ²⁷⁾ bezeichnet, so gilt für die Ausdehnung ${}^nSL(\square)_{\times}^M$ der analoge

Satz XI. In der Ausdehnung ${}^nSL(\square)_{\times}^M$ tritt ${}^nSL(f)$ so oft auf, als der Grad des M -Komplements $\overline{{}^nSL(f)}^M$ angibt.

Satz XI kann wiederum ausgesprochen werden in der Fassung

²⁷⁾ Kurz für „lineare unimodulare (unitär beschränkte) Gruppe“.

Satz XIa. Die Ausdehnungen ${}^nSL(\square)_\times^M$ und ${}^M SL(\square)_\times^n$ sind paarweise gegenseitig komplementär nach Art des in Satz Ia ausgesprochenen Sachverhalts.

Als M -Komplement ist dabei völlig entsprechend definiert

$$\overline{{}^nSL(f)}^M = {}^M SL(n^{a_0}, (n-1)^{a_1}, (n-2)^{a_2}, \dots, (0)^{a_n})$$

wo

$$\alpha_0 = M - f_1$$

$$\alpha_i = f_i - f_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\alpha_n = f_n$$

ist. Zum Beweis benötigt man wiederum einen Verschmelzungssatz für die Verschmelzung mit ${}^nSL(\square)$, der sich auf die bekannten Sätze für die Verschmelzung mit ${}^nSL(1^\beta)$ zurückführen läßt³⁹⁾, und den Verzweigungssatz für die lineare Gruppe, der ebenfalls bekannt ist⁴⁰⁾. Der Beweis kann dann ohne Schwierigkeit ebenso geführt werden, wie es in § 5 geschehen ist, die dortigen Komplikationen bei Betrachtung des Spiegelungsverhaltens entfallen sogar. Wir glauben, auf die Durchführung verzichten zu können.

${}^nSL(\square)$ gibt bei Beschränkung auf die orthogonale Gruppe im n -Dimensionalen offenbar gerade ${}^nO(0) + (1) + \dots + \varepsilon(1) + \varepsilon(0)$, also ${}^nO(\Delta)_\times^n$ für gerades $n = 2\nu$ ⁴⁰⁾. Auf den Zusammenhang zwischen Satz I und Satz XI wirft also Licht die Gegenüberstellung der Ausdehnungen ${}^nSL(\square)_\times^M$ und ${}^nO(\Delta)_\times^{2M}$. Die erstere zerfällt bei Beschränkung auf die Untergruppe orthogonaler Transformationen in die Darstellungen der letzteren. Die Vielfachheiten des Auftretens werden dabei durch das Hinzukommen von Spurinvarianten naturgemäß erhöht. Sie werden statt durch die Grade der in ${}^M SL(\square)_\times^n$ enthaltenen Darstellungen jetzt durch die Grade der in ${}^{2M}O(\Delta)_\times^n$ enthaltenen Darstellungen geliefert. Man erhält also folgenden Zusammenhang zwischen der Ausreduktion durch Spurbildung (${}^nSL \rightarrow {}^nO$) und der Ausreduktion der Darstellungen der orthogonalen Gruppe geradzahlicher Dimension nach ihrer maximalen Untergruppe voller linearer Transformationen (${}^{2M}O \rightarrow {}^M SL$):

Satz XII. Eine Darstellung ${}^nSL(f)$ enthält beim Übergang ${}^nSL \rightarrow {}^nO$ eine gewisse Darstellung ${}^nO(m)$ so oft, als deren $2M$ -Komplement ${}^{2M}O(\overline{m})$ beim Übergang ${}^{2M}O \rightarrow {}^M SL$ das M -Komplement ${}^M SL(\overline{f})$ von ${}^nSL(f)$ liefert, und umgekehrt.

Die Kenntnis der einen Ausreduktion liefert also volle Information über den Verlauf der anderen, und umgekehrt.

Selbstverständlich liegt der Komplementaritätserscheinung zwischen den Ausdehnungen ${}^nSL(\square)_\times^N$ und ${}^N SL(\square)_\times^n$ wiederum die Eigenschaft ihrer einhüllenden Matrixalgebren, gegenseitig kommutatoralgebren zu sein, zu Grunde.

³⁹⁾ Classical Groups.

⁴⁰⁾ H. WEYL: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig 1928, p. 256.

⁴¹⁾ Wir betrachten im folgenden nur diesen Fall, ungerades $n = 2\nu + 1$ bringt nur unwesentliche Abänderungen.

Daraus erhält man durch den Struktursatz XI Aussagen über den Rang dieser Kommutatoralgebren, d. h. explizit über den Rang der konkreten ausreduzierenden Algebra der Ausdehnung (er ist gleich dem Grad von ${}^{2^M}SL(n^M)$) und über den Rang der einhüllenden Matrixalgebra der Ausdehnung (er ist gleich dem Grad von ${}^{2^n}SL(M^n)$). Die im Text weiter durchgeführten Überlegungen können sich sinngemäß anschließen.

(Eingegangen am 5. März 1954.)

Correction.

"Coefficient Properties of Fourier Series with a Gap Condition" by M. E. NOBLE, Math. Annalen 128, 55—62.

2. line 3. Replace " $n_k < m \leq m_k$ " by " $0 < |n - n_k| \leq N_k$ ".
 2. line 4. Replace " $m_k - n_k$ " by " N_k ".
 3. line 3. Replace "Max." by "Min."
 3. line 18. Insert "and positive" after "increasing",
- p. 62 Equation is (4.12).

Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen.

(I. Mitteilung)

Von

HEINZ OTTO CORDES in Göttingen.

Bei der Untersuchung des Punktspektrums partieller Differentialoperatoren ist die Methode des Produktansatzes, durch den man partielle Differentialgleichungen in mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen aufspaltet, ein gebräuchliches Verfahren. Immer wenn die Form der Eigenwertgleichung einen solchen Ansatz erlaubt und eine Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen des Problems möglich ist, ergibt sich auch eine Entwicklung nach Eigenfunktionen in Produktform.

Wenn ein partieller Differentialoperator mit separierbarer Eigenwertgleichung neben seinem Punktspektrum auch ein kontinuierliches Spektrum besitzt, so wird man erwarten, daß sich auch Eigenpakete des Operators aus Produkten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Integration zusammensetzen lassen. Es liegt nahe, zu vermuten, daß ein vollständiges System von Eigenpaketen auf diese Weise gewonnen werden kann. Für ein spezielles Problem, das bei der Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ in einem unendlichen, von gewissen Flächen vierter Ordnung begrenzten Gebiet eine Rolle spielt, ist die Richtigkeit dieser Vermutung seit langem bekannt. Den Beweis führte E. HILB [7], indem er den fraglichen Differentialoperator durch eine Folge separierbarer Operatoren mit diskretem Spektrum approximierte.

In vorliegender Arbeit wird die Separation von einem von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen losgelösten Standpunkt betrachtet: Die den Produktansatz ermöglichende Gestalt von Differentialgleichung und Randbedingungen erzeugt eine Aufspaltung des gegebenen partiellen Differentialoperators A in ein Aggregat von gewöhnlichen Differentialoperatoren A^1 und A^2 , $A = \frac{1}{s^2 A^1 + t^2 A^2} (s^2 A^1 + t^2 A^2)$, in dem s^i, t^i gewisse Funktionen von nur einer Variablenart sind. Man kann sich nun die Frage stellen: *In welcher Weise wird die Spektralzerlegung des Operators A durch die Operatoren A^1 und A^2 und ihre Spektralzerlegungen bestimmt?* Die Bedingungen für die Möglichkeit dieser Frage habe ich in meiner Dissertation untersucht. Es ergab sich, daß die Existenz je einer Spektralzerlegung von A^1 und von A^2 nicht die Existenz der Spektralzerlegung von A garantiert, jedoch konnte aus gewissen Zusatzbedingungen über A^1, s^i, t^i die wesentliche Selbstadjungiertheit von A hergeleitet werden. Insbesondere läßt die oben erwähnte Vollständigkeit der Eigenelemente in Produktform bei allen bisher untersuchten separierbaren Problemen mit reinem Punktspektrum diese Frage angemessen erscheinen.

Unter allen selbstadjungierten partiellen Differentialoperatoren bilden die separierbaren Operatoren eine Klasse, die auch unabhängig von der gerade speziell gewählten Koordinatenart charakterisiert werden kann. Zu einem selbstadjungierten partiellen Differentialoperator zweiter Ordnung z. B., der ggf. nach Einführung irgendwelcher neuer Veränderlicher dem Produktansatz zugänglich ist, existiert stets ein anderer separierbarer selbstadjungierter Differentialoperator zweiter Ordnung \tilde{A} , so daß A und \tilde{A} vertauschbar sind und daß das Spektrum des normalen Operators $V = A + i\tilde{A}$ in jedem Punkt $\zeta = \lambda + i\mu$ der komplexen Ebene höchstens vierfach ist. Man kann dies benutzen, um einfache Kriterien aufzustellen, die erkennen lassen, ob ein partieller Differentialoperator überhaupt in irgendwelchen Veränderlichen dem Produktansatz zugänglich ist.

In unserer Schreibweise besitzt der Operator \tilde{A} die Gestalt

$$\tilde{A} = \frac{1}{s^1 s^2 + t^1 t^2} (A^1 t^2 - s^1 A^2).$$

Da A und \tilde{A} vertauschbar sind, ersetzen wir das Eigenwertproblem $A\varphi = \lambda\varphi$ durch das „Simultaneigenwertproblem“ $A\varphi = \lambda\varphi$, $\tilde{A}\varphi = \mu\varphi$. Dieses erweist sich als dem Separationsansatz insofern besser angepaßt, als jede seiner Lösungen von selbst den separierten Gleichungen

$$A^1\varphi = \lambda s^1\varphi + \mu t^1\varphi, \quad A^2\varphi = \lambda t^2\varphi - \mu s^2\varphi$$

genügt, ohne daß φ in Produktform angenommen zu werden braucht. Demgemäß sind unsere Aussagen auf die „Simultanspektralschar“ $F_{\lambda\mu} = E_\lambda \tilde{E}_\mu$ dieses Problems bezogen; E_λ und \tilde{E}_μ seien dabei die üblichen HILBERTSchen Spektralscharen der Operatoren A und \tilde{A} .

Das Hauptresultat in Hinsicht auf die Separation partieller Differentialgleichungen ist ein allgemeiner Entwicklungssatz (Satz 5) für Gleichungen in zwei Veränderlichen in einer Form, die sich an diejenige der bekannten, erstmalig von H. WEYL gegebenen Entwicklungen bei singulären STURM-LIOUVILLEschen Eigenwertproblemen anschließt. Hilfsmittel dazu ist folgendes Zwischenergebnis, das auch in Fällen von mehr Variablen zu entsprechenden Entwicklungssätzen führt: Wenn $(A^1 - i)^{-1}$ und $(A^2 - i)^{-1}$ Integraloperatoren vom CARLEMANSchen Typus sind, dann sind die Abschnitte $F_I = (E_{\lambda''} - E_{\lambda'}) (\tilde{E}_{\mu''} - \tilde{E}_{\mu'})$ der Simultanspektralschar Integraloperatoren vom CARLEMANSchen Typus (Satz 4).

Der Vorteil des eingeschlagenen Verfahrens ist es insbesondere, daß alle Voraussetzungen sich auf die Operatoren A^j beziehen, deren Spektraltheorie zumeist gut bekannt ist, während Forderungen über das spektraltheoretische Verhalten des partiellen Operators A nicht benötigt werden. Daher braucht z. B. der zu A gehörige Differentialausdruck keineswegs vom elliptischen Typus zu sein.

Satz 5 enthält als Spezialfälle den oben erwähnten HILBSchen Entwicklungssatz sowie alle übrigen bekannten Entwicklungssätze nach Eigenfunktionen hermitescher separierbarer partieller Differentialoperatoren. Als Beispiel

einer separierbaren Gleichung, deren zugehörige Entwicklung nach Eigen-
elementen in Produktform bisher nicht bewiesen war, erwähne ich die *Schrö-
dingergleichung des Starkeffektes beim Wasserstoff*, $-\Delta u - \frac{2Z}{r}u + \varepsilon xu = \lambda u$,
die sich nach Einführung von parabolischen Koordinaten separieren läßt.
Wir gehen auf dieses Beispiel in § 16 des zweiten Teiles näher ein.

Die genannte Fragestellung legt nahe, die oben skizzierte Untersuchung
des Produktansatzes gleich bei abstrakten separierbaren Operatoren HILBERT-
scher Räume anzustellen. In [3] habe ich definiert, was ich unter einem *ab-
strakten separierbaren Operator* verstehe. Diese Definition ist hier zugrunde
gelegt. In § 1 wird sie noch einmal ausgeführt (unter Vermeidung aller hier
überflüssigen Zusätze), daher ist die Kenntnis von [3] zum Verständnis nicht
unbedingt erforderlich. Die in [3] hergeleiteten Selbstadjungiertheitskriterien
benutzen wir an genau einer Stelle, nämlich beim Beweis des Satzes 1.

Auf diese abstrakt definierten separierbaren Operatoren beziehen sich
unsere Aussagen zu obiger Frage im zweiten Teil der Arbeit. Sie sind natür-
lich auch von Interesse für den Fall der Differentialgleichung, besitzen jedoch
das besondere Kennzeichen, daß sie die Art des Aufbaues der Spektral-
zerlegung von A unmittelbar an Hand der Spektralzerlegungen von A^1 und A^2
studieren und nirgends vom Begriff der nicht quadratisch integrierbaren Lö-
sungen der Gleichung $A^j \varphi^j = \lambda \varphi^j$ Gebrauch machen, der ja für abstrakte
Operatoren nicht mehr existiert.

Der Beweisgang verwendet in seinem ersten Teil (§ 1—4) in geringfügiger
Modifikation die bereits in [4] benutzten Gedanken. Anstatt wie dort der
Normalität des Operators $V = A + i\tilde{A}$ beweisen wir hier die wesentliche
Selbstadjungiertheit von $A = \operatorname{Re} V$ und $\tilde{A} = \operatorname{Im} V$ (§ 2) sowie die Vertausch-
barkeit dieser Operatoren (§ 4). Haupthilfsmittel zum Beweis aller genannten
Sätze ist eine Darstellung der Operatoren A^j in der Form

$$A^1 = s^1 A + t^1 \tilde{A}, \quad A^2 = t^2 A - s^2 \tilde{A},$$

die für beschränkte Operatoren A^j , A , \tilde{A} das Ergebnis einer trivialen Rechnung
ist, allgemein aber nur unter wesentlicher Benutzung der Voraussetzungen
von Satz 1 (der Bedingungen (1_s) bis (2_l)) durch einen etwas verwickelten
Grenzübergang geschlossen werden kann (§ 6).

Die Aussage des Hilfssatzes 5 kann auf folgende Weise vom Standpunkt
der Störungstheorie der Spektralzerlegung aus gedeutet werden: H in \mathfrak{D}_H sei
hypermaximal, s beschränkt, hermitesch und positiv definit. Die Menge m_ε
der reellen Zahlen λ , für die die Form $(u, s u)$ für alle u aus einem Spektral-
raum \mathfrak{H}_A des Operators $H - \varepsilon s$, ε reell, zu einem Intervall $\Delta \ni \lambda$ durch eine
positive Schranke nach unten beschränkt ist, hängt nicht von ε ab. Oder:
Die Menge m_ε der reellen Zahlen λ , für die $(H - \varepsilon s - \lambda - i s)^{-1}$ beschränkt
ist, ist unabhängig von der speziellen Wahl der reellen Konstanten ε .

Den Ausführungen des § 8 ist als Schema ein Beweis des Entwicklungss-
atzes singulärer Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme zugrunde gelegt, den ich
einer Vorlesungsausarbeitung von F. RELICH entnehme [11].

Herrn Professor RELICH bin ich ferner für eine Reihe von Diskussionen sehr zum Dank verpflichtet.

§ 1. Der separierbare Operator A in \mathfrak{H} und der Operator \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Es seien vorgelegt zwei abstrakte (separable) Hilberträume \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 mit den Elementen u^1, v^1, f^1, g^1 bzw. u^2, v^2, f^2, g^2 , den Skalarprodukten (u^1, v^1) bzw. (u^2, v^2) und den Metriken

$$\|u^1\| = [(u^1, u^1)]^{\frac{1}{2}}, \quad \|u^2\| = [(u^2, u^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

In \mathfrak{H}^j , $j = 1, 2$ seien s^j, t^j beschränkte, hermitesche, positiv definite Operatoren, es gelte $s^j + t^j = 1$, $j = 1, 2$.

Für u^1 aus \mathfrak{H}^1 , u^2 aus \mathfrak{H}^2 werde das (formale) beiderseitig lineare und distributive Produkt $u^1 u^2$ erklärt. $u^1 u^2$ werde als Vektor gedeutet; alle Produkte $u^1 u^2$ und deren endliche Linearkombinationen bilden einen linearen Raum \mathfrak{H} ,

in dem für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$, $v = \sum_{r=1}^{N'} v_r^1 v_r^2$ das Skalarprodukt

$$(1.1) \quad (u, v) = \sum_{r=1}^{N, N'} [(u_r^1, s^1 v_r^1) (u_r^2, s^2 v_r^2) + (u_r^1, t^1 v_r^1) (u_r^2, t^2 v_r^2)]$$

erklärt werde. (u, v) ist positiv definit¹⁾.

Definition: Den durch Ergänzung von \mathfrak{H}' mit idealen Elementen hinsichtlich der durch (u, v) induzierten Metrik $\|u\| = [(u, u)]^{\frac{1}{2}}$ entstehenden Raum wollen wir mit \mathfrak{H} bezeichnen. Elemente des Raumes \mathfrak{H} seien stets ohne jeden oberen Index bezeichnet, also u, v, f, g .

Wenn die Räume \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 Funktionenräume sind mit den Skalarprodukten $(u^1, v^1) = \int \bar{u}^1 v^1 \varrho^1 dV^1$; $(u^2, v^2) = \int \bar{u}^2 v^2 \varrho^2 dV^2$ (ϱ^1, ϱ^2 zwei positive Funktionen, dV^1, dV^2 = Volumelemente), liegt es nahe, das Produkt $u^1 u^2$ als Produkt der beiden Funktionen u^1 und u^2 zu deuten. Setzt man ferner voraus, daß die Operationen s^j, t^j in Multiplikationen mit reellen, positiven Funktionen s^1, t^1, s^2, t^2 bestehen, so folgt

$$(1.2) \quad (u, v) = \iint \bar{u} v (s^1 s^2 + t^1 t^2) \varrho^1 \varrho^2 dV^1 dV^2.$$

Der Raum \mathfrak{H} ist dann der Raum aller Funktionen f mit

$$\iint |f|^2 (s^1 s^2 + t^1 t^2) \varrho^1 \varrho^2 dV^1 dV^2 < \infty.$$

Es erweist sich für manche Herleitungen als bequem, die Vorstellung des Funktionenraumes auch bei abstrakten Räumen $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2$ und \mathfrak{H} zur Verfügung zu haben. Es ist möglich, einen abstrakten Hilbertraum \mathfrak{R} , in dem ein hypermaximaler Operator s erklärt ist, durch einen Raum \mathfrak{R}' von Funktionen $f(x)$ so darzustellen, daß dem Operator s in \mathfrak{R}' die Multiplikation mit x entspricht (vgl. dazu den Begriff der Spektraldarstellung bei FRIEDRICHS [5], S. 362f.). Genauer: σ sei das Spektrum von s in \mathfrak{R} . Die „Funktion“ $f(x)$ ordne jedem x aus σ einen Vektor eines gewissen, von x abhängenden Hilbertraumes \mathfrak{S}_x zu. Die (endliche oder unendliche) Dimension von \mathfrak{S}_x wird dabei bestimmt durch die Vielfachheit des Punktes x im Spektrum von s . Das Skalarprodukt in \mathfrak{S}_x

¹⁾ Diese Behauptung wird im weiteren Verlauf dieses Paragraphen begründet werden. Einen abstrakten Beweis findet man z. B. in [3].

werde statt mit $(f(x), g(x))$ einfacher mit $\overline{f(x)} g(x)$ bezeichnet, ebenso die Norm mit $|f(x)|$. \mathfrak{R} sei der Raum aller $f(x)$, für die im Sinne von LEBESGUE gilt $\int_{\sigma} |f(x)|^2 d\tau(x) < \infty$ mit einer passend gewählten, reellwertig erklärten, in σ starkmonoton wachsenden Basisfunktion $\tau(x)$. Es ist möglich, jedem f aus \mathfrak{R} ein $f(x)$ aus \mathfrak{R}' umkehrbar eindeutig zuzuordnen, so daß gilt

$$a f + b g \leftrightarrow a f(x) + b g(x); \quad s f \leftrightarrow x f(x); \\ (f, g) = \int_{\sigma} \overline{f(x)} g(x) d\tau(x).$$

Man bezeichne beliebige Spektraldarstellungen der Räume \mathfrak{H}^j in bezug auf die Operatoren s^j mit $\mathfrak{H}^j(s^j)$:

$$\mathfrak{H}^1 \leftrightarrow \mathfrak{H}^1(s^1), \quad \mathfrak{H}^2 \leftrightarrow \mathfrak{H}^2(s^2) \\ f^1 \leftrightarrow f^1(x), \quad f^2 \leftrightarrow f^2(y)$$

so daß also gilt

$$s^1 f^1 \leftrightarrow x f^1(x), \quad s^2 f^2 \leftrightarrow y f^2(y) \\ t^1 f^1 \leftrightarrow (1-x) f^1(x), \quad t^2 f^2 \leftrightarrow (1-y) f^2(y).$$

Dabei ist $f^1(x)$ in einer abgeschlossenen Teilmenge σ^1 des Intervalles $0 \leq x \leq 1$ erklärt, $f^2(y)$ ebenso in einer abgeschlossenen Teilmenge σ^2 von $0 \leq y \leq 1$ und es gilt mit zwei Basisfunktionen $\tau^1(x)$, $\tau^2(y)$:

$$\int_{\sigma^1} |f^1(x)|^2 d\tau^1(x) < \infty, \quad \int_{\sigma^2} |f^2(y)|^2 d\tau^2(y) < \infty.$$

Der oben definierte Raum \mathfrak{H} wird dann dargestellt durch den Raum aller $f(x, y)$; x aus σ^1 , y aus σ^2 , mit

$$\int_{\sigma^1} \int_{\sigma^2} |f(x, y)|^2 (s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)) d\tau^1(x) d\tau^2(y) < \infty.$$

Dabei bedeutet $f(x, y)$ für jedes x aus σ^1 , y aus σ^2 ein Element von $\mathfrak{S}_{xy} = \mathfrak{S}_x^1 \otimes \mathfrak{S}_y^1$, dem direkten Produkt im v. NEUMANNschen Sinne der Räume \mathfrak{S}_x^1 und \mathfrak{S}_y^1 , und es gilt $s^1(x) = x$, $t^1(x) = 1 - x$, $s^2(y) = y$, $t^2(y) = 1 - y$. Insbesondere korrespondiert einem Element $u = u^1 u^2$ die Darstellung $u(x, y) = u^1(x) u^2(y)$.

Diese Tatsache kann man zum Anlaß nehmen, sich im ferneren \mathfrak{H}^1 , \mathfrak{H}^2 und \mathfrak{H} stets als Funktionenräume, die Operatoren s^j , t^j als Multiplikationen mit obigen Funktionen $s^j(x)$, $s^j(y)$ usw. vorzustellen, was wir gelegentlich tun werden, wenn es sich als nützlich erweist.

Wir bemerken z. B., daß die anfangs behauptete positive Definitheit der Form (u, u) für solche Funktionenräume evident ist.

Der Raum \mathfrak{H} ist ein (separabler) Hilbertraum.

Die abstrakte Begründung dieser für gewöhnliche Funktionenräume selbstverständlichen Tatsache lese man in [3] nach²⁾.

Für $u = u^1 u^2$ erklären wir den linearen Operator C durch

$$C u = s^1 u^1 s^2 u^2 + t^1 u^1 t^2 u^2.$$

C ist beschränkt, das folgt, weil

²⁾ Kap. I, § 3.

$$\begin{aligned}\|Cu\|^2 &= \int \int_{\sigma^1 \sigma^1} |(s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)) u(x, y)|^2 (s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)) d\tau^1(x) d\tau^2(y) \\ &\leq 4 \int \int_{\sigma^1 \sigma^1} |u(x, y)|^2 (s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)) d\tau^1(x) d\tau^2(y) = \|u\|^2\end{aligned}$$

gilt; man kann den Operator auf ganz \mathfrak{H} stetig fortsetzen. C ist positiv definit, wie man sofort sieht, wenn man die Spektraldarstellung hinzuzieht; daher existiert die Reziproke $B = C^{-1}$ in einem dichten Definitionsbereich \mathfrak{B} als nicht mehr notwendig beschränkter, hypermaximaler Operator des Raumes \mathfrak{H} , es sei also definiert

\mathfrak{B} : Alle u aus \mathfrak{H} , zu denen es ein f aus \mathfrak{H} gibt mit $Cf = u$; $Bu = f$. Für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ aus \mathfrak{H} , $v = \sum_{r=1}^{N'} v_r^1 v_r^2$ aus \mathfrak{B} merken wir uns zum späteren Gebrauch die Formel

$$(1.3) \quad (u, Bv) = \sum_{r, \kappa=1}^{N, N'} (u_r^1, v_\kappa^1) (u_r^2, v_\kappa^2).$$

Sie folgt ebenfalls durch Übergang zur Spektraldarstellung:

$$\begin{aligned}(u, Bv) &= \int \int_{\sigma^1 \sigma^1} \overline{u(x, y)} \frac{1}{s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)} v(x, y) (s^1(x) s^2(y) + \\ &\quad + t^1(x) t^2(y)) d\tau^1(x) d\tau^2(y) \\ &= \int \int_{\sigma^1 \sigma^1} \sum_{r=1}^N \overline{u_r^1(x) u_r^2(y)} \sum_{r=1}^{N'} v_r^1(x) v_r^2(y) d\tau^1(x) d\tau^2(y) \\ &= \sum_{r, \kappa=1}^{N, N'} \left(\int_{\sigma^1} \overline{u_r^1(x)} v_\kappa^1(x) d\tau^1(x) \int_{\sigma^2} \overline{u_r^2(y)} v_\kappa^2(y) d\tau^2(y) \right) \\ &= \sum_{r, \kappa=1}^{N, N'} (u_r^1, v_\kappa^1) (u_r^2, v_\kappa^2).\end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, es sei in Definitionsbereichen \mathfrak{A}^1 bzw. \mathfrak{A}^2 je ein weiterer selbstadjungierter (hypermaximaler) Operator A^1 bzw. A^2 des Raumes \mathfrak{H}^1 bzw. \mathfrak{H}^2 erklärt. Dann definieren wir folgende beiden linearen Operatoren des Raumes \mathfrak{H} :

A in \mathfrak{A} :

\mathfrak{A} bestehe aus allen endlichen Linearkombinationen von Vektoren $u = u^1 u^2$, für die gilt u^1 aus \mathfrak{A}^1 , u^2 aus \mathfrak{A}^2 und für die der Vektor $A^1 u^1 s^2 u^2 + t^1 u^1 A^2 u^2$ im Raum \mathfrak{B} liegt; A sei für solche $u = u^1 u^2$ definiert durch

$$(1.4) \quad Au = B(A^1 u^1 s^2 u^2 + t^1 u^1 A^2 u^2)$$

und linear sonst.

\tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$:

$\tilde{\mathfrak{A}}$ bestehe aus allen endlichen Linearkombinationen von Vektoren $u = u^1 u^2$, für die gilt u^1 aus \mathfrak{A}^1 , u^2 aus \mathfrak{A}^2 und $A^1 u^1 t^2 u^2 - s^1 u^1 A^2 u^2$ aus \mathfrak{B} ; es gelte

$$(1.5) \quad \tilde{A}u = B(A^1 u^1 t^2 u^2 - s^1 u^1 A^2 u^2) \text{ für } u = u^1 u^2.$$

Das Eigenwertproblem $A\varphi = \lambda\varphi$ des Operators A in \mathfrak{A} kann in ähnlicher Weise separiert werden wie gewisse Eigenwertprobleme partieller Differential-

gleichungen. Für Eigenelemente $\varphi = \varphi^1 \varphi^2 \neq 0$ in Produktform folgen³⁾ aus der Eigenwertgleichung mit einer passenden Konstanten μ die Beziehungen

$$(1.6) \quad A^1 \varphi^1 = \lambda s^1 \varphi^1 + \mu t^1 \varphi^1, \quad A^2 \varphi^2 = \lambda t^2 \varphi^2 - \mu s^2 \varphi^2.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Parameter λ , so ergibt sich

$$A^1 \varphi^1 t^2 \varphi^2 - s^1 \varphi^1 A^2 \varphi^2 = \mu C (\varphi^1 \varphi^2), \text{ also } \tilde{A} \varphi = \mu \varphi.$$

Die Annahme der Existenz einer Spektralzerlegung, die der Methode der Separation der Variablen zugänglich ist, läßt daher vermuten, daß die Operatoren A und \tilde{A} im strengen, spektraltheoretischen Sinne vertauschbar sind, denn es zeigt sich so, daß ein vollständiges System von Eigenelementen in Produktform des Operators A ein simultanes Eigenvektorensystem von A und \tilde{A} sein müßte. Wir werden nun umgekehrt im Verlaufe unseres Vollständigkeitsbeweises für die durch Separation der Variablen gewinnbaren Eigenvektoren und Eigenpakete zunächst die Vertauschbarkeit von A und \tilde{A} nachweisen, alsdann aber daraus den Entwicklungssatz herleiten.

§ 2. Wesentliche Selbstadjungiertheit von A in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Bevor wir in der Lage sind, mit den oben definierten Operatoren zu arbeiten, müssen wir uns überlegen, inwieweit dieselben sinnvoll sind. Insbesondere werden uns ihre spektraltheoretischen Eigenschaften zu interessieren haben. Es zeigt sich, daß es schon einige Überlegungen kostet, etwa nur die Dichtheit der Definitionsbereiche \mathfrak{A} und $\tilde{\mathfrak{A}}$ im Raum \mathfrak{H} nachzuweisen. Weitere Eigenschaften, etwa die wesentliche Selbstadjungiertheit von A oder \tilde{A} , beweisen sich unter entsprechend gesteigerten Schwierigkeiten.

Unter teilweiser Berufung auf [3] sprechen wir den folgenden Satz aus.

Satz 1: Zu jedem reellen α mit Ausnahme einer Menge von höchstens abzählbar vielen Punkten gebe es ein offenes Intervall $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, so daß mit $E_{\lambda}^1 = E_{\alpha_1}^1 - E_{\alpha_2}^1$, $E_{\lambda}^2 = E_{\alpha_1}^2 - E_{\alpha_2}^2$ (E_{λ}^1 , E_{λ}^2 die (rechtsstetigen) Spektralscharen von A^1 in \mathfrak{A}^1 und A^2 in \mathfrak{A}^2 gilt entweder

$$(1_s) \quad \|E_{\lambda}^1 u^1\|^2 \leq c(\lambda) (E_{\lambda}^1 u^1, s^1 E_{\lambda}^1 u^1)$$

oder

$$(2_t) \quad \|E_{\lambda}^2 u^2\|^2 \leq c(\lambda) (E_{\lambda}^2 u^2, t^2 E_{\lambda}^2 u^2)$$

mit einem von u^i unabhängigen $c(\lambda)$ und für alle u^i aus \mathfrak{H}^i .

Behauptung: A in \mathfrak{A} ist wesentlich selbstadjungiert.

Zusatz 1: Ersetzt man die Bedingungen (1_s) , (2_t) in den Voraussetzungen von Satz 1 durch

$$(1_t) \quad \|E_{\lambda}^1 u^1\|^2 \leq c(\lambda) (E_{\lambda}^1 u^1, t^1 E_{\lambda}^1 u^1)$$

bzw.

$$(2_s) \quad \|E_{\lambda}^2 u^2\|^2 \leq c(\lambda) (E_{\lambda}^2 u^2, s^2 E_{\lambda}^2 u^2)$$

³⁾ Denn aus $A \varphi = \lambda \varphi$ folgt $(A^1 - \lambda s^1) \varphi^1 s^2 \varphi^2 + t^1 \varphi^1 (A^2 - \lambda t^2) \varphi^2 = 0$ und man zeigt leicht die folgende Behauptung: Wenn $\sum_{r=1}^N u_r^1 = 0$ gilt, dann folgt $Rg(u_1^1, \dots, u_N^1) + Rg(u_1^2, \dots, u_N^2) \leq N$.

mit $E_2^z = E_{\alpha_2}^z - E_{\alpha_1}^z$, so lautet die Behauptung:

\tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist wesentlich selbstadjungiert.

Zusatz 2: Wenn A^1 in \mathfrak{A}^1 ein diskretes Spektrum besitzt, d. h., wenn es ein vollständiges System von Eigenelementen q_j^1 , $j = 1, 2, \dots$, gibt, für deren zugehörige Eigenwerte λ_j gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = +\infty$, wie überhaupt, wenn das Spektrum von A^1 höchstens abzählbar viele Häufungspunkte besitzt, dann sind die beiden Bedingungen (1_s) und (1_t) in einer für Satz 1 und dessen Zusatz 1 ausreichenden Menge von Punkten α erfüllt, A in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind also beide wesentlich selbstadjungiert.

Man bemerke, daß das in Satz 1 ausgesprochene Kriterium für die wesentliche Selbstadjungiertheit von A in \mathfrak{A} eine Verschärfung des Kriteriums III aus [3] ist, bei dem das Erfülltsein beider Bedingungen (1_s) , (2_t) für alle α außer abzählbar Vielen verlangt wird. Den Beweis von Satz 1 geben wir durch Zurückführung auf [3], Kriterium II (in § 5 wird sich zeigen, daß sich auch Kriterium II auf das Kriterium des Satzes I zurückführen läßt; beide Kriterien erweisen sich also als äquivalent).

Zunächst leuchtet die Begründung der beiden Zusätze wohl unmittelbar ein, sofern wir uns den Satz bewiesen denken. Zur Folgerung von Zusatz 2 aus Satz 1 verende man, daß die Ungleichungen (1_s) , (1_t) trivialerweise erfüllt sind, falls die Dimension des Wertebereiches von E_A^1 endlich ist.

Kriterium II aus [3] ist offenbar anwendbar, wenn es uns gelingt, zu zeigen, daß das Erfülltsein der Bedingung (1_s) für ein reelles α die Existenz und Beschränktheit der Reziproken $R_{\alpha, s}^1 = (A^1 - i s^1 - \alpha t^1)^{-1}$ nach sich zieht bzw. das Erfülltsein von (2_t) die Beschränktheit von $R_{\alpha, i}^2 = (A^2 + \alpha s^2 - i t^2)^{-1}$ nach sich zieht. Das wiederum ergibt sich aus nachfolgendem Hilfssatz.

Hilfssatz 1: Es sei \mathfrak{K} ein (separabler) Hilbertraum und H in \mathfrak{D}_H darin ein selbstadjungierter (hypermaximaler) Operator, E_λ dessen (rechtsstetige) Spektralschar. s und t seien zwei beschränkte, hermitesche, positiv definite Operatoren, die der Beziehung $s + t = 1$ genügen. Zu der reellen Zahl α_0 gebe es zwei Zahlen α_1, α_2 mit $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$, so daß für alle u aus \mathfrak{K} gilt

$$\|E_A u\|^2 \leq c (E_A u, s E_A u) \quad \text{mit} \quad E_A = E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1}.$$

Dann sind $R_{\pm i, \alpha_0} = (H \mp i s - \alpha_0 t)^{-1}$ beschränkte, überall in \mathfrak{K} erklärte Operatoren.

Beweis: Man erzeuge mit Hilfe der positiv definiten Formen $(u, v)_s = (u, s v)$ und $(u, v)_t = (u, t v)$ durch Ergänzen von \mathfrak{K} mit idealen Elementen nach den Metriken $\|u\|_s = [(u, u)_s]^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|_t = [(u, u)_t]^{\frac{1}{2}}$ die beiden neuen Hilberträume \mathfrak{K}_s und \mathfrak{K}_t . Der Operator s kann dann auf ganz \mathfrak{K}_s durch Abschließen fortgesetzt werden und stellt auch dort einen beschränkten, hermiteschen, positiv definiten Operator dar. Dessen Reziproke wollen wir mit l in \mathfrak{L} bezeichnen; ihr Definitionsbereich \mathfrak{L} ist identisch mit dem Definitionsbereich der Reziproken von $(s)^{\frac{1}{2}}$ in \mathfrak{K} , des Operators $(s)^{-\frac{1}{2}}$, also nicht nur in \mathfrak{K}_s , sondern auch noch in \mathfrak{K} enthalten und außerdem ein dichter Unterraum von \mathfrak{K} (im Sinne der Metrik $\|u\|$).

Die drei Räume \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_s , \mathfrak{R}_t bilden nach [3], Def. 1.1.1 ein \mathfrak{P} -System und der Operator H in \mathfrak{D}_H erfüllt für den Punkt α_0 die Voraussetzungen der Hilfssätze 1.2.6 und 1.2.7. Wir wollen zeigen, daß zudem folgende Verschärfung einer Aussage von Hilfssatz 1.2.8 richtig ist: Es gilt für

$$R_{\pm i, \alpha_0}^s = [l(H - \alpha_0 t) \mp i]^{-1}$$

und u aus \mathfrak{R}_s die Abschätzung $\|R_{\pm i, \alpha_0}^s u\| \leq c_s \|u\|_s$ mit von u unabhängigem c_s ($R_{\pm i, \alpha_0}^s$ ist nach Hilfssatz 1.2.6 überall in \mathfrak{R}_s erklärt). Dazu schließe man genau analog zum Beweis von Hilfssatz 1.2.8. Angenommen, es gäbe keine Konstante c_s , mit welcher diese Abschätzung gültig sei. Dann folgte die Existenz einer Folge u_n von Vektoren aus \mathfrak{D}_s , so daß gälte $\|u_n\|_s = 1$, $\|R_{\pm i, \alpha_0}^s u_n\| > n \|u_n\|_s$. Hierin setzte man ein $R_{\pm i, \alpha_0}^s u_n = w_n \|R_{\pm i, \alpha_0}^s u_n\|$ und erhielt nach Division durch n und $\|R_{\pm i, \alpha_0}^s u_n\|$ die Abschätzungen $\|l(H - \alpha_0 t) \mp i\| w_n\|_s < \frac{1}{n}$, woraus folgte $[l(H - \alpha_0 t) \mp i] w_n \rightarrow 0$, wobei das Zeichen \rightarrow die Konvergenz im Sinne der Metrik $\|u\|_s$ andeuten soll.

Nun ist aber der Operator $l(H - \alpha_0 t)$ in bezug auf das Skalarprodukt $(u, v)_s$ hermitesch, daher folgt

$$\|(l(H - \alpha_0 t) \mp i) w_n\|_s^2 = \|l(H - \alpha_0 t) w_n\|_s^2 + \|w_n\|_s^2;$$

also gälte auch $w_n \rightarrow 0$. Dies hingegen zöge nach sich (Berücksichtigung von $s + t = 1$)

$$l(H - \alpha_0) w_n = [l(H - \alpha_0 t) \mp i] w_n + (\pm i - \alpha_0) s w_n \rightarrow 0.$$

Schließlich folgte aus $l(H - \alpha_0) w_n \rightarrow 0$ sofort $(H - \alpha_0) w_n \rightarrow 0$ im Sinne der Metrik von \mathfrak{R} . Aber aus $(H - \alpha_0) w_n \rightarrow 0$, $w_n \rightarrow 0$ folgte nach Hilfssatz 1.2.7 sofort $w_n \rightarrow 0$. Das wäre ein Widerspruch, weil $\|w_n\| = 1$ vorausgesetzt wurde.

Für u aus \mathfrak{R}_s gilt nun

$$R_{\pm i, \alpha_0}^s u = (H - \alpha_0 t \mp i s)^{-1} s u = R_{\pm i, \alpha_0} s u.$$

Die Operatoren $R_{\pm i, \alpha_0}^s$ existieren und sind, da nach [3], Hilfssatz 1.2.6, R_{i, α_0}^s in ganz \mathfrak{R} erklärt ist, mindestens im Definitionsbereich \mathfrak{L} des Operators l definiert. Daraus folgt für v aus \mathfrak{R}_s , u aus \mathfrak{L} die Relation

$$(R_{\pm i, \alpha_0} s u, v)_s = (u, R_{\mp i, \alpha_0}^s v), \quad |(R_{\pm i, \alpha_0} s u, v)_s| \leq c_s \|u\| \|v\|_s,$$

letzteres unter Verwendung der eben gewonnenen verschärften Abschätzung. Setzt man darin $v = R_{\pm i, \alpha_0}^s u$, so folgt $\|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s \leq c_s \|u\|$. Für u aus \mathfrak{L} ergibt sich unter Anwendung der ersten Gleichung (1.32) aus [3], Hilfssatz 1.2.7, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s &\leq a \|(H - \alpha_0) R_{\pm i, \alpha_0} s u\| + b \|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s \\ &\leq a \|(H - i s - \alpha_0 t) R_{\pm i, \alpha_0} s u\| + a \|(\pm i - \alpha_0) s R_{\pm i, \alpha_0} s u\| + b \|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s \\ &\leq a \|u\| + (a |\pm i - \alpha_0| + b) \|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s; \\ \|R_{\pm i, \alpha_0} s u\|_s &\leq [a + c_s (a |\pm i - \alpha_0| + b)] \|u\|. \end{aligned}$$

Damit ist aber die Beschränktheit von $R_{\pm i, \alpha_0}^s$ für u aus \mathfrak{L} nachgewiesen, für u aus \mathfrak{R} folgt sie aus Stetigkeitsgründen.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Bedingungen der Form (1_t), (1_r), (2_r), (2_t) für die Gültigkeit der Behauptung des Satzes wesentlich sind. Es gibt einfache Gegenbeispiele separierbarer partieller Differentialoperatoren erster Ordnung, für die diese Bedingungen nicht in ausreichendem Maße erfüllt sind und die nicht wesentlich selbstadjungiert sind, ja sogar verschiedene Defektindizes besitzen.

§ 3. Approximation der Operatoren A und \tilde{A} durch Operatoren endlichen Ranges.

In diesem und dem folgenden Paragraphen möge immer vorausgesetzt werden, daß die in § 1 definierten Operatoren A in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ wesentlich selbstadjungiert sind. Dabei sei ausdrücklich bemerkt, daß wir bis § 4 einschließlich nicht etwa die Erfüllung der Voraussetzungen von Satz 1 fordern. A und \tilde{A} besitzen dann hypermaximale triviale Fortsetzungen \underline{A} in $\underline{\mathfrak{A}}$ und $\underline{\tilde{A}}$ in $\underline{\tilde{\mathfrak{A}}}$, es sind $(\underline{A} - i)^{-1}$, $(\underline{\tilde{A}} - i)^{-1}$ in ganz \mathfrak{H} erklärt und beschränkt.

Wir wollen in endlichdimensionalen, separierbaren Unterräumen \mathfrak{R}_n von \mathfrak{H} Operatoren R_n und \tilde{R}_n angeben, die in noch näher zu definierendem Sinne gegen $(\underline{A} - i)^{-1}$ bzw. $(\underline{\tilde{A}} - i)^{-1}$ konvergieren. \mathfrak{R}_n konstruieren wir folgendermaßen: Wegen der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ gibt es in dem separablen Hilbertraum \mathfrak{H} eine Folge von Vektoren φ_n aus \mathfrak{A} , so daß die Elemente $f_n = (A - i) \varphi_n$ in \mathfrak{H} dicht sind, und ebenso eine Folge ψ_n von Vektoren aus $\tilde{\mathfrak{A}}$, so daß $g_n = (\tilde{A} - i) \psi_n$ in \mathfrak{H} dicht liegen.

Für die φ_n und ψ_n gelten nach Definition von \mathfrak{A} und $\tilde{\mathfrak{A}}$ Darstellungen der Form

$$\varphi_n = \sum_{r=1}^{N_n} \varphi_{r,n}^1 \varphi_{r,n}^2, \quad \psi_n = \sum_{r=1}^{\tilde{N}_n} \psi_{r,n}^1 \psi_{r,n}^2 \quad \text{mit } \varphi_{r,n}^j, \psi_{r,n}^j \text{ aus } \mathfrak{A}^j.$$

Für einen späteren Zweck definieren wir ferner ω_n^j , $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$ als Folgen von Elementen aus \mathfrak{A}^j , für die $(A^j - i) \omega_n^j$ in \mathfrak{H}^j dicht liegt. \mathfrak{R}_n^j sei der Raum, der von allen

$$\varphi_{r,v}^j, \psi_{r',v'}^j, \omega_v^j, \quad r = 1, \dots, N_n; \quad r' = 1, \dots, \tilde{N}_n; \quad v = 1, \dots, n,$$

aufgespannt wird.

Der Unterraum \mathfrak{R}_n von \mathfrak{H} endlich sei definiert als der Raum aller $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ mit u_r^j aus \mathfrak{R}_n^j . Es gilt also $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_3 \subseteq \dots$. Für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ aus \mathfrak{H} , $v = \sum_{r=1}^{N'} v_r^1 v_r^2$ aus \mathfrak{A} folgt

$$\begin{aligned} (u, A v) &= \left(u, B \sum_{n=1}^{N'} (A^1 v_n^1 s^2 v_n^2 + t^1 v_n^1 A^2 v_n^2) \right) \\ &= \sum_{r,n=1}^{N,N'} [(u_r^1, A^1 v_n^1) (u_r^2, s^2 v_n^2) + (u_r^1, t^1 v_n^1) (u_r^2, A^2 v_n^2)] \end{aligned}$$

unter Benutzung der in § 1 hergeleiteten Formel (1.3). Der Ausdruck

$$(3.1) \quad A(u, v) = \sum_{r=1}^{N, N'} [(u_r^1, A^1 v_n^1) (u_r^2, \delta^2 v_n^2) + (u_r^1, t^1 v_n^1) (u_r^2, A^2 v_n^2)]$$

bildet eine hermitesche Bilinearform in $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ und $v = \sum_{r=1}^{N'} v_r^1 v_r^2$, die offenbar nicht nur für v aus \mathfrak{A} erklärt ist, sondern auch noch für u, v aus dem \mathfrak{A} enthaltenden Teilraum \mathfrak{D} : Alle $v = \sum_{r=1}^N v_r^1 v_r^2, v_n^j$ aus \mathfrak{A}^j . Gemäß obiger Formel gilt für u aus \mathfrak{D} , v aus \mathfrak{A} die Gleichung

$$(3.2) \quad (u, A v) = A(u, v).$$

Entsprechend kann man für u, v aus \mathfrak{D} erklären

$$(3.3) \quad \tilde{A}(u, v) = \sum_{r, n=1}^{N, N'} [(u_r^1, A^1 v_n^1) (u_r^2, t^2 v_n^2) - (u_r^1, \delta^1 v_n^1) (u_r^2, A^2 v_n^2)],$$

es folgt auch $\tilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{D}$ und

$$(3.4) \quad (u, \tilde{A} v) = \tilde{A}(u, v) \text{ für } u \text{ aus } \mathfrak{D}, v \text{ aus } \tilde{\mathfrak{A}}.$$

Auch die Form $\tilde{A}(u, v)$ ist hermitesch. Man bemerke, daß \mathfrak{D} die oben eingeführten Räume \mathfrak{R}_n enthält; da damit $A(u, v)$ und $\tilde{A}(u, v)$ für u, v aus \mathfrak{R}_n definiert sind, gibt es zwei lineare, hermitesche Transformationen A_n und \tilde{A}_n des Raumes \mathfrak{R}_n in sich, so daß gilt

$$(3.5) \quad \begin{aligned} A(u, v) &= (u, A_n v) \\ \tilde{A}(u, v) &= (u, \tilde{A}_n v) \end{aligned} \quad \text{für } u, v \text{ aus } \mathfrak{R}_n$$

und jene sind durch diese Relationen eindeutig bestimmt. Die Operatoren $R_n = (A_n - i)^{-1}$ und $\tilde{R}_n = (\tilde{A}_n - i)^{-1}$ existieren in \mathfrak{R}_n und sind beschränkt; es gilt $\|R_n u\| \leq \|u\|$, $\|\tilde{R}_n u\| \leq \|u\|$.

Hilfssatz 2: Ist P_n die Orthogonalprojektion in \mathfrak{H} auf den Raum \mathfrak{R}_n , so gelten für jedes f aus \mathfrak{H} die Relationen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n P_n f = (\underline{A} - i)^{-1} f; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n P_n f = (\underline{\tilde{A}} - i)^{-1} f; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n f = f.$$

Beweis: Da \mathfrak{R}_n mit steigendem n nach und nach alle Glieder der Folgen φ_n, ψ_n enthält, muß gelten $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n f = f$ für f aus \mathfrak{H} .

Wir zeigen weiter $A_n P_n \varphi_r = P_n A \varphi_r$ für jedes φ_r der oben eingeführten Folge, falls $n \geq r$ gilt. In der Tat liegt zunächst φ_r in \mathfrak{R}_n , sobald $n \geq r$ ist; es gilt daher $P_n \varphi_r = \varphi_r$, $A_n P_n \varphi_r = A_n \varphi_r$. Für f aus \mathfrak{H} hat man

$$(f, A_n P_n \varphi_r) = (P_n f, A_n \varphi_r) = A(P_n f, \varphi_r) = (P_n f, A \varphi_r) = (f, P_n A \varphi_r).$$

Dabei wurden u. a. die Formeln (3.2) und (3.5) benutzt. Also folgt $A_n P_n \varphi_r = P_n A \varphi_r$ für $n \geq r$.

Ebenso beweist man $\tilde{A}_n P_n \psi_r = P_n \tilde{A} \psi_r$ für $n \geq r$. Für $n \geq r$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} R_n P_n (A - i) \varphi_r &= R_n (P_n A \varphi_r - i P_n \varphi_r) \\ &= R_n (A_n P_n \varphi_r - i P_n \varphi_r) = R_n (A_n - i) P_n \varphi_r = \varphi_r, \end{aligned}$$

also

$$R_n P_n (A - i) \varphi_r = (A - i)^{-1} (A - i) \varphi_r$$

und entsprechend

$$\tilde{R}_n P_n (\tilde{A} - i) \psi_r = (\tilde{A} - i)^{-1} (\tilde{A} - i) \psi_r.$$

Zu f aus \mathfrak{H} und $\varepsilon > 0$ gibt es ein φ_{r_0} , so daß gilt

$$\|f - (A - i) \varphi_{r_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Unter Benutzung obiger Formel wird für $n \geq r_0$

$$\begin{aligned} & (\underline{A} - i)^{-1} f - R_n P_n f = \\ & = (\underline{A} - i)^{-1} [f - (A - i) \varphi_{r_0}] - R_n P_n [f - (A - i) \varphi_{r_0}]. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\|(A - i)^{-1} f - R_n P_n f\| \leq 2 \|f - (A - i) \varphi_{r_0}\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq r_0(\varepsilon).$$

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n P_n f = (\underline{A} - i)^{-1} f$ bewiesen. Analog zeigt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n P_n f = (\tilde{A} - i)^{-1} f.$$

§ 4. Die Vertauschbarkeit von A und \tilde{A} .

Darstellung von A^1 und A^2 durch A und \tilde{A} .

Wir überlegen uns, daß A_n und \tilde{A}_n aus Operatoren A_n^j, s_n^j, t_n^j der Räume \mathfrak{R}_n^j im Sinne der Definition des § 1 genau so zusammengesetzt werden können, wie A und \tilde{A} sich aus den Operatoren A^j, s^j, t^j aufbauen. A_n^j, s_n^j, t_n^j sollen dazu als lineare Operatoren von \mathfrak{R}_n^j in sich so gewählt werden, daß gilt

$$\begin{aligned} (u^j, A_n^j v^j) &= (u^j, A^j v^j) \\ (u^j, s_n^j v^j) &= (u^j, s^j v^j) \\ (u^j, t_n^j v^j) &= (u^j, t^j v^j) \end{aligned} \quad \text{für } u^j, v^j \text{ aus } \mathfrak{R}_n^j.$$

Man sieht, daß für $u = u^1 u^2, v = v^1 v^2$ aus \mathfrak{R}_n gilt

$$(u, v) = (u^1, s_n^1 v^1) (u^2, s_n^2 v^2) + (u^1, t_n^1 v^1) (u^2, t_n^2 v^2),$$

kann C_n und $B_n = C_n^{-1}$ bilden (B_n ist als Reziproke eines positiv definiten Operators im endlichdimensionalen Raum sogar beschränkt) und für

$$u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2, v = \sum_{r=1}^N v_r^1 v_r^2 \text{ aus } \mathfrak{R}_n \text{ folgt}$$

$$(u, B_n v) = \sum_{r, \kappa=1}^{N, N'} (u_r^1, v_\kappa^1) (u_r^2, v_\kappa^2).$$

Erklärt man daher für $u = u^1 u^2$ aus \mathfrak{R}_n die Operatoren

$$A'_n u = B_n (A_n^1 u^1 s_n^2 u^2 + t_n^1 u^1 A_n^2 u^2), \quad \tilde{A}'_n u = B_n (A_n^1 u^1 t_n^2 u^2 - s_n^1 u^1 A_n^2 u^2),$$

so folgt für u, v aus \mathfrak{R}_n sofort

$$(u, A'_n v) = A(u, v), \quad (u, \tilde{A}'_n v) = \tilde{A}(u, v).$$

Es müssen daher A_n und A'_n sowie \tilde{A}_n und \tilde{A}'_n identisch sein.

Um diese Relation zwischen A_n , \tilde{A}_n und den A_n^1 , s_n^1 , t_n^1 besser formulieren zu können, definieren wir für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ aus \mathfrak{R}_n

$$A_n^1 u = \sum_{r=1}^N (A_n^1 u_r^1) u_r^2, \quad A_n^2 u = \sum_{r=1}^N u_r^1 (A_n^2 u_r^2)$$

und analog $s_n^1 u$, $t_n^1 u$. Dann gilt

$$(4.1) \quad A_n = B_n (A_n^1 s_n^2 + t_n^1 A_n^2), \quad \tilde{A}_n = B_n (A_n^1 t_n^2 - s_n^1 A_n^2).$$

Satz 2: Wenn die in § 1 definierten Operatoren A in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ wesentlich selbstadjungiert sind, dann sind sie auch vertauschbar, d. h. für die Spektralscharen E_λ und \tilde{E}_μ ihrer hypermaximalen Fortsetzungen \underline{A} in $\underline{\mathfrak{A}}$ bzw. $\underline{\tilde{A}}$ in $\underline{\tilde{\mathfrak{A}}}$ gilt $E_\lambda \tilde{E}_\mu = \tilde{E}_\mu E_\lambda$, $-\infty < \lambda, \mu < +\infty$.

Beweis: Zunächst sind die Operatoren A_n und \tilde{A}_n vertauschbar, es gilt $A_n \tilde{A}_n = \tilde{A}_n A_n$, $n = 1, 2, \dots$. Denn unter Benutzung der Vertauschbarkeit von A_n^1 , s_n^1 , t_n^1 mit A_n^2 , s_n^2 , t_n^2 und von s_n^1 , t_n^1 , B_n unter sich folgt

$$\begin{aligned} A_n \tilde{A}_n - \tilde{A}_n A_n &= B_n \{ (A_n^1 s_n^2 + t_n^1 A_n^2) B_n (A_n^1 t_n^2 - s_n^1 A_n^2) - \\ &\quad - (A_n^1 t_n^2 - s_n^1 A_n^2) B_n (A_n^1 s_n^2 + t_n^1 A_n^2) \} \\ &= B_n \{ A_n^2 (s_n^1 s_n^2 + t_n^1 t_n^2) B_n A_n^1 - A_n^1 (s_n^1 s_n^2 + t_n^1 t_n^2) B_n A_n^2 \} \\ &= B_n \{ A_n^2 C_n B_n A_n^1 - A_n^1 C_n B_n A_n^2 \} = B_n \{ A_n^2 A_n^1 - A_n^1 A_n^2 \} = 0. \end{aligned}$$

Also sind auch $R_n P_n = (A_n - i)^{-1} P_n$ und $\tilde{R}_n P_n = (\tilde{A}_n - i)^{-1} P_n$ als beschränkte Operatoren in \mathfrak{H} miteinander vertauschbar.

Da nach Hilfssatz 2 für f aus \mathfrak{H} gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n P_n f = (\underline{A} - i)^{-1} f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n P_n f = (\underline{\tilde{A}} - i)^{-1} f$$

und da außerdem $\|R_n P_n f\| \leq \|f\|$, $\|\tilde{R}_n P_n f\| \leq \|f\|$ richtig ist, hat man durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ sofort $(\underline{A} - i)^{-1} (\underline{\tilde{A}} - i)^{-1} = (\underline{\tilde{A}} - i)^{-1} (\underline{A} - i)^{-1}$. Daraus folgt bekanntlich die Vertauschbarkeit der Operatoren \underline{A} und $\underline{\tilde{A}}$ bzw. ihrer Spektralscharen E_λ und \tilde{E}_μ . Damit ist der Satz bewiesen.

Durch den Nachweis der Vertauschbarkeit von \underline{A} und $\underline{\tilde{A}}$ hat man die Berechtigung erlangt, von einem (zweidimensionalen) Simultanspektrum dieser Operatoren zu reden. Ist $I: \lambda' < \lambda \leq \lambda'', \mu' < \mu \leq \mu''$ ein Rechteck der λ, μ -Ebene, so sei $F_I = (E_{\lambda''} - E_{\lambda'}) (\tilde{E}_{\mu''} - \tilde{E}_{\mu'})$ und für f aus \mathfrak{H} werde $F_I f = f_I$ gesetzt. Ein Punkt p der λ, μ -Ebene gehört zum Simultanspektrum von \underline{A} und $\underline{\tilde{A}}$ oder gehört nicht dazu, je nachdem ob es eine Folge von Rechtecken I gibt, die den Punkt p enthalten und deren Seiten gegen Null streben, für die aber stets $F_I \neq 0$ gilt, oder ob dies nicht der Fall ist.

Für einen beliebigen Punkt $p_0 = \{\lambda_0, \mu_0\}$ und für $0 \leq \vartheta < 2\pi$ erklären wir

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A_{p_0, \vartheta} &= (\underline{A} - \lambda_0) \cos \vartheta + (\underline{\tilde{A}} - \mu_0) \sin \vartheta, \\ \tilde{A}_{p_0, \vartheta} &= -(\underline{A} - \lambda_0) \sin \vartheta + (\underline{\tilde{A}} - \mu_0) \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Es sind dann alle $A_{p_0, \theta}$, $\tilde{A}_{p_0, \theta}$ unter sich und mit A und \tilde{A} vertauschbar; die Spektralscharen $E_\alpha(p_0, \theta)$, $E_\beta(p_0, \theta)$ von $A_{p_0, \theta}$ bzw. $\tilde{A}_{p_0, \theta}$ errechnen sich aus E_λ und E_μ durch

$$(4.3) \quad \begin{aligned} E_\alpha(p_0, \theta) &= \iint_{(\lambda - \lambda_0) \cos \theta + (\mu - \mu_0) \sin \theta \leq \alpha} dE_\lambda d\tilde{E}_\mu^4) \\ \tilde{E}_\beta(p_0, \theta) &= \iint_{-(\lambda - \lambda_0) \sin \theta + (\mu - \mu_0) \cos \theta \leq \beta} dE_\lambda dE_\mu. \end{aligned}$$

Ganz entsprechend werden als Operatoren in \mathfrak{R}_n erklärt

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A_{p_0, \theta; n} &= (A_n - \lambda_0) \cos \theta + (\tilde{A}_n - \mu_0) \sin \theta \\ \tilde{A}_{p_0, \theta; n} &= -(A_n - \lambda_0) \sin \theta + (\tilde{A}_n - \mu_0) \cos \theta. \end{aligned}$$

Auch sei gesetzt

$$(4.5) \quad \begin{aligned} s_\theta^j &= s^j \cos \theta + t^j \sin \theta, & s_{\theta; n}^j &= s_n^j \cos \theta + t_n^j \sin \theta, \\ t_\theta^j &= -s^j \sin \theta + t^j \cos \theta, & t_{\theta; n}^j &= -s_n^j \sin \theta + t_n^j \cos \theta; \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A_{p_0}^1 &= A^1 - \lambda_0 s^1 - \mu_0 t^1, & A_{p_0; n}^1 &= A_n^1 - \lambda_0 s_n^1 - \mu_0 t_n^1; \\ A_{p_0}^2 &= A^2 - \lambda_0 t^2 + \mu_0 s^2, & A_{p_0; n}^2 &= A_n^2 - \lambda_0 t_n^2 + \mu_0 s_n^2. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Formeln (4.1) kann dann geschrieben werden:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A_{p_0, \theta; n} &= B_n (A_{p_0; n}^1 s_{\theta; n}^2 + t_{\theta; n}^1 A_{p_0; n}^2) \\ \tilde{A}_{p_0, \theta; n} &= B_n (A_{p_0; n}^1 t_{\theta; n}^2 - s_{\theta; n}^1 A_{p_0; n}^2). \end{aligned}$$

Beachtet man die Vertauschbarkeit von s_n^j , t_n^j mit B_n , so kann man diese Formeln nach $A_{p_0; n}^1$ und $A_{p_0; n}^2$ auflösen:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} A_{p_0; n}^1 &= s_{\theta; n}^1 A_{p_0, \theta; n} + t_{\theta; n}^1 \tilde{A}_{p_0, \theta; n} \\ A_{p_0; n}^2 &= t_{\theta; n}^2 A_{p_0, \theta; n} - s_{\theta; n}^2 \tilde{A}_{p_0, \theta; n}. \end{aligned}$$

Wollen wir entsprechende Beziehungen auch für $A_{p_0}^1$, $A_{p_0}^2$ unter Benutzung von $A_{p_0, \theta}$, $\tilde{A}_{p_0, \theta}$ sinnvoll formulieren, so können dazu zunächst die Operatoren s^j , t^j , s_θ^j , t_θ^j durch $s^1 u = \sum_{r=1}^N (s^1 u_r^1) u_r^2$; $s^2 u = \sum_{r=1}^N u_r^1 (s^2 u_r^2)$ usw. für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$, linear und stetig sonst als beschränkte und hermitesche Operatoren auch des Raumes \mathfrak{H} erklärt werden. Mit ihnen folgt insbesondere

$$C = s^1 s^2 + t^1 t^2, \text{ also } B = (s^1 s^2 + t^1 t^2)^{-1}.$$

Es ist aber zu beachten, daß zwar für $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$ aus \mathfrak{H} mit $u_r^j \in \mathfrak{H}$ die Operatoren $A_{p_0}^1$, $A_{p_0}^2$ durch $A_{p_0}^1 u = \sum_{r=1}^N (A_{p_0}^1 u_r^1) u_r^2$, $A_{p_0}^2 u = \sum_{r=1}^N u_r^1 (A_{p_0}^2 u_r^2)$ erklärt werden können, daß aber die so erklärten Operatoren bezüglich (u, v) im allgemeinen nicht hermitesch, ja nicht einmal abschließbar sind. Aus diesem

⁴⁾ Ein Doppelintegral $F_K = \iint_K dE_\lambda d\tilde{E}_\mu$ über ein Gebiet K der λ, μ -Ebene denken wir uns so definiert, daß für jeden simultanen Eigenvektor φ von A und \tilde{A} , der zu einem Randpunkt p von K gehört, gilt $F_K \varphi = \varphi$ oder $F_K \varphi = 0$ je nachdem ob p zu K gehört oder nicht.

Grund führen wir für $u = \sum_{\nu=1}^N u_{\nu}^1 u_{\nu}^2$, $v = \sum_{\nu=1}^{N'} v_{\nu}^1 v_{\nu}^2$ zunächst ein neues Skalarprodukt $(u, v)_0$ ein durch die Definition

$$(u, v)_0 = \sum_{\nu, \kappa=1}^{N, N'} (u_{\nu}^1, v_{\kappa}^1) (u_{\nu}^2, v_{\kappa}^2).$$

Es gilt in der Spektraldarstellung des § 1

$$(u, v)_0 = \int_{\sigma^1} \int_{\sigma^2} \overline{u(x, y)} v(x, y) d\tau^1(x) d\tau^2(y),$$

daher ist $(u, u)_0$ positiv definit⁵⁾. Durch Hinzufügen idealer Elemente zu der Menge aller $u = \sum_{\nu=1}^N u_{\nu}^1 u_{\nu}^2$ aus \mathfrak{H} erhalten wir einen Hilbertraum \mathfrak{H}_0 mit der Metrik $\|u\|_0 = [(u, u)_0]^{\frac{1}{2}}$. Unter Benutzung der Spektraldarstellung und wegen $s^j \leq 1$, $t^j \leq 1$ schließt man

$$(4.9) \quad \|u\| \leq \sqrt{2} \|u\|_0;$$

daher kann die Menge der Vektoren aus \mathfrak{H}_0 als dichte Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{H} aufgefaßt werden.

Offenbar gilt $(u, v) = (u, (s^1 s^2 + t^1 t^2) v)_0 = (u, C v)_0$ für u, v aus \mathfrak{H}_0 . Hieraus folgt man: $(C)^{\frac{1}{2}} u$ aus \mathfrak{H}_0 für u aus \mathfrak{H} und $\|(C)^{\frac{1}{2}} u\|_0 = \|u\|$. Umgekehrt ergibt sich $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{D}_{(B)^{\frac{1}{2}}}$; $\|(B)^{\frac{1}{2}} u\| = \|u\|_0$ für u aus \mathfrak{H}_0 . Man hat endlich

$$(4.10) \quad \begin{aligned} (u, v) &= (u, C v)_0 && \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}_0, v \text{ aus } \mathfrak{H}, \\ (u, v)_0 &= (u, B v) && \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{H}_0, v \text{ aus } \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

In \mathfrak{H}_0 ist nun der für $u = \sum_{\nu=1}^N u_{\nu}^1 u_{\nu}^2$, $u_{\nu}^i \in \mathfrak{A}^i$, durch $A_{p_s}^1 u = \sum_{\nu=1}^N (A_{p_s}^1 u_{\nu}^1) u_{\nu}^2$

erklärte Operator hermitesch, er kann daher trivial zu einem abgeschlossenen (sogar hypermaximalen) Operator $A_{p_s}^1$ in \mathfrak{A}_1 fortgesetzt werden. Entsprechend werde $A_{p_s}^2$ in $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{H}_0$ definiert.

Es seien für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ erklärt die Funktionen $e_{\varepsilon}^1(x)$; $0 \leq x \leq 1$, $e_{\varepsilon}^2(y)$; $0 \leq y \leq 1$, durch $e_{\varepsilon}^1(x) = 0$ in $0 \leq x \leq \varepsilon$ und in $1 - \varepsilon \leq x \leq 1$; $e_{\varepsilon}^1(x) = 1$ in $\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$ bzw. $e_{\varepsilon}^2(y) = 0$ in $0 \leq y \leq \varepsilon$ und in $1 - \varepsilon \leq y \leq 1$; $e_{\varepsilon}^2(y) = 1$ in $\varepsilon < y < 1 - \varepsilon$ ⁶⁾. Mit ihrer Hilfe definiere man unter Benutzung der Spektraldarstellung des § 1 die Operatoren e_{ε}^j in \mathfrak{H} durch

$$e_{\varepsilon}^1 u \leftrightarrow e_{\varepsilon}^1(x) u(x, y), \quad e_{\varepsilon}^2 u \leftrightarrow e_{\varepsilon}^2(y) u(x, y).$$

Behauptung: Für jedes u aus \mathfrak{H} und jedes ε aus $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ sind $e_{\varepsilon}^1 u$ und $e_{\varepsilon}^2 u$ Elemente von \mathfrak{H}_0 und es gilt $\|e_{\varepsilon}^j u\|_0 \leq (\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \|u\|$. Denn es gilt für die vertauschbaren, beschränkten Operatoren s^j, t^j des Raumes \mathfrak{H} die folgende Abschätzung:

$$0 \leq (s^1 - t^2)^2 = (s^1 - t^2)(s^2 - t^1) = s^1 s^2 + t^1 t^2 - s^1 t^1 - s^2 t^2,$$

⁵⁾ Eine ausführliche Darstellung dieser Verhältnisse findet sich in [3], S. 416f.

⁶⁾ Vgl. Anm. 5)

also insbesondere

$$\begin{aligned} s^1 t^1 &\leq s^1 s^2 + t^1 t^2; \quad s^2 t^2 \leq s^1 s^2 + t^1 t^2; \\ (u, s^1 t^1 u)_0 &\leq (u, u); \quad (u, s^2 t^2 u)_0 \leq (u, u), \quad u \in \mathfrak{D}_0. \end{aligned}$$

Für die in § 1 bei der Definition der Spektraldarstellung benutzten Funktionen $s^1(x)$, $s^2(y)$ usw. gelten nun im Intervall $\varepsilon < x, y < 1 - \varepsilon$ die Abschätzungen $s^1(x) > \varepsilon$, $s^2(y) > \varepsilon$, $t^1(x) > \varepsilon$, $t^2(y) > \varepsilon$; daher folgt

$$(\varepsilon)^{-1} (e_\varepsilon^1 u, s^1 t^1 e_\varepsilon^1 u)_0 \geq \|e_\varepsilon^1 u\|_0^2,$$

denn die Projektion e_ε^1 macht in Umgebungen der Randpunkte des Intervalles $0 < x < 1$ gerade die Spektraldarstellungen von $e_\varepsilon^1 u$ verschwinden. Daher ergibt sich

$$\|e_\varepsilon^1 u\|_0 \leq (\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \|e_\varepsilon^1 u\| \leq (\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \|u\|.$$

Entsprechend folgt die andere Abschätzung.

Hilfssatz 3: Für jedes f aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{(\underline{A}-i)(\tilde{A}-i)}$ des Operators $(\underline{A}-i)(\tilde{A}-i) = (\underline{A}-i)(\tilde{A}-i)$ ist $e_\varepsilon^2 f$ in \mathfrak{A}_1 und $e_\varepsilon^1 f$ in \mathfrak{A}_2 enthalten ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$). Es gilt

$$(4.11) \quad \begin{aligned} A_{p_n, \vartheta}^1 e_\varepsilon^2 f &= s_\vartheta^1 e_\varepsilon^2 A_{p_n, \vartheta} f + t_\vartheta^1 e_\varepsilon^2 \tilde{A}_{p_n, \vartheta} f, \\ A_{p_n, \vartheta}^2 e_\varepsilon^1 f &= t_\vartheta^2 e_\varepsilon^1 A_{p_n, \vartheta} f - s_\vartheta^2 e_\varepsilon^1 \tilde{A}_{p_n, \vartheta} f, \end{aligned}$$

wenn mit $A_{p_n, \vartheta}$, $\tilde{A}_{p_n, \vartheta}$ die hypermaximalen Fortsetzungen von $A_{p_n, \vartheta}$ und $\tilde{A}_{p_n, \vartheta}$ bezeichnet werden. Insbesondere hat man die Gültigkeit dieser Relationen für $f_K = \iint_K dE_\lambda d\tilde{E}_\mu f$, wobei K ein beliebiges, endliches Gebiet der λ, μ -Ebene ist.

Beweis: Für f aus $\mathfrak{D}_{(\underline{A}-i)(\tilde{A}-i)}$ existiert $f_n = R_n \tilde{R}_n P_n (\underline{A}-i)(\tilde{A}-i) f$ und gemäß Hilfssatz 2 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= (\underline{A}-i)^{-1} (\tilde{A}-i)^{-1} (\underline{A}-i)(\tilde{A}-i) f = f, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - i) f_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n P_n (\tilde{A}-i)(\underline{A}-i) f = (\underline{A}-i) f, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}_n - i) f_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n P_n (\underline{A}-i)(\tilde{A}-i) f = (\tilde{A}-i) f. \end{aligned}$$

Also folgt gleichzeitig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f_n = \underline{A} f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n f_n = \tilde{A} f.$$

Jetzt berücksichtige man die Formeln (4.8). Man erhält z. B. aus der ersten:

$$e_\varepsilon^2 A_{p_n, n}^1 f_n = e_\varepsilon^2 s_{\vartheta, n}^1 A_{p_n, \vartheta, n} f_n + e_\varepsilon^2 t_{\vartheta, n}^1 \tilde{A}_{p_n, \vartheta, n} f_n.$$

Die Operatoren $A_{p_n, n}^1$, $s_{\vartheta, n}^1$, $t_{\vartheta, n}^1$ sind zwar zunächst nur für $u = \sum_{v=1}^N u_v^1 u_v^2$ aus

\mathfrak{R}_n durch $A_{p_n, n}^1 u = \sum_{v=1}^N (A_{p_n, n}^1 u_v^1) u_v^2$ usw. erklärt, es hindert uns aber nichts,

sie auch für beliebige $u = \sum_{v=1}^N u_v^1 u_v^2$ aus \mathfrak{R}_n , für die nur $u_v^1 \in \mathfrak{R}_n^1$ gilt, $v = 1, \dots, N$,

so zu erklären. Tun wir das, so sind für u aus \mathfrak{R}_n die Ausdrücke $A_{p_i; n}^1 e_i^2 u$, $s_{\theta; n}^1 e_i^2 u$, $t_{\theta; n}^1 e_i^2 u$ bildbar und es gilt $A_{p_i; n}^1 e_i^2 u = e_i^2 A_{p_i; n}^1 u$ sowie die entsprechenden beiden anderen Beziehungen.

Erinnern wir uns schließlich daran, daß \mathfrak{R}_n^1 nach seiner Konstruktion die Vektoren $\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_n^1$ des Systems ω_ν^1 , $\nu = 1, 2, \dots$ enthält, für welches $(A^1 - i) \omega_\nu^1$, $\nu = 1, 2, \dots$, in \mathfrak{H}^1 dicht liegt, so folgt (unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen für A_n^1, s_n^1, t_n^1 am Anfang dieses Paragraphen) für u^2 aus \mathfrak{H}^2 und $n \geq k$ die Gleichung

$$(\omega_k^1 u^2, A_{p_i}^1 e_i^2 f_n)_0 = (\omega_k^1 u^2, s_{\theta}^1 e_i^2 A_{p_i, \theta; n} f_n)_0 + (\omega_k^1 u^2, t_{\theta}^1 e_i^2 \tilde{A}_{p_i, \theta; n} f_n)_0.$$

Läßt man n gegen Unendlich rücken, so ergibt sich

$$(A_{p_i}^1 \omega_k^1 u^2, e_i^2 f)_0 = (\omega_k^1 u^2, s_{\theta}^1 e_i^2 \underline{A}_{p_i, \theta} f)_0 + (\omega_k^1 u^2, t_{\theta}^1 e_i^2 \tilde{\underline{A}}_{p_i, \theta} f)_0.$$

Man zeigt leicht, daß $A_{p_i}^1$ im Raume aller $u = \sum_{r=1}^N \omega_r^1 u_r^2$ mit u_r^2 aus \mathfrak{H}^2

wesentlich selbstadjungiert ist (das folgt, weil die $(A^1 - i) \omega_k^1$ in \mathfrak{H}^1 dicht liegen). Daher erhält man schließlich, daß $e_i^2 f$ ein Element des Definitionsbereiches \mathfrak{H}_1 von $A_{p_i}^1$, der hypermaximalen Fortsetzung obigen Operators, ist und daß gilt

$$A_{p_i}^1 e_i^2 f = s_{\theta}^1 e_i^2 \underline{A}_{p_i, \theta} f + t_{\theta}^1 e_i^2 \tilde{\underline{A}}_{p_i, \theta} f.$$

Da für $A_{p_i}^2$ entsprechendes folgt, ist damit der Hilfssatz bewiesen.

§ 5. Diskussion der in Satz 1 geforderten Zusatzbedingungen (1_s), ..., (2_t).

Wir werden im weiteren Verlauf der Untersuchungen erneut wesentlich die Bedingungen (1_s), (1_t), (2_s), (2_t) von Satz 1 heranziehen müssen. Daher wollen wir uns etwas eingehender mit ihrer Ausdeutung befassen. Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 4: Es sei H in \mathfrak{D}_H linearer Operator eines Hilbertraumes \mathfrak{R} . Die Operatoren s und t seien beschränkt, hermitesch, positiv definit, und es gelte $s + t = 1$. Die Reziproke $R_{i, \lambda_0} = (H - i s - \lambda_0 t)^{-1}$ sei für ein festes reelles λ_0 beschränkt und überall in \mathfrak{R} erklärt.

Behauptung: Bedeutet $E_{\lambda}(\alpha)$ die Spektralschar des für reelles α hypermaximalen Operators $(H - \alpha s)$, so gibt es für jedes beliebige α stets ein Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, das den Punkt λ_0 im Innern enthält, so daß mit $E_{\lambda}(\alpha) = E_{\lambda_2}(\alpha) - E_{\lambda_1}(\alpha)$ gilt $\|E_{\lambda}(\alpha) u\|^2 \leq c (E_{\lambda}(\alpha) u, s E_{\lambda}(\alpha) u)$ für alle u aus \mathfrak{R} . Dabei können λ_1, λ_2 und c von α unabhängig gewählt werden, falls man nur α auf ein endliches, abgeschlossenes Intervall $a \leq \alpha \leq b$ beschränkt.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Wären dann $\lambda_n', \lambda_n'', n = 1, 2, \dots$, zwei Folgen mit $\lambda_n' < \lambda_0 < \lambda_n''$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n'' = \lambda_0$ und würde gesetzt $E_{\lambda_n}(\alpha) = E_{\lambda_n''}(\alpha) - E_{\lambda_n'}(\alpha)$, so folgte zu jedem n die Existenz eines α_n aus $a \leq \alpha \leq b$ und eines Vektors u_n aus \mathfrak{R} , so daß gälte

$$(E_{\lambda_n}(\alpha_n) u_n, s E_{\lambda_n}(\alpha_n) u_n) < \frac{1}{n},$$

jedoch

$$\|E_{A_n}(\alpha_n) u_n\| = 1.$$

Man hätte also für $v_n = E_{A_n}(\alpha_n) u_n$ die Relation $\lim_{n \rightarrow \infty} s v_n = 0$.

Andererseits folgte auch

$$(H - \alpha_n s - \lambda_0) v_n = \int_{\lambda'_n}^{\lambda''_n} (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda(\alpha_n) u_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Daher gälte $\|v_n\| = 1$, aber

$$(H - i s - \lambda_0 t) v_n = (H - \alpha_n s - \lambda_0) v_n + (\lambda_0 - i + \alpha_n) s v_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung der Beschränktheit von $(H - i s - \lambda_0 t)^{-1}$.

Man beachte, daß dieser Hilfssatz eine Umkehrung von Hilfssatz 1 darstellt. Die Hilfssätze 1 und 4 zusammen liefern unmittelbar

Hilfssatz 5: Es sei H in \mathfrak{D}_H hypermaximaler Operator eines Hilbertraumes \mathfrak{R} . Die Operatoren s und t seien beschränkt, hermitesch, positiv definit, und es gelte $s + t = 1$. $E_\lambda(\alpha)$ bedeute die Spektralschar des (für reelles α hypermaximalen) Operators $H - \alpha s$; λ_0 sei eine feste, reelle Zahl. Gibt es dann für irgendein reelles $\alpha = \alpha_0$ zwei Zahlen λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$, so daß für u aus \mathfrak{R} die Abschätzung

$$\|E_\lambda(\alpha_0) u\|^2 \leq c (E_\lambda(\alpha_0) u, s E_\lambda(\alpha_0) u) \text{ mit } E_\lambda(\alpha_0) = E_{\lambda_2}(\alpha_0) - E_{\lambda_1}(\alpha_0)$$

gilt, so kann man auch für jedes andere reelle α eine entsprechende Abschätzung finden, die gleichmäßig für u aus \mathfrak{R} und alle α eines beliebig vorgegebenen endlichen Intervalles $a \leq \alpha \leq b$ gilt.

Insbesondere ergibt sich aus Hilfssatz 1 und Hilfssatz 4 die Äquivalenz von Satz 1 und Kriterium II aus [3].

Um nun das Wesentliche der Forderungen (1_s) , (1_t) , (2_s) und (2_t) in bezug auf die Separation einzusehen, wollen wir für kurze Zeit die Annahme machen, daß A^1 in \mathfrak{H}^1 und A^2 in \mathfrak{H}^2 ein diskretes Spektrum besitzen. Wenn A^1 in \mathfrak{H}^1 ein diskretes Spektrum besitzt, d. h. wenn es zu A^1 ein vollständiges System von Eigenelementen gibt, deren zugehörige Eigenwerte sich nirgends im Endlichen häufen, so liefern die störungstheoretischen Sätze von F. RELICH [10] (V. Mitt.) folgende Aussage:

1. Für jeden Punkt $p_0 = \{\lambda_0, \mu_0\}$ der λ, μ -Ebene ist entweder $(A^1_{p_0})^{-1}$ beschränkt und überall in \mathfrak{H}^1 erklärt, oder es ist die Gleichung $A^1_{p_0} \varphi^1 = 0$ mit einem $\varphi^1 \neq 0$ auflösbar. Im letzteren Fall ist der Nullraum von $A^1_{p_0}$ stets endlichdimensional.

2. Die Menge m^1 der Punkte, für die $A^1_{p_0} \varphi^1 = 0$ nichttrivial auflösbar ist, zerfällt in abzählbar viele analytische⁷⁾ Kurven \mathfrak{C}^1_v , $v = 1, 2, \dots$.

3. Zu jedem \mathfrak{C}^1_v gibt es endlich viele Vektorenscharen, $\varphi^1_{r,k}(p)$, $k = 1, \dots, n_r$, mit $(\varphi^1_{r,k}(p), \varphi^1_{r,k'}(p)) = \delta_{k,k'}$, die analytisch vom Kurvenparameter abhängen

⁷⁾ Wir nennen eine Kurve dabei analytisch, wenn sie eine Parameterdarstellung $\lambda = \lambda(\gamma)$, $\mu = \mu(\gamma)$ besitzt, deren Funktionen $\lambda(\gamma)$, $\mu(\gamma)$ in einer Umgebung $|\gamma - \gamma_0| < \delta$ von jedem Punkt γ_0 ihres Definitionsintervalles Potenzreihen in $\gamma - \gamma_0$ sind. Das Entsprechende sei unter der analytischen Abhängigkeit einer Vektorenschar $\varphi(\gamma)$ von γ verstanden.

und so daß für jeden Punkt p der Menge m^1 die endlich vielen Vektoren $\varphi_{r,k}^1(p)$, $k = 1, \dots, n_r$, wo r alle ganzen Zahlen durchläuft, für die p auf \mathfrak{E}_r^1 liegt, ein orthogonales, normiertes System von Nullvektoren des Operators A_p^1 bilden, das den Nullraum von A_p^1 aufspannt.

4. Es gibt höchstens abzählbar viele Schnittpunkte zweier oder mehrerer \mathfrak{E}_r^1 , und diese häufen sich nirgends in der λ, μ -Ebene.

5. Für jeden Punkt p einer Kurve \mathfrak{E}_r^1 gilt

$$(5.1) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = - \frac{(\varphi_{r,k}^1(p), s^1 \varphi_{r,k}^1(p))}{(\varphi_{r,k}^1(p), t^1 \varphi_{r,k}^1(p))}, \quad k = 1, \dots, n_r^1;$$

da die Operatoren s^1 und t^1 positiv definit sind, sind daher die Kurven \mathfrak{E}_r^1 alle streng monoton fallend. Fordert man darüber hinaus, daß sogar $(s^1)^{-1}$ und $(t^1)^{-1}$ beschränkt sind, so lassen sich negative obere und untere Schranken für die Steigungen der \mathfrak{E}_r^1 angeben, die gleichmäßig für alle Punkte λ, μ gelten müssen.

Genau entsprechende Aussagen gelten bei Diskretheit des Spektrums von A^2 in \mathfrak{H}^2 auch für die Menge m^2 der Punkte p , zu denen nichttriviale Lösungen von $A_p^2 \varphi^2 = 0$ existieren, nur tritt an die Stelle der Gleichung (5.1) jetzt

$$(5.2) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = + \frac{(\varphi_{r,k}^2(p), t^2 \varphi_{r,k}^2(p))}{(\varphi_{r,k}^2(p), s^2 \varphi_{r,k}^2(p))}, \quad k = 1, \dots, n_r^2.$$

Die Kurven \mathfrak{E}_r^2 erweisen sich also als streng monoton wachsend. Das Gesamtbild der Kurven in der λ, μ -Ebene veranschaulicht man sich zweckmäßig anhand von Fig. 1.

Es liegt nun nahe, nach Lösungen von $A \varphi = \lambda \varphi$ in Produktform auf die Weise zu suchen, daß man zunächst für jede der beiden Gleichungen (1.6) einzeln die Zahlenpaare $\{\lambda, \mu\}$ aufsucht, für die sie nichttrivial lösbar sind.

Stellt man die noch stärkere Forderung, daß \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 endlichdimensionale euklidische Räume der Dimension n^1 und n^2 seien, so sind $(s^1)^{-1}$, $(t^1)^{-1}$ beschränkte Operatoren, daher können die Kurven \mathfrak{E}_r^1 durch Funktionen $\mu_r^1(\lambda)$ dargestellt werden, die in $-\infty < \lambda < +\infty$ erklärt sind, es gilt $|\mu_r^1(\lambda)| \geq c > 0$.

Daraus kann die Existenz von Schnittpunkten $\mathfrak{E}_r^1 \times \mathfrak{E}_s^2$ erschlossen werden, an denen beide Gleichungen (1.6) gleichzeitig lösbar sind. Bildet man an jedem Schnittpunkt p_{rk} die Produkte der Nulllösungen $\varphi_{r,k}^1(p_{rk})$, $\varphi_{s,k}^2(p_{rk})$, so liefern diese alle zusammen ein System von genau $n^1 \cdot n^2$ paarweise orthogonalen Eigenelementen des Operators A . Da die Dimension des Raumes \mathfrak{H} dann gleich $n^1 \cdot n^2$ ist, muß dieses System ein vollständiges System sein⁸⁾.

Im Falle, daß die Dimension von \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 nicht mehr endlich ist, bleibt zwar die strenge Monotonie der Eigenwertkurven erhalten, jedoch können Unendlichkeitsstellen der Funktionen $\mu_k^1(\lambda)$ wie auch deren Umkehrfunktionen

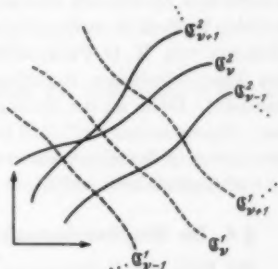


Fig. 1

⁸⁾ Vgl. hierzu die Überlegungen von YOSHIKAWA [17].

auftreten. Daher kann nicht mehr auf die Existenz von Schnittpunkten geschlossen werden. Auch wird diese Überlegung für das kontinuierliche Spektrum ohnehin illusorisch.

Wenn wir nun die Bedingungen (1_s) , (1_t) , (2_s) , (2_t) ins Auge fassen und dabei noch das Ergebnis von Hilfssatz 5 mitberücksichtigen, so sehen wir, daß diese im Falle des isolierten Punktspektrums gar nichts anderes sind, als Beschränktheitsforderungen für die Ableitungen der Kurven \mathfrak{E}_μ^j . Zum Beispiel die Forderung

$$\frac{d\mu_\mu^j(\lambda)}{d\lambda} = - \frac{(\varphi_{\mu, \mu}^j, s^1 \varphi_{\mu, \mu}^j)}{(\varphi_{\mu, \mu}^j, t^1 \varphi_{\mu, \mu}^j)} \geq -c$$

in einem $p_0 = \{\lambda_0, \mu_0\}$ bedeutet

$$(E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1, s^1 E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1) \leq c (E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1, t^1 E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1)$$

oder

$$\|E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1\|^2 \leq (c + 1) (E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1, t^1 E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) u^1)$$

für alle u^1 aus \mathfrak{H}^1 und mit $E_\lambda^j(\lambda_0 - \mu_0) = E_{\mu_0 + \epsilon}^j(\lambda_0 - \mu_0) - E_{\mu_0 - \epsilon}^j(\lambda_0 - \mu_0)$ ($E_\mu^j(\alpha)$ die Spektralschar von $A^1 - \alpha s^1$) und dies ist gemäß Hilfssatz 5 gleichbedeutend mit der Forderung $\|E_\lambda^j u^1\|^2 \leq c' (E_\lambda^j u^1, t^1 E_\lambda^j u^1)$, $E_\lambda^j = E_{\mu_0 + \epsilon}^j - E_{\mu_0 - \epsilon}^j$ (E_μ^j die Spektralschar von A^1 in \mathfrak{H}^1), also der Bedingung (1_t) .

Ist das Spektrum von $A^1 - \alpha s^1$ in einem Intervall Δ diskret, so sind für alle Punkte dieses Intervalles Δ ohnehin die Bedingungen (1_s) und (1_t) erfüllt, d. h. die darin liegenden Eigenwerte können bei Änderung von α nicht konstant bleiben, dürfen sich aber auch nicht zu stark ändern. Teile des kontinuierlichen Spektrums können dagegen für den Operator $A^1 - \alpha s^1$ auch bei beliebig großem α unverschoben erhalten bleiben (vgl. dazu die Veröffentlichungen von K. O. FRIEDRICHS [5] und J. MOSER [9] über Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums, die sogar ausschließlich solche Fälle behandeln). Dann ist die Bedingung (1_s) nicht mehr erfüllt, weil ja der Anstieg der „Eigenwertkurven“ Null ist und es kann passieren, daß kein Entwicklungssatz für A in \mathfrak{H} mehr resultiert, weil man durch die Separation zu wenig oder zu viel Eigenpakete erhält.

§ 6. Die Simultaneigenpakete von A und \tilde{A} gehören dem Raum \mathfrak{H}_0 an.

Mit Hilfe der Bedingungen (1_s) , (1_t) , (2_s) , (2_t) wird es uns gelingen, die in Hilfssatz 3 auftretenden störenden Faktoren e_ϵ^j zu beseitigen. Allerdings muß dazu der Bereich der in diesem Hilfssatz zugelassenen f weiter eingengt werden. Wir werden uns auf Elemente der Form $f_K = \int_K dE_\lambda dE_\mu f$ beschränken.

In diesem Paragraphen wollen wir zudem fordern, daß in bezug auf A und \tilde{A} die Voraussetzungen des Satzes 1 und dessen Zusatzes 1 erfüllt seien.

Satz 3: Sei K eine Summe endlich vieler abgeschlossener, endlicher Bereiche der λ, μ -Ebene, deren Projektionen auf die λ -Achse keinen der in Satz 1 bei seiner Anwendung auf A zugelassenen Ausnahmepunkte α enthalten, in dem also keine der Bedingungen (1_s) und (2_t) gelten würde. Ebenso enthalte die Projektion von K auf die μ -Achse keinen Ausnahmepunkt α , in dem weder (1_t) noch (2_s) erfüllt ist.

Behauptung: Ist dann $F_K = \int \int_K dE_\lambda dE_\mu$, so ist $F_K f = f_K$ für jedes f aus \mathfrak{H} stets im Raum \mathfrak{H}_0 enthalten und es gilt

$$(6.1) \quad \|F_K f\|_0 \leq c(K) \|F_K f\|.$$

Es liegt sogar $F_K f$ in \mathfrak{A}_1 und in \mathfrak{A}_2 und es gilt

$$(6.2) \quad \begin{aligned} A_{p_0}^1 F_K f &= s_0^1 \underline{A}_{p_0, 0} F_K f + t_0^1 \tilde{A}_{p_0, 0} F_K f \\ A_{p_0}^2 F_K f &= t_0^2 \underline{A}_{p_0, 0} F_K f - s_0^2 \tilde{A}_{p_0, 0} F_K f. \end{aligned}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß zu jedem Punkt p^* von K ein Rechteck $I: \lambda' < \lambda \leq \lambda'', \mu' < \mu \leq \mu''$ gefunden werden kann, das den Punkt $p^* = \{\lambda^*, \mu^*\}$ im Innern enthält und für welches $f_I = F_I f$ bei beliebigem f aus \mathfrak{H} in \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 liegt, so daß ferner die Beziehungen (6.1) und (6.2) mit $K = I$ erfüllt sind. Denn nach dem Überdeckungssatz von HEINE-BOREL kann dann K durch endlich viele Rechtecke $I_v, v = 1, \dots, N$, so überdeckt werden, daß jeder Punkt innerer Punkt von mindestens einem der Rechtecke I_v ist.

Dieser Überdeckung entspricht eine Zerlegung von K in eine Summe von Punkt Mengen, $K_v, v = 1, \dots, N$, deren jede ganz in einem der I_v enthalten ist. Man hat

$$F_K = \sum_{v=1}^N F_{K_v}, \quad f_K = \sum_{v=1}^N f_{K_v} \quad \text{und} \quad F_{I_v} f_{K_v} = f_{K_v}.$$

Daraus ergibt sich sofort, daß f_K in \mathfrak{H}_0 liegt, es folgt

$$\|f_K\|_0^2 \leq N \sum_{v=1}^N \|f_{K_v}\|_0^2 \leq N \max_{v=1}^N \{c^2(I_v)\} \sum_{v=1}^N \|f_{K_v}\|^2 = c^2(K) \|f_K\|^2$$

mit $c(K) = [N \cdot \max_{v=1}^N c^2(I_v)]^{1/2}$, und es folgen auch die Relationen (6.2), also die volle Aussage des Satzes.

Wir reduzieren die Behauptung um einen weiteren Schritt, indem wir überlegen, daß es zum Beweis genügt, aus der Gültigkeit der Bedingung (1_s) im Punkte $z = \mu^*$ eine Abschätzung

$$(6.3) \quad \| (s^2)^{1/2} f_I \| \leq c \|f_I\|_0$$

für alle f aus \mathfrak{H} und ein passendes, den Punkt p^* im Innern enthaltendes Rechteck I zu folgern. $(s^2)^{1/2}$ sei dabei die positive Quadratwurzel von s^2 . Aus Symmetriegründen ziehen dann die Bedingungen (1_t), (2_s), (2_t) entsprechende Abschätzungen nach sich. Gilt also z. B. im Punkte μ^* die Bedingung (1_s), im Punkte λ^* die Bedingung (1_t), so hat man neben obiger Ungleichung noch

$$(6.4) \quad \| (t^2)^{1/2} f_I \|_0 \leq c' \|f_I\|$$

ebenfalls für ein passendes, p^* enthaltendes I . Die Ungleichungen (6.3) und (6.4) gelten dann auch für jedes Rechteck I , das in dem ursprünglichen enthalten ist, es ist daher möglich, sie mit einem I gleichzeitig zu erfüllen, welches auch noch p^* im Innern enthält. Es folgt durch Quadrieren und Addieren

⁹⁾ Vgl. die Anm. 4 auf S. 270.

beider Abschätzungen unter Berücksichtigung von $s^2 + t^2 = 1$ und der Beschränktheit von $(s^2)^{\frac{1}{2}}$ und $(t^2)^{\frac{1}{2}}$ sofort, daß $f_I = (s^2)^{\frac{1}{2}} [(s^2)^{\frac{1}{2}} f_I] + (t^2)^{\frac{1}{2}} [(t^2)^{\frac{1}{2}} f_I]$ in \mathfrak{H}_0 liegt und daß die Abschätzung $\|f_I\|_0 \leq c(I) \|f_I\|$ mit $c(I) = \sqrt{c^2 + c'^2}$, also die Abschätzung (6.1) mit $K = I$ gilt. Ist aber neben (1_s) im Punkte μ^* die Bedingung (2_s) für λ^* erfüllt, so gilt statt (6.4) die Ungleichung

$$(6.5) \quad \|(s^1)^{\frac{1}{2}} f_I\|_0 \leq c'' \|f_I\|,$$

und es ist noch $(s^1)^{\frac{1}{2}} f_I$ aus \mathfrak{H}_0 für f aus \mathfrak{H} .

Wegen $s^2 + t^2 = 1$ gilt $1 = C + t^2 s^2 + t^2 s^1$ ($C = s^1 s^2 + t^1 t^2$), also $f_I = C f_I + t^1 (s^2)^{\frac{1}{2}} [(s^2)^{\frac{1}{2}} f_I] + t^2 (s^1)^{\frac{1}{2}} [(s^1)^{\frac{1}{2}} f_I]$. Nun ist aber $C f_I$ für jedes beliebige f und I ein Element von \mathfrak{H}_0 , denn es ist ja $\|C f_I\|_0^2 \leq 2 \|f_I, C f_I\|_0 = (f_I, f_I)$. Folglich ist wieder f_I aus \mathfrak{H}_0 und $\|f_I\|_0 \leq (\sqrt{2} + c + c'') \|f_I\|$, es gilt also auch hier die Ungleichung (6.1).

Für einen Vektor u des Raumes \mathfrak{H}_0 folgt nun offenbar $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e_\varepsilon^j u = u$, $j = 1, 2$, wobei der Limes im Sinne der Metrik $\|u\|_0$ zu nehmen ist. Denn es gilt z. B.

$$\begin{aligned} \|e_\varepsilon^1 u - u\|_0^2 &= \int_{\sigma^2} d\tau^2(y) \int_{0 \leq x \leq \varepsilon} d\tau^1(x) |u(x, y)|^2 \\ &+ \int_{\sigma^2} d\tau^2(y) \int_{1-\varepsilon \leq x \leq 1} d\tau^1(x) |u(x, y)|^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man daher in den Gleichungen (4.11) des Hilfssatzes 3 jetzt f durch f_I und läßt ε gegen Null streben, so konvergiert die rechte Seite in bezug auf $\|u\|_0$, denn es gilt $\underline{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I = F_I \underline{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I$ und $\tilde{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I = F_I \tilde{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I$, also sind $\underline{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I$ und $\tilde{A}_{p_{\varepsilon}, \varepsilon} f_I$ Elemente von \mathfrak{H}_0 , während s_ε^j und t_ε^j in \mathfrak{H}_0 beschränkte Operatoren sind. Andererseits gilt auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|e_\varepsilon^j f_I - f_I\|_0 = 0$. Da nun \mathfrak{A}_I^j in $\mathfrak{A}_I \subseteq \mathfrak{H}_0$ abgeschlossen ist, so folgt daraus, daß f_I in \mathfrak{A}_I liegt und daß mit $K = I$ die Gleichungen (6.2) richtig sind. Satz 3 ist also bewiesen, wenn wir noch folgenden Hilfssatz herleiten:

Hilfssatz 6: Gilt für $\alpha = \mu^*$ die Bedingung (1_s) von § 1, so gibt es Zahlen μ', μ'' mit $\mu' < \mu^* < \mu''$, so daß $(s^2)^{\frac{1}{2}} f_I$ in \mathfrak{H}_0 liegt und so daß gilt

$$(6.3) \quad \|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_I\| \leq c \|f_I\|$$

für $f_I = (E_{\lambda'} - E_{\lambda''})(\tilde{E}_{\mu''} - \tilde{E}_{\mu'}) f$ bei beliebigem f aus \mathfrak{H} und gleichmäßig für alle λ', λ'' aus einem fest vorgegebenen, endlichen Intervall.

Beweis des Hilfssatzes: Es sei für beliebiges f aus \mathfrak{H} und reelles λ', λ'', μ erklärt $f_\mu = (\tilde{E}_\mu - \tilde{E}_{\mu^*})(E_{\lambda''} - E_{\lambda'}) f$. Man hat dann nach Formel (4.11), wenn man sie für $p_0 = \{0, 0\}$, $\vartheta = 0$ anwendet, $A^1 e_\varepsilon^2 f_\mu = s^1 e_\varepsilon^2 \underline{A} f_\mu + t^1 e_\varepsilon^2 \tilde{A} f_\mu$ oder

$$A^1 e_\varepsilon^2 f_\mu - \int_{\mu^*}^{\mu} \alpha d(e_\varepsilon^2 f_\alpha) = s^1 e_\varepsilon^2 (\underline{A} f_\mu - \tilde{A} f_\mu).$$

Man wende auf die Gleichung den Operator $(s^2)^{\frac{1}{2}}$ an und integriere partiell. Es folgt dann, wenn man berücksichtigt, daß $f_{\mu^*} = 0$ gilt und daß $\|s^1 (s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 f_\mu\|_0 \leq \|f_\mu\|$ ist,

$$\|(A^1 - \mu)(s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 f_\mu + \int_{\mu^*}^{\mu} (s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 f_\alpha d\alpha\|_0 \leq c_2 \|f_\mu\|$$

mit $c_2 \leq \text{Max} \{|\mu|, |\mu^*|\} + \text{Max} \{|\lambda'|, |\lambda''|\}$.

Sei E_{α}^1 die Spektralschar des Operators A^1 in \mathfrak{A}^1 . Mit $E_{\Delta}^1 = E_{\alpha'}^1 - E_{\alpha''}^1$, $\alpha' < \mu^* < \alpha''$ gelte

$$(6.6) \quad \|E_{\Delta}^1 u\|^2 \leq c_1 (E_{\Delta}^1 u, s^1 E_{\Delta}^1 u)$$

für u^1 aus \mathfrak{A}^1 .

E_{Δ}^1 kann als beschränkter Operator des Raumes \mathfrak{H}^1 auch für u aus \mathfrak{H}_0 erklärt werden, indem man, wie schon in einigen früheren Fällen, definiert

$$E_{\Delta}^1 u = \sum_{r=1}^N (E_{\Delta}^1 u_r) u_r^2 \text{ für } u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2 \text{ und den so definierten Operator abschließt.}$$

Verfährt man so für alle λ , so erhält man eine Schar von Operatoren, die Orthogonalprojektionen bezüglich $(u, v)_0$ sind. Es zeigt sich insbesondere, daß E_{Δ}^1 in \mathfrak{H}_0 die Spektralschar von A^1 in \mathfrak{A}_1 ist. Auch die Bedingung (6.6) liefert eine entsprechende Ungleichung:

$$(6.7) \quad \|E_{\Delta}^1 u\|^2 \leq c_1 (E_{\Delta}^1 u, s^1 E_{\Delta}^1 u)$$

für u aus \mathfrak{A}_1 .

Daher sind für die Operatoren A^1 in \mathfrak{A}_1 , s^1 und t^1 in \mathfrak{H}_0 die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2.7 aus [3] erfüllt. Man hat für μ aus $\alpha' < \mu < \alpha''$ mit zwei Konstanten a, b , die nur von $c_1, |\alpha'' - \mu|, |\alpha' - \mu|$ abhängen,

$$(6.8) \quad \|u\|_0 \leq a \|(A^1 - \mu) u\|_0 + b \|(s^1)^{\frac{1}{2}} u\|_0$$

für u aus \mathfrak{A}_1 .

Setzt man hierin ein $u = (s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\mu}$, so folgt für μ aus $\mu^* \leq \mu \leq \alpha^*$, wo $\alpha^* < \alpha''$ gewählt sei, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\mu}\|_0 &\leq a \|(A^1 - \mu) (s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\mu} + \int_{\mu^*}^{\mu} (s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\alpha} d\alpha\|_0 + \\ &+ a \left\| \int_{\mu^*}^{\mu} (s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\alpha} d\alpha \right\|_0 + b \|(s^1)^{\frac{1}{2}} (s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\mu}\|_0 \\ &\leq (a c_2 + b) \|f_{\mu}\| + a |\mu - \mu^*| m_{\mu} \end{aligned}$$

mit $m_{\mu} = \sup_{\mu^* \leq \alpha \leq \mu} \|(s^2)^{\frac{1}{2}} e_{\varepsilon}^2 f_{\alpha}\|_0$ und dabei sind a und b feste Konstante, solange man α^* festhält.

Insbesondere ergibt sich

$$m_{\mu} \leq (a c_2 + b) \|f_{\mu}\| + a |\mu - \mu^*| m_{\mu}.$$

Dabei wurde benutzt, daß gilt $\|f_{\mu}\| \leq \|f_{\mu_2}\|$ für $\mu^* \leq \mu_1 \leq \mu_2$. Wählt man μ'' so nahe an μ^* , daß gilt $a |\mu'' - \mu^*| < \frac{1}{2}$, so erhält man

$$\|e_{\varepsilon}^2 (s^2)^{\frac{1}{2}} f_{\mu''}\|_0 \leq m_{\mu''} \leq 2(a c_2 + b) \|f_{\mu''}\|.$$

Die Wahl von μ'' ist dabei unabhängig von ε und f möglich, daher darf man schließlich ε gegen Null streben lassen und erhält

$$\|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_{\mu''}\|_0 \leq 2(a c_2 + b) \|f_{\mu''}\|.$$

Entsprechend verfährt man für $\alpha' \leq \mu \leq \mu^*$ und erhält nach geeigneter Wahl von μ'

$$\|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_{\mu'}\|_0 \leq 2(a c_2 + b) \|f_{\mu'}\|.$$

Schließlich sei $f_I = (E_{\lambda'} - E_{\lambda'}) (\tilde{E}_{\mu'} - \tilde{E}_{\mu'}) f$ gesetzt, dann ist $f_I = f_{\mu'} - f_{\mu'}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_I\|_0^2 &\leq 2 \|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_{\mu'}\|_0^2 + 2 \|(s^2)^{\frac{1}{2}} f_{\mu'}\|_0^2 \\ &\leq 8 (a c_2 + b)^2 \{\|f_{\mu'}\|^2 + \|f_{\mu'}\|^2\} = 8 (a c_2 + b)^2 \|f_I\|^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung (6.3), und der Hilfssatz ist bewiesen. Gleichzeitig ist auch der Beweis von Satz 3 erbracht.

Wir wollen für alles Folgende eine Summe K endlich vieler endlicher Bereiche, die den Voraussetzungen von Satz 3 genügt, als reguläre Menge des Simultanspektrums bezeichnen. Die Geraden $\lambda = \lambda_0$ bzw. $\mu = \mu_0$, für deren λ_0 bzw. μ_0 keine der Bedingungen (1_i) , (2_a) bzw. keine der Bedingungen (1_b) , (2_i) erfüllt sind, sollen irregulär genannt werden. Die Menge der auf den irregulären Gradn liegenden Punkte bezeichnen wir mit a' , ihre Komplementärmenge in bezug auf die λ, μ -Ebene mit a .

§ 7. $(A^1 - i)^{-1}$ und $(A^2 - i)^{-1}$ sind Operatoren vom CARLEMANSCHEN Typus.

Im folgenden sei $\mathfrak{H}^j, j = 1, 2$, dargestellt durch die Gesamtheit aller in einem Gebiet g^j eines euklidischen Raumes $-\infty < x_1^j, \dots, x_{n_j}^j < +\infty$ erklärten, komplexwertigen Funktionen $u^j(x^j) = u^j(x_1^j, \dots, x_{n_j}^j)$ mit $\int_{g^j} |u^j(x^j)|^2 \varrho^j(x^j) dx^j < \infty$

($\varrho^j(x^j)$ sei stetig und positiv für x^j aus g^j). Den Wert der Funktion u^j an der Stelle x^j wollen wir gelegentlich mit $u^j|_{x^j}$ bezeichnen, falls die übliche Argumentschreibweise nicht eindeutig verständlich ist. Offenbar wird dann der Raum \mathfrak{H}_0 dargestellt durch alle in $g = g^1 \times g^2$ erklärten, komplexwertigen Funktionen $u(x^1, x^2)$, für die im LEBESGUESCHEN Sinne gilt

$$\int \int_{\mathfrak{g}} |u(x^1, x^2)|^2 \varrho^1(x^1) \varrho^2(x^2) dx^1 dx^2 < \infty.$$

Jedoch wollen wir im Gegensatz zu § 1 nicht verlangen, daß die Operatoren s^j, t^j hinsichtlich obiger Darstellung in Multiplikationen mit Funktionen bestehen. Daher ist über den Raum \mathfrak{H} nicht eine der für \mathfrak{H}_0 entsprechende Aussage zu machen.

Satz 4: Für zwei hypermaximale Operatoren A^j in \mathfrak{H}^j obiger Räume seien die Voraussetzungen von Satz 1 und die des Zusatzes 1 von Satz 1 erfüllt, so daß die mit ihnen gebildeten Operatoren A in \mathfrak{H} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{H}}$ beide wesentlich selbstadjungiert sind. Die Reziproken $R^j = (A^j - i)^{-1}$ seien Integraloperatoren vom CARLEMANSCHEN Typus, d. h. es gelte $R^j u^j|_{x^j} = (r_{x^j}^j, u^j)$ für u^j aus \mathfrak{H}^j und x^j aus $g^j - n^j$ (n^j eine LEBESGUESCHE Nullmenge) mit einem von u^j unabhängigen Vektor $r_{x^j}^j = r_{x^j}^j(\xi^j)$ aus \mathfrak{H}^j .

Behauptung: Zu jeder im Sinne des vorigen Paragraphen regulären Menge K des Simultanspektrums gibt es eine für x^1 aus $g^1 - n^1$, x^2 aus $g^2 - n^2$ erklärte Schar $\varphi_K: x^1, x^2 = \varphi_K: x^1, x^2(\xi^1, \xi^2)$ von Vektoren des Raumes \mathfrak{H}_0 , so daß gilt

$$(7.1) \quad F_K f|_{x^1, x^2} = (\varphi_K: x^1, x^2, f)$$

für x^1 aus $g^1 - n^1$, x^2 aus $g^2 - n^2$.

Man hat $F_K \varphi_K; x^1, x^2 = \varphi_{K'}; x^1, x^2$ für $K' \subseteq K$ sowie

$$(7.2) \quad \varphi_{K'}; x^1, x^2 (\xi^1, \xi^2) = (\varphi_K; x^1, x^2, \varphi_{K'}; \xi^1, \xi^2)$$

für x^1, ξ^1 aus $g^1 - n^1$, x^2, ξ^2 aus $g^2 - n^2$.

Beweis: Sei K eine reguläre Menge des Simultanspektrums von \underline{A} und $\tilde{\underline{A}}$. Wir überlegen uns zunächst die Richtigkeit der folgenden Umformung für f aus \mathfrak{H} :

$$(7.3) \quad (A^1 - i)(A^2 - i)F_K f = s^1 t^2 (\underline{A} - i)^2 F_K f - s^1 s^2 (\underline{A} - i)(\tilde{\underline{A}} + i)F_K f + \\ + t^2 t^2 (\underline{A} - i)(\tilde{\underline{A}} - i)F_K f - t^1 s^2 (\tilde{\underline{A}} - i)(\tilde{\underline{A}} + i)F_K f.$$

Insbesondere liegt also $F_K f$ für jede reguläre Menge K des Simultanspektrums im Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{(A^1 - i)(A^2 - i)}$ des Produktes der Operatoren $(A^1 - i)$ in \mathfrak{A}_1 und $(A^2 - i)$ in \mathfrak{A}_2 . In der Tat erhellt zunächst unmittelbar die Existenz des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdruckes. Unter Benutzung von Satz 3 folgt

$$s^1 t^2 (\underline{A} - i)^2 F_K f - s^1 s^2 (\underline{A} - i)(\tilde{\underline{A}} + i)F_K f \\ = s^1 [t^2 (\underline{A} - i) - s^2 (\tilde{\underline{A}} + i)] F_K (\underline{A} - i) F_K f = s^1 (A^2 - i) F_K (\underline{A} - i) F_K f.$$

Die Operatoren s^1 in \mathfrak{H}_0 und $(A^2 - i)$ in \mathfrak{A}_2 sind vertauschbar, das folgt durch eine triviale, hier nicht ausgeführte Überlegung. Also liegt $s^1 F_K (\underline{A} - i) F_K f$ in \mathfrak{A}_2 und es ist

$$s^1 (A^2 - i) F_K (\underline{A} - i) F_K f = (A^2 - i) s^1 F_K (\underline{A} - i) F_K f = (A^2 - i) s^1 (\underline{A} - i) F_K f.$$

In entsprechender Weise folgt, daß $t^1 (\tilde{\underline{A}} - i) F_K f$ in \mathfrak{A}_2 liegt und das gilt

$$t^1 t^2 (\underline{A} - i)(\tilde{\underline{A}} - i) F_K f - t^1 s^2 (\tilde{\underline{A}} - i)(\tilde{\underline{A}} + i) F_K f = (A^2 - i) t^1 (\tilde{\underline{A}} - i) F_K f.$$

Nach Satz 3 gilt

$$(A^1 - i) F_K f = s^1 (\underline{A} - i) F_K f + t^1 (\tilde{\underline{A}} - i) F_K f;$$

also liegt $(A^1 - i) F_K f$ in \mathfrak{A}_2 und es ergibt sich die Formel (7.3).

Wir überlegen uns weiter, daß für jedes u aus $\mathfrak{D}_{(A^1 - i)(A^2 - i)}$ und für x^j aus $g^j - n^j$ gilt

$$(7.4) \quad u(x^1, x^2) = (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2, (A^1 - i)(A^2 - i)u)_0.$$

Für $u = \sum_{\nu=1}^N u_\nu^1 u_\nu^2$ mit u_ν^j aus \mathfrak{H}^j ist dies evident. Zu beliebigem u aus $\mathfrak{D}_{(A^1 - i)(A^2 - i)}$

gibt es nun eine Folge u_n von Vektoren der letzteren Art, für die in bezug auf die Metrik $\|u\|_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^1 - i)(A^2 - i)u_n = (A^1 - i)(A^2 - i)u$.

Nach dem FISCHER-RIESZschen Satz folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x^1, x^2) = u(x^1, x^2)$ für fast

alle x^1, x^2 aus g . Daher liefert der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ obige Formel für fast alle x^1, x^2 aus g . Da nun das Produkt $(r_{x^1}^1, r_{x^2}^2, (A^1 - i)(A^2 - i)u)_0$ für x^j aus $g^j - n^j$ erklärt ist und da die Funktion $u(x^1, x^2)$ durch das Element u aus \mathfrak{H}_0 ohnehin nur bis auf eine Nullmenge bestimmt ist, können wir sagen, es gälte die Formel (7.4) für alle x^j aus $g^j - n^j$.

Aus Formel (6.1) leiten wir die Abschätzung $\|F_K f\|_0 \leq c(K) \|f\|$ her. Für u, u_1 aus \mathfrak{H}_0 liegt $(B)^{\frac{1}{2}}u$ und $(B)^{\frac{1}{2}}u_1$ in \mathfrak{H} und es gilt $(u, u_1)_0 = ((B)^{\frac{1}{2}}u, (B)^{\frac{1}{2}}u_1)$, das wurde bereits in § 4 erwähnt. Daher folgt

$$(7.5) \quad \|(B)^{\frac{1}{2}} F_K f\| \leq c(K) \|f\| \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Also ist der Operator $D_K = (B)^{\frac{1}{2}} F_K$ im Raum \mathfrak{H} beschränkt.

Die Formeln (7.3), (7.4) und (7.5) zusammen ergeben endlich für x^j aus $\mathfrak{g}^j - \mathfrak{n}^j$ die Beziehung

$$\begin{aligned} F_K f|_{x^1, x^2} &= (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2, (A^1 - i)(A^2 - i) F_K f)_0 \\ &= ((B)^{\frac{1}{2}} (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2), s^1 t^2 D_K (\underline{A} - i)^2 F_K f) - \\ &\quad - ((B)^{\frac{1}{2}} (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2), s^1 s^2 D_K (\underline{A} - i) (\underline{A} + i) F_K f) + \\ &\quad + ((B)^{\frac{1}{2}} (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2), t^1 t^2 D_K (\underline{A} - i) (\underline{A} - i) F_K f) - \\ &\quad - ((B)^{\frac{1}{2}} (r_{x^1}^1, r_{x^2}^2), t^1 s^2 D_K (\underline{A} - i) (\underline{A} + i) F_K f) \\ &= (\varphi_K; x^1, x^2, f) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_K; x^1, x^2 &= (\underline{A} + i)^2 F_K D_K^* (B)^{\frac{1}{2}} (s^1 r_{x^1}^1, t^2 r_{x^2}^2) - \\ &\quad - (\underline{A} + i) (\underline{A} - i) F_K D_K^* (B)^{\frac{1}{2}} (s^1 r_{x^1}^1, s^2 r_{x^2}^2) + \\ &\quad + (\underline{A} + i) (\underline{A} + i) F_K D_K^* (B)^{\frac{1}{2}} (t^1 r_{x^1}^1, t^2 r_{x^2}^2) - \\ &\quad - (\underline{A} + i) (\underline{A} - i) F_K D_K^* (B)^{\frac{1}{2}} (t^1 r_{x^1}^1, s^2 r_{x^2}^2). \end{aligned}$$

Damit ist die Formel (7.1) bewiesen. Offensichtlich gilt $F_{K'} \varphi_K; x^1, x^2 = \varphi_{K'}; x^1, x^2$ für $K' \subseteq K$. Setzt man in (7.1) speziell $f = \varphi_K; \xi^1, \xi^2$ aus $\mathfrak{g}^j - \mathfrak{n}^j$, so folgt (7.2) und Satz 4 ist bewiesen.

Satz 4a: Mit $\frac{\partial(v)}{(\partial x)^v}$, $v \geq 0$ sei eine beliebige, aber feste partielle Ableitung v -ter Ordnung nach den Variablen x_1^1, \dots, x_n^j bezeichnet. Im Punkte $x^1 = x_0^1$ möge $\frac{\partial(v)}{(\partial x^1)^v} r_{x^1}^1$ im Sinne der Konvergenz von \mathfrak{H}^1 existieren, im Punkte $x^2 = x_0^2$ ebenso $\frac{\partial(v')}{(\partial x^2)^{v'}} r_{x^2}^2$ im Sinne der Metrik von \mathfrak{H}^2 . Dann existiert die Ableitung $\frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} \varphi_K; x^1, x^2$ im Sinne der Konvergenz des Raumes \mathfrak{H}_0 für $x^1 = x_0^1$, $x^2 = x_0^2$ und jedes reguläre K des Simultanspektrums und definiert hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von K eine additive Mengenfunktion, deren Wert ein Vektor in \mathfrak{H}_0 ist, dessen Betrag innerhalb jeder regulären Menge K_0 des Simultanspektrums beschränkt bleibt:

$$(7.6) \quad \left\| \frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} \varphi_K; x^1, x^2 \right\| \leq \left\| \frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} \varphi_{K_0}; x^1, x^2 \right\| \quad \text{für } K \subseteq K_0.$$

Die Ableitung ist für $x^j = x_0^j$ im Sinne der Metrik $\|u\|_0$ stetig, wenn die vorbezeichneten Ableitungen von $r_{x^j}^j$ in $x^j = x_0^j$ hinsichtlich $\|u^j\|$ beide stetig sind.

Für jedes f aus \mathfrak{H} existiert $\frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} f_K(x^1, x^2)$ für $x^j = x_0^j$ und es gilt

$$(7.7) \quad \frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} f_K(x^1, x^2) = \left(\frac{\partial(v+v')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'}} \varphi_K; x^1, x^2, f \right).$$

Der Wert von $\frac{\partial(r+v)}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^v} f_K(x^1, x^2)$ an der Stelle $x^j = x_0^j$ definiert bezüglich seiner Abhängigkeit von K eine komplexwertige additive Intervallfunktion, welche innerhalb jeden regulären Bereiches K_0 beschränkt ist.

Existiert in weiteren Punkten $x^1 = \xi_0^1, x^2 = \xi_0^2$ die Ableitung $\frac{\partial(r'')}{(\partial x^1)^{v''}} r_{x^1}^1$ bzw. $\frac{\partial(r''')}{(\partial x^2)^{v'''}} r_{x^2}^2$, dann existiert für beliebige reguläre Bereiche K auch

$$\frac{\partial(r+v'+v''+v''')}{(\partial x^1)^v (\partial x^2)^{v'} (\partial \xi^1)^{v''} (\partial \xi^2)^{v'''}} \varphi_K; x^1, x^2 (\xi^1, \xi^2)$$

im Punkte $x_0^1, x_0^2; \xi_0^1, \xi_0^2$ und definiert hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von K eine komplexwertige, additive Mengenfunktion, die im Innern jeder regulären Menge K_0 des Simultanspektrums beschränkt bleibt.

Diese Ableitung ist zudem im Punkte $x_0^1, x_0^2; \xi_0^1, \xi_0^2$ bezüglich aller vier Variablen stetig, sofern nur die vier oben angegebenen Ableitungen von $r_{x^j}^j$ in den betreffenden Punkten x_0^j bzw. ξ_0^j stetig sind.

Beweis: Wir überlegen uns, daß z. B. der für u^j aus \mathfrak{H}^j durch $z(u^1, u^2) = (A+i)^2 F_K D_K^*(B)^{\frac{1}{2}} (u^1 u^2)$ definierte Vektor des Raumes \mathfrak{H}_0 stetig von u^1 und u^2 abhängt; es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z(u_n^1, u_n^2) - z(u^1, u^2)\|_0 = 0$, sofern man nur $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^j - u^j\| = 0, j = 1, 2$, hat. (Mit D_K^* sei der beim Beweis von Satz 4 eingeführte Operator bezeichnet.) Es folgt das aus der Beschränktheit des Operators $F_K(A+i)^2 D_K^*$ in \mathfrak{H} und aus $\|(B)^{\frac{1}{2}}[u_n^1 u_n^2 - u^1 u^2]\| = \|u_n^1 u_n^2 - u^1 u^2\|_0 \leq \|u_n^1\| \|u_n^2 - u^2\| + \|u_n^1 - u^1\| \|u^2\|$ sowie aus der für jeden regulären Bereich K des Simultanspektrums gültigen Ungleichung (6.1). Nun ist $\varphi_K; x^1, x^2$ Summe von vier Ausdrücken der obigen Form, in denen nur $(A+i)^2$ durch ein anderes Produkt, z. B. $(\tilde{A}+i)(\tilde{A}-i)$ usw. zu ersetzen ist und wo man u^1, u^2 durch die Vektoren $s^j r_{x^j}^j, t^j r_{x^j}^j; j = 1, 2$, zu ersetzen hat. Sind also z. B. $r_{x^1}^1$ bei $x^1 = x_0^1$ und $r_{x^2}^2$ bei $x^2 = x_0^2$ stetig im Sinne der Metrik von \mathfrak{H}^j , dann folgt die Stetigkeit von $\varphi_K; x^1, x^2$ als Element von \mathfrak{H}_0 im Punkte x_0^1, x_0^2 .

Entsprechend erschließt man ggf. die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen unter den dafür aufgezählten Voraussetzungen. Die spezielle Gestalt von $\varphi_K; x^1, x^2$ ermöglicht es, (7.6) zu schließen. (7.7) folgt unmittelbar aus (7.6) und der Stetigkeit des Skalarproduktes. Wendet man endlich die Formel (7.1) an, so folgt der Rest des Satzes 4a.

§ 8. Der Spektralsatz für separierbare, partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Wir schränken uns in diesem Paragraphen weiter ein auf den bereits in [4] für das Punktspektrum behandelten partiellen Differentialoperator

$$(8.1) \quad \Delta u = \frac{1}{h^1 k^2 + h^2 k^1} \left[-k^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(p^1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(p^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (q^1 k^2 + q^2 k^1) u \right]$$

im Hilbertraum \mathfrak{H} aller komplexwertigen Funktionen $f(x, y)$ von zwei Variablen, die in einem möglicherweise unendlichen offenen Rechteck $l_-^1 < x < l_+^1$

$l_-^2 < y < l_+^2$ erklärt sind und für die im Sinne von LEBESGUE gilt

$$\int_{l_-^1, l_-^2}^{l_+^1, l_+^2} |f|^2 (h^1 k^2 + h^2 k^1) dx dy < \infty. \text{ Wie in [4] seien dabei } p^j, q^j, h^j, k^j \text{ in}$$

$l_-^1 < x < l_+^1, l_-^2 < y < l_+^2$ stetig und mögen für $j = 1$ nur von x , für $j = 2$ nur von y abhängen; es gelte $p^j \neq 0, h^j \geq 0, k^j \geq 0, h^j + k^j > 0$ und $h^j = 0, k^j = 0$ höchstens in einer Menge vom Maße Null.

Mit $q^1(x) = h^1(x) + k^1(x), q^2(y) = h^2(y) + k^2(y)$ erkläre \mathfrak{H}_1 als die Gesamtheit aller $u^1(x), l_-^1 < x < l_+^1$, mit $\int_{l_-^1}^{l_+^1} |u^1(x)|^2 q^1(x) dx < \infty, \mathfrak{H}^2$ ebenso als

die Gesamtheit aller $u^2(y), l_-^2 < y < l_+^2$, mit $\int_{l_-^2}^{l_+^2} |u^2(y)|^2 q^2(y) dy < \infty$; es sei

$$\text{erklärt } s^1(x) = \frac{h^1(x)}{h^1(x) + k^1(x)}, t^1(x) = \frac{k^1(x)}{h^1(x) + k^1(x)}, s^2(y) = \frac{h^2(y)}{h^2(y) + k^2(y)}, t^2(y) = \frac{k^2(y)}{h^2(y) + k^2(y)} \text{ und endlich } A^j u^j = \frac{1}{q^j} [- (p^j u^j)' + q^j u^j] \text{ für } u^j \text{ aus } \mathfrak{H}^j:$$

1. u^j stetig, $p^j u^{j'}$ totalstetig im offenen Intervall $\langle l_-^j, l_+^j \rangle$;

2. $u^j, A^j u^j$ liege in \mathfrak{H}^j ;

3. ggf. Randbedingungen bei l_\pm^j , die so gewählt sein müssen, daß A^j in \mathfrak{H}^j hypermaximaler Operator des Raumes \mathfrak{H}^j ist (nach der Theorie der singulären Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme gibt es immer mindestens ein System solcher Randbedingungen).

Die Operatoren A^j in \mathfrak{H}^j genügen dann zusammen mit den durch

$$s^1 u^1 = s^1(x) u^1(x) \dots t^2 u^2 = t^2(y) u^2(y)$$

erklärten Operatoren s^j, t^j den in § 1 geforderten Bedingungen und der mit ihrer Hilfe definierte separierbare Operator ist mit dem zu Anfang dieses Paragraphen definierten Operator A identisch. Auch der oben erklärte Funktionenraum \mathfrak{H} entsteht nach den Regeln des § 1 aus den Räumen \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 .

Wir bemerken vorweg, daß man ohne Heranziehung weiterer Hilfsmittel und auf völlig analogem Wege die Sätze dieses Paragraphen übertragen kann auf den Fall, daß A^j in \mathfrak{H}^j hypermaximale gewöhnliche Differentialoperatoren 2 n -ter Ordnung sind, wie sie von K. KODAIRA und anderen behandelt worden sind.

Man fordere nunmehr, daß für die Operatoren A^j in \mathfrak{H}^j die Voraussetzungen des Satzes 1 und dessen Zusatzes 1 erfüllt seien. Dann sind alle in § 2 bis 6 hergeleiteten Resultate in diesem speziellen Falle verwendbar. Aber auch die Sätze 4 und 4a aus § 7 sind anwendbar, denn bekanntlich sind die Resolventen $(A^j - i)^{-1}$ Integraloperatoren vom CARLEMANSCHEN Typus. Die zugehörigen GREENSchen Funktionen $r_x^1(\xi); r_y^2(\eta)$ sind für jedes x, y aus $l_-^1 < x < l_+^1$ bzw. $l_-^2 < y < l_+^2$ als Vektoren von \mathfrak{H}^j erklärt; sie sind zudem als Elemente von \mathfrak{H}^j in $l_-^1 < x < l_+^1$ bzw. $l_-^2 < y < l_+^2$ stetig nach x bzw. y differenzierbar. Satz 4a liefert daher die Aussage, daß jedes Simultaneigenpaket $F_K f$ mit regulärem Bereich K in $l_-^1 < x < l_+^1, l_-^2 < y < l_+^2$ stetig und stetig differenzierbar

ist und daß auch seine zweite gemischte partielle Ableitung dort stetig ist sowie daß gilt

$$(8.2) \quad \begin{aligned} F_K f|_{x,y} &= (\varphi_K; x, y, f); \quad \frac{\partial}{\partial x} F_K f|_{x,y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_K; x, y, f \right); \\ \frac{\partial}{\partial y} F_K f|_{x,y} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_K; x, y, f \right); \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_K f|_{x,y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_K; x, y, f \right) \end{aligned}$$

mit einem als Vektor des Raumes \mathfrak{H}_0 in $l_-^1 < x < l_+^1$, $l_-^2 < y < l_+^2$ stetigen $\varphi_K; x, y$, für das auch $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_K; x, y$, $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_K; x, y$, und $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_K; x, y$, stetig sind.

Wir bezeichnen mit $w_r^1(x; \lambda, \mu)$, $w_r^2(y; \lambda, \mu)$, $r = 1, 2$, die Lösungen von

$$(8.3) \quad -(p^j u^{j'})' + q^j u^j = (\lambda h^j + \mu k^j) u^j,$$

für die für $x = l^j$, $y = l^j$, $l_-^j < l^j < l_+^j$ gilt

$$w_1^j(l^j; \lambda, \mu) = 1; \quad p^j w_1^{j'}|_{l^j} = 0; \quad w_2^j(l^j; \lambda, \mu) = 0; \quad p^j w_2^{j'}|_{l^j} = 1.$$

(Mit $w_r^{j'}$ sei die Ableitung von w_r^j nach x bzw. y gemeint.) Offenbar sind die w_r^j für jedes feste x, y ganze Funktionen in jeder der Variablen λ und μ . Für eine beliebige in einem Bereich K_0 der λ, μ -Ebene erklärte, beschränkte Mengenfunktion $\gamma(K)$ erkläre die Integrale $J_{r\kappa} = \int_{K_0} w_r^1(x; \lambda, \mu) w_\kappa^2(y; \lambda, \mu) d\gamma(K)$

genau analog zum gewöhnlichen Stieltjesintegral und zum zweidimensionalen RIEMANNschen Integral.

Hilfssatz 7: Es gibt vier Simultaneigenpakete $v_{K; r, \kappa}$, $r, \kappa = 1, 2$, erklärt für jede im Sinne von § 8 reguläre Menge K des Simultanspektrums, so daß gilt

$$(8.4) \quad f_{K_0}(x, y) = F_{K_0} f|_{x,y} = \sum_{r, \kappa=1}^2 \int_{K_0} w_r^1(x; \lambda, \mu) w_\kappa^2(y; \lambda, \mu) d[(v_{K; r, \kappa}, f)|_{x,y}].$$

Die $v_{K; r, \kappa}$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Wenn wir in (8.4) speziell setzen $x = l^1$, $y = l^2$, so folgt

$$(8.5) \quad \begin{aligned} f_{K_0}(l^1, l^2) &= (v_{K; 1, 1}, f); \quad p^2 \frac{\partial f_{K_0}}{\partial y} \Big|_{l^1, l^2} = (v_{K; 1, 2}, f) \\ p^1 \frac{\partial f_{K_0}}{\partial x} \Big|_{l^1, l^2} &= (v_{K; 2, 1}, f); \quad p^1 p^2 \frac{\partial^2 f_{K_0}}{\partial x \partial y} \Big|_{l^1, l^2} = (v_{K; 2, 2}, f). \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den vier Gleichungen (8.2) ergibt sich daher aus der Richtigkeit von (8.4):

$$(8.6) \quad \begin{aligned} v_{K; 1, 1} &= \varphi_{K; 1, 1, l^1}; \quad v_{K; 1, 2} = p^2(l^2) \frac{\partial}{\partial y} \varphi_{K; 1, 2, y} \Big|_{y=l^2} \\ v_{K; 2, 1} &= p^1(l^1) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{K; 2, 1, x} \Big|_{x=l^1}; \quad v_{K; 2, 2} = p^1(l^1) p^2(l^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_{K; 2, 2, x, y} \Big|_{x=l^1, y=l^2} \end{aligned}$$

Damit ist die Eindeutigkeit der $v_{K; r, \kappa}$ nachgewiesen.

Zur Vollendung des Beweises von Hilfssatz 7 haben wir zu zeigen, daß die Funktion

$$\zeta(K_0; x, y) = f_{K_0}|_{x,y} = \sum_{r, \kappa=1}^2 \int_{K_0} w_r^1(x; \lambda, \mu) w_\kappa^2(y; \lambda, \mu) d\gamma_{r\kappa}(K).$$

wo definiert sei

$$\gamma_{1,1}(K) = f_K|_{l^1, l^2}; \quad \gamma_{1,2}(K) = p^2(l^2) \frac{\partial}{\partial y} f_K(x, y)|_{l^1, l^2};$$

$\gamma_{2,1}(K) = p^1(l^1) \frac{\partial}{\partial x} f_K(x, y)|_{l^1, l^1}$; $\gamma_{2,2}(K) = p^1(l^1) p^2(l^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_K(x, y)|_{l^1, l^1}$,
identisch verschwindet.

Für $f_K = F_K f$ gilt

$$\underline{A} f_{K_0} = \int_{\tilde{K}_0} \lambda df_K, \quad \tilde{A} f_{K_0} = \int_{\tilde{K}_0} \mu df_K,$$

wobei die Konvergenz der Integrale im Sinne von \mathfrak{S} zu verstehen ist; also für fast alle x, y aus $l_-^1 < x < l_+^1$, $l_-^2 < y < l_+^2$ gilt. Aus der Stetigkeit von $\underline{A} f_{K_0}|_{x,y}$ sowie der des Integrales $\int_{\tilde{K}_0(K)} \lambda d(f_K|_{x,y})$ in x und y folgt, daß auch gilt

$$\underline{A} f_{K_0}|_{x,y} = \int_{\tilde{K}_0(K)} \lambda d(f_K|_{x,y}); \quad \tilde{A} f_{K_0}|_{x,y} = \int_{\tilde{K}_0(K)} \mu d(f_K|_{x,y})$$

für jedes x, y aus $l_-^1 < x < l_+^1$, $l_-^2 < y < l_+^2$. Anwendung der Gleichungen (6.2) liefert daher, daß die Funktion $\zeta_1(K_0; x, y) = f_{K_0}|_{x,y}$ eine Lösung ist des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (8.7) \quad & -\frac{\partial}{\partial x} \left(p^1(x) \frac{\partial}{\partial x} \zeta_1(K_0; x, y) \right) + q^1(x) \zeta_1(K_0; x, y) = h^1(x) \int_{\tilde{K}_0(K)} \lambda d\zeta_1(K; x, y) + \\ & + k^1(x) \int_{\tilde{K}_0(K)} \mu d\zeta_1(K; x, y), \\ & -\frac{\partial}{\partial y} \left(p^2(y) \frac{\partial}{\partial y} \zeta_1(K_0; x, y) \right) + q^2(y) \zeta_1(K_0; x, y) = h^2(y) \int_{\tilde{K}_0(K)} \lambda d\zeta_1(K; x, y) - \\ & - k^2(y) \int_{\tilde{K}_0(K)} \mu d\zeta_1(K; x, y). \end{aligned}$$

Bedenkt man, daß die Funktionen $w_+^1(x; \lambda, \mu)$, $w_+^2(y; \lambda, \mu)$ Lösungen von (8.3) sind, so folgert man leicht die Beziehungen (8.7) auch für jedes der Integrale, die in ζ als weitere Summanden auftreten, also gelten sie auch für ζ selbst. Wir dürfen uns nun ohne Verminderung der Allgemeinheit darauf beschränken $\zeta(K; x, y) = 0$ zu zeigen für alle regulären $K = K_{\lambda_0, \mu_0}$, die die folgende spezielle Rechtecksgestalt besitzen: K_{λ_0, μ_0} ; $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda_0$; $\mu' \leq \mu \leq \mu_0$. Für sie nehmen nach partieller Integration die Gleichungen (8.7) die nachfolgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} (8.8) \quad & -\frac{\partial}{\partial x} p^1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (q^1 - \lambda_0 h^1 - \mu_0 k^1) \zeta = -h^1(x) \int_{\lambda'}^{\lambda_0} \zeta(K_{\lambda, \mu_0}; x, y) d\lambda - \\ & - k^1(x) \int_{\mu'}^{\mu_0} \zeta(K_{\lambda_0, \mu}; x, y) d\mu, \\ & -\frac{\partial}{\partial y} p^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (q^2 - \lambda_0 h^2 + \mu_0 k^2) \zeta = -h^2(y) \int_{\lambda'}^{\lambda_0} \zeta(K_{\lambda, \mu_0}; x, y) d\lambda - \\ & - k^2(y) \int_{\mu'}^{\mu_0} \zeta(K_{\lambda_0, \mu}; x, y) d\mu. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\kappa_1(x; \lambda, \mu) = \zeta(K_{\lambda, \mu}; x, l^2)$; $\kappa_2(x; \lambda, \mu) = \frac{\partial}{\partial y} \zeta(K_{\lambda, \mu}; x, y)|_{y=l^1}$

genügen beide der ersten der Gleichungen (8.8) und überdies den Randbedingungen $\kappa_r^1(l^1; \lambda, \mu) = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_r(x; \lambda, \mu) \Big|_{x=l^1} = 0$. Daher folgt

$$\begin{aligned} \kappa_r(x_0; \lambda_0, \mu_0) = & - \int_{\lambda'}^{\lambda_0} \int_{l^1}^{x_0} g(x_0, x; \lambda_0, \mu_0) \kappa_r(x; \lambda, \mu_0) h^1(x) dx d\lambda - \\ & - \int_{\mu'}^{\mu_0} \int_{l^1}^{x_0} g(x_0, x; \lambda_0, \mu_0) \kappa_r(x; \lambda_0, \mu) k^1(x) dx d\mu \end{aligned}$$

mit

$$g(x_0, x; \lambda_0, \mu_0) = w_1^1(x_0; \lambda_0, \mu_0) w_2^1(x; \lambda_0, \mu_0) - w_1^1(x; \lambda_0, \mu_0) w_2^1(x_0; \lambda_0, \mu_0).$$

Daraus folgt durch die übliche Iteration $\kappa_r(x; \lambda, \mu) = 0$, $r = 1, 2$. Für $\zeta(K_{\lambda, \mu}; x, y)$ gelten also bei festem $x = x_0$ neben der zweiten Gleichung (8.8) die Randbedingungen

$$\zeta(K_{\lambda, \mu}; x_0, l^2) = \frac{\partial}{\partial y} \zeta(K_{\lambda, \mu}; x_0, y) \Big|_{y=l^2} = 0,$$

woraus durch erneute Anwendung der oben durchgeführten Schlußweise folgt, daß $\zeta = 0$ gilt. Also ist Hilfssatz 7 bewiesen.

Satz 5: Es existieren höchstens abzählbar viele simultane Punkteigenwerte $p_r = \{\lambda_r, \mu_r\}$ der Operatoren A und \tilde{A} und zu jedem p_r höchstens vier paarweise orthogonale und normierte simultane Eigenelemente $\psi_{r, n, n'} = \alpha_{r, n, n'} \psi_{r, n}^1(x) \psi_{r, n'}^2(y)$, $n, n' = 1, 2$ in Produktform, für die gilt

$$\begin{aligned} \psi_{r, n, n'} & \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}, \quad \tilde{A} \psi_{r, n, n'} = \lambda_r \psi_{r, n, n'}, \quad \tilde{A} \psi_{r, n, n'} = \mu_r \psi_{r, n, n'}, \\ (8.9) \quad (\psi_{r, n, n'}, \psi_{r, n_1, n_1'}) & = \delta_{r, r_1} \cdot \delta_{n, n_1} \cdot \delta_{n', n_1'}; \quad (\delta_{n, n'} = \text{Kroneckersymbol}). \end{aligned}$$

Es existiert ferner eine 4×4 -Matrix $P(K) = ((\varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}(K)))$ ($\gamma, \kappa = \text{vordere}$, $\gamma', \kappa' = \text{hintere Indizes}$; $\gamma, \gamma', \kappa, \kappa' = 0, 1$) von komplexwertigen, additiven Mengenfunktionen der λ, μ -Ebene, erklärt für jede reguläre Menge K des Simultanspektrums und als Matrix beschränkt innerhalb jedes regulären K_0 , stetig abhängig von λ', μ', μ'' im Falle, daß K_0 das Rechteck $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'', \mu' \leq \mu \leq \mu''$ ist und so daß $P(K)$ für jedes reguläre K positiv semidefinit ist und daß endlich für willkürliche, nicht notwendig im Sinne von § 6 reguläre Bereiche K_0 und für f aus \mathfrak{G} gilt

$$\begin{aligned} F_{K_0} f|_{x, y} = & \sum_{p_r \in K_0} (\psi_{r, n, n'}, f) \psi_{r, n, n'}(x, y) + \\ (8.10) \quad & + \int_{K_0} \sum_{\gamma, \kappa=1}^2 w_{\gamma'}^1(x; \lambda, \mu) w_{\kappa}^2(y; \lambda, \mu) d a_{\gamma \kappa}(K) \end{aligned}$$

mit

$$(8.11) \quad a_{\gamma, \kappa}(K) = \int_{l_+^1} \int_{l_-^2} \omega_{K; \gamma, \kappa}(x, y) f(x, y) (h^1(x) k^2(y) + k^1(x) h^2(y)) dx dy,$$

wobei für die (stetigen) Simultaneigenpakete $\omega_{K; \gamma, \kappa}(x, y)$ in jeder regulären Menge des Simultanspektrums gilt

$$(8.12) \quad \omega_{K; \gamma, \kappa}(x, y) = \int_K \sum_{\gamma', \kappa'=1}^2 w_{\gamma'}^1(x; \lambda, \mu) w_{\kappa'}^2(y; \lambda, \mu) d \varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}(K'),$$

$$(8.13) \quad \varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}(K) = (\omega_{K; \gamma', \kappa'}, \omega_{K; \gamma, \kappa}).$$

Die Integrale $\int_{K_0} w_{\gamma'}^1(x; \lambda, \mu) w_{\kappa}^2(y; \lambda, \mu) d a_{\gamma, \kappa}(K)$ konvergieren dabei in bezug auf x, y gleichmäßig in jedem Teilrechteck $l_+^1 < x < l_+^1, l_+^2 < y < l_+^2$ des Rechteckes $l_-^1 < x < l_+^1, l_-^2 < y < l_+^2$, falls nur die Punktmenge K_0 im Sinne des § 6 regulär ist. Enthält K_0 irreguläre Punkte, dann ist $z = \int \sum_{\gamma, \kappa=1}^2 w_{\gamma'}^1 w_{\kappa}^2 d a_{\gamma, \kappa}(K)$ als uneigentliches Integral im Sinne der Konvergenz in \mathfrak{H} aufzufassen, d. h. z ist diejenige Funktion aus \mathfrak{H} , für die gilt

$$\lim_{\substack{K_0' \rightarrow K_0 a \\ K_0' \subset K_0 a}} \left\| z - \int_{K_0'} \sum_{\gamma, \kappa=1}^2 w_{\gamma'}^1 w_{\kappa}^2 d a_{\gamma, \kappa}(K) \right\| = 0^{10}.$$

Für f aus \mathfrak{H} gilt die Entwicklung

$$(8.14) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\nu, \kappa, \kappa'} (\psi_{\nu, \kappa, \kappa'}, f) \psi_{\nu, \kappa, \kappa'} + \\ &+ \int_a \sum_{\gamma, \kappa=1}^2 w_{\gamma'}^1(x; \lambda, \mu) w_{\kappa}^2(y; \lambda, \mu) d a_{\gamma, \kappa}(K), \end{aligned}$$

wobei wiederum Summe und Integral im Sinne der Metrik von \mathfrak{H} konvergieren.

Beweis: Wir ziehen zum Beweis die Sätze 9 und 10 der §§ 13 und 14 heran. Die Voraussetzungen dieser Sätze sind hier erfüllt. Insbesondere sind die Nullräume der Operatoren $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$ und $(A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2)$ für jedes λ, μ höchstens zweidimensional, da es sich um Differentialoperatoren zweiter Ordnung handelt. Zu jedem simultanen Punkteigenwert $p_{\nu} = \{\lambda_{\nu}, \mu_{\nu}\}$ von \underline{A} und \tilde{A} gibt es daher höchstens vier paarweise orthogonale Eigenelemente $\psi_{\nu, \kappa, \kappa'}$ in der Produktform $\psi_{\nu, \kappa, \kappa'} = \alpha_{\nu, \kappa, \kappa'} \psi_{\nu, \kappa'}^1(x) \psi_{\nu, \kappa'}^2(y)$, $\kappa, \kappa' = 1, 2$, (mit Normierungsfaktoren $\alpha_{\nu, \kappa, \kappa'}$), welche den zugehörigen simultanen Eigenraum aufspannen. Für sie gilt $\psi_{\nu, \kappa, \kappa'} \in \mathfrak{A} \cdot \tilde{\mathfrak{A}}$.

Nach Satz 9 gibt es keine Eigenpakete von \underline{A} in \mathfrak{A} , die gleichzeitig Eigenelemente von \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind und umgekehrt keine Eigenpakete von \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$, die Eigenelemente von \underline{A} in \mathfrak{A} sind. Sind daher P_{λ} und \tilde{P}_{μ} die stetigen Anteile der Spektralscharen E_{λ} und \tilde{E}_{μ} und ist $P_{\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{P}_{\lambda} \tilde{P}_{\infty} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_{\mu}$, so folgt für einen beliebigen, nicht notwendig regulären Bereich K_0 der λ, μ -Ebene

$$\begin{aligned} F_{K_0} f &= \sum_{p_{\nu} \in K_0} (\psi_{\nu, \kappa, \kappa'}, f) \psi_{\nu, \kappa, \kappa'} + \\ &+ \lim_{\substack{K \rightarrow K_0 a \\ K \subset K_0 a}} F_K P_{\infty} \tilde{P}_{\infty} f. \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 7 folgen daher sofort die Formeln (8.10) und (8.11) mit $\omega_{K; \gamma, \kappa} = P_{\infty} P_{\infty} v_{K; \gamma, \kappa}$. Die $\omega_{K; \gamma, \kappa}$ sind wiederum stetige Simultaneigenpakete¹¹⁾. Nach Hilfssatz 7 gilt daher

$$\omega_{K; \gamma, \kappa} |_{x, y} = \sum_{\gamma', \kappa'=1}^2 \int_K w_{\gamma'}^1(x; \lambda, \mu) w_{\kappa'}^2(y; \lambda, \mu) d (\omega_{K'; \gamma', \kappa'}, \omega_{K; \gamma, \kappa}).$$

¹⁰⁾ Zur Definition von a vgl. den Schluß von § 6.

¹¹⁾ Unter einem stetigen Simultaneigenpaket verstehen wir ein Eigenpaket v_K , welches stetig von $\lambda', \lambda'', \mu', \mu''$ abhängt, im Falle, daß speziell K als das Rechteck $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'', \mu' \leq \mu \leq \mu''$ gewählt wird.

Setzt man speziell $\varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}(K) = (\omega_K; \gamma', \kappa' \omega_K; \gamma, \kappa)$, so ergeben sich die Relationen (8.12) und (8.13).

Aus (8.13) ergibt sich unmittelbar, daß die Matrix $P(K) = ((\varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}(K)))$ positiv semidefinit ist. Aus der Stetigkeit der Eigenpakete $\omega_K; \gamma, \kappa$ folgt die für die $\varrho_{\gamma, \kappa; \gamma', \kappa'}$ behauptete Stetigkeitseigenschaft. Auch folgert man unmittelbar die gleichmäßige Beschränktheit der Matrix $P(K)$ für $K \subseteq K_1$ (K_1 eine beliebige reguläre Menge des Simultanspektrums). Läßt man in (8.10) die Menge K_0 eine die Menge α ausschöpfende Folge durchlaufen, so ergibt sich (8.14). Damit ist Satz 5 bewiesen.

Wir fragen zuletzt nach Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung (8.14) in bezug auf die Variablen x und y . Dazu sei ohne Beweis folgendes Resultat angegeben.

Satz 5a: Wenn der Operator $B = (s^1 s^2 + t^1 t^2)^{-1}$ beschränkt ist, so daß die beiden Metriken $\|u\|$ und $\|u\|_0$ topologisch äquivalent sind — das ist z. B. der Fall, wenn $(s^1)^{-1}$ und $(s^2)^{-1}$ oder $(s^1)^{-1}$ und $(t^1)^{-1}$ beschränkt sind — dann ist die Entwicklung (8.14) für jedes f aus dem Durchschnitt der Definitionsbereiche $\mathfrak{D}_{(\Delta - i)^2}$ und $\mathfrak{D}_{(\tilde{\Delta} - i)^2}$ gleichmäßig konvergent in jedem Rechteck

$$l'_- \leq x \leq l'_+, \quad l''_- \leq y \leq l''_+ \quad \text{mit} \quad l'_- < l'_+ < l''_+ < l''_-, \quad l''_- < l''_+ < l'_+ < l'_-.$$

Literatur.

- [1] CARLEMAN, T.: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique; Uppsala 1923. — [2] CARLEMAN, T.: Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger; Arkiv för Math. Astr. och Fysik, 24 B, No 11. — [3] CORDES, H. O.: Separation der Variablen in HILBERTschen Räumen; Math. Ann. 125, 401—434 (1953). — [4] CORDES, H. O.: Der Entwicklungssatz nach Produkten bei singulären Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die durch Separation zerfallen; Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1954. — [5] FRIEDRICHS, K. O.: On the perturbation of continuous spectra; Communicat. Appl. Math. 1, 361—406 (1948). — [6] HEINZ, E.: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung; Math. Ann. 123, 415—438 (1951). — [7] HILB, E.: Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen; Math. Ann. 66, 1—66 (1909). — [8] KODAIRA, K.: On Ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions; Amer. J. Math. 72, 502—544 (1950). — [9] MOSER, J.: Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung; Math. Ann. 125, 366—393 (1953). — [10] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, II. Mitteilung; Math. Ann. 118, 677—685 (1937); V. Mitteilung; Math. Ann. 118, 462—484 (1942). — [11] RELICH, F.: Spectral theory of a second-order ordinary differential operator; lectures delivered at New York University Fall 1950. — [12] SCHUR, I.: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen; J. f. reine angew. Math. 140, 1—28 (1911). — [13] STONE, M. H.: Linear transformations in Hilbert space; Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XV, New York 1932. — [14] TITCHMARSH, E. C.: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations; Oxford 1946. — [15] WEYL, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 68, 220—269 (1910). — [16] WEYL, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2. Note); Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1910, 442—467. — [17] YOHKAWA, J.: Ein zweiparametriges Oszillationstheorem; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1910, 586—594.

(Eingegangen am 12. Mai 1954.)

Über Zusammenhangseigenschaften von Grenzmengen.

Von

OTHMAR ZAUBEK in Wien.

Es sollen hier einige Entwicklungen über Zusammenhangseigenschaften von Grenzmengen gebracht werden, deren Ergebnisse über den bekannten Satz von ZORETTI¹⁾ und analoge bekannte Sätze hinausreichen und welche in der mir bekannten Literatur nicht auftreten.

Der Satz von ZORETTI wird gewöhnlich für metrische Punktmengen ausgesprochen und bewiesen, er gilt jedoch auch für gewisse topologische Räume. Wir wollen in den folgenden Entwicklungen unter einem topologischen Raum einen Raum verstehen, in welchem das zweite Trennungsaxiom (die zweite Trennungseigenschaft) gilt. Um etwaigen Mißverständnissen und Unklarheiten vorzubeugen, verstehen wir also hier unter einem topologischen Raum, bzw. unter einer topologischen Menge genau jenen Raum, wie er bei H. HAHN, *Reelle Funktionen*, 1932, S. 46, § 9, 1²⁾ erklärt wird. Ebenso werden alle anderen hier verwendeten Begriffe, soweit diese nicht näher erklärt werden, wie offen, abgeschlossen, Häufungspunkt einer Punktmenge, Häufungspunkt einer Punktfolge usw., genau in dem Sinne verstanden, wie diese in dem genannten Buche von H. HAHN erklärt sind.

Um die Sätze sehr allgemein aussprechen zu können, ist es zweckmäßig, einige, meines Wissens bisher nicht verwendete, den Problemen angepaßte Begriffe zu verwenden. Wir geben dazu folgende Erklärung:

Definition 1. Die unendliche Punktfolge $((a_n))$ eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilfolge derselben mindestens einen Häufungspunkt hat.

Ist $((A_n))$ eine unendliche Folge von Mengen desselben topologischen Raumes, $((a_n))$ eine Punktfolge und gibt es zu jedem l ein n_l , so daß $n_{l+1} > n_l$ und $a_l \in A_{n_l}$ ist, so heißt die Punktfolge $((a_l))$ der Mengenfolge $((A_n))$ zugeordnet.

$((A_n))$ heißt kompakt, wenn jede $((A_n))$ zugeordnete Punktfolge kompakt ist.

Eine topologische Menge heißt fastzusammenhängend, wenn ihre abgeschlossene Hülle zusammenhängend ist.

Aus dieser Definition ergibt sich sogleich, daß jede Mengenfolge, deren Glieder Mengen eines kompakten Raumes sind, kompakt ist. Nennen wir abweichend von H. HAHN die obere (untere) Näherungsgrenze von $((A_n))$, wie

¹⁾ L. ZORETTI: J. d. Math. (6) 1 (1905), 8. HAUSDORFF: Mengenlehre, 1935, S. 163, Satz XIX. Dieses Werk wird im folgenden kurz als HAUSDORFF angeführt.

²⁾ Im folgenden kurz als HAHN angeführt.

meist üblich, den oberen (unteren) abgeschlossenen Limes von $((A_n))$ und bezeichnen wir in den folgenden Entwicklungen allgemein mit X^0 die abgeschlossene Hülle der Punktmenge X , so gilt folgender Satz:

Satz³⁾. Ist $((A_n))$ eine kompakte Mengenfolge eines topologischen Raumes R , \bar{A} ihr oberer abgeschlossener Limes und U eine beliebige Umgebung von \bar{A} , so ist $A_n \subseteq U$ und, wenn R ein normaler Raum ist, sogar $A_n^0 \subseteq U$ für fast alle n . Ist R ein metrischer Raum, so ist \bar{A} in sich kompakt. Ist R ein metrischer Raum und \underline{A} der untere abgeschlossene Limes von $((A_n))$, $\varrho > 0$ und $A_{n,\varrho}$ die ϱ -Umgebung von A_n , so ist $A \subseteq A_{n,\varrho}$ für fast alle n .

Beweis. Angenommen, der erste Teil des Satzes wäre nicht richtig, so gäbe es unendlich viele n_k , so daß $a_{n_k} \notin A_{n_k}$ und $a_{n_k} \sim \varepsilon U$ ist. $((a_{n_k}))$ ist eine $((A_n))$ zugeordnete Punktfolge und hat, weil $((A_n))$ kompakt ist, mindestens einen Häufungspunkt h . Es ist $h \sim \varepsilon U$, während andererseits $h \in \bar{A}$ ist. Dies ist ein Widerspruch. Der zweite Teil des Satzes ergibt sich aus dem ersten Teile mit Hilfe eines bekannten Satzes⁴⁾ über Umgebungen abgeschlossener Mengen in normalen Räumen.

Ist \bar{A} eine unendliche Menge und B eine beliebige, abzählbar unendliche Teilmenge $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ von A , so gibt es zu jedem natürlichen l ein n_l , so daß $a_{n_l} b_l < \frac{1}{l}$, $a_{n_l} \in A_{n_l}$ ist und $n_{l+1} > n_l$ für jedes l ist. $((a_{n_l}))$ ist eine $((A_n))$ zugeordnete Folge, und da $((A_n))$ kompakt ist, hat $((a_{n_l}))$ mindestens einen Häufungspunkt h , und da $a_{n_l} b_l < \frac{1}{l}$ ist, ist h Häufungspunkt von B . Da A abgeschlossen ist, ist daher \bar{A} in sich kompakt.

Da nun A abgeschlossen und Teilmenge von \bar{A} ist, ist A in sich kompakt. Nun folgt der letzte Teil des Satzes aus einem bekannten Satze über Mengenfolgen⁵⁾.

Beim Satze als auch beim Beweise sind, abweichend von H. HAHN, auch gegebenenfalls Umgebungen der leeren Menge zu betrachten.

Wir können nun folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. Ist $((A_n))$ eine kompakte Mengenfolge eines normalen Raumes R , deren Mengen A_n fast alle fastzusammenhängend sind, und ist der untere abgeschlossene Limes \underline{A} der Folge nicht leer, so ist der obere abgeschlossene Limes \bar{A} der Folge zusammenhängend.

Beweis. Ist \bar{A} nicht zusammenhängend, so gibt es zwei nicht leere, abgeschlossene, fremde Mengen B_1 und B_2 , so daß $B_1 + B_2 = \bar{A}$ ist. Da R normal ist, gibt es zwei fremde offene Mengen U_1 und U_2 , so daß $B_1 \subseteq U_1$ und $B_2 \subseteq U_2$ ist. Da $((A_n))$ kompakt, R normal und $U = U_1 + U_2$ eine Umgebung von \bar{A} ist, ist nach dem soeben bewiesenen Satze $A_n^0 \subseteq U$ für fast alle n . Da nun nach Voraussetzung A_n^0 für fast alle n zusammenhängend ist, gibt es ein n^* , so daß für $n \geq n^*$, A_n^0 entweder Teilmenge von U_1 oder Teilmenge von U_2 ist. Da B_1 und B_2 beide nicht leer sind, gibt es daher unendlich viele Glieder der

³⁾ Der Satz stellt eine Verallgemeinerung und Verschärfung der Sätze 17.1.51 und 17.1.61 im Buche von HAHN dar.

⁴⁾ HAHN, S. 87, Satz 14.2.21.

⁵⁾ HAHN, S. 108, Satz 17.1.61.

Folge, welche Teilmenge von U_1 , und unendlich viele Glieder, welche Teilmenge von U_2 sind. Daraus folgert man sogleich, daß \bar{A} leer ist. Dies gibt einen Widerspruch.

Um nun zu allgemeineren Sätzen zu gelangen, verwenden wir folgende bekannte Beziehung⁶⁾, welche auch direkt sehr leicht nachgewiesen werden kann. Bezeichnen wir generell mit \bar{A} den oberen abgeschlossenen Limes von (A_n) , so ist

(1) $\bar{A} = S_1^0 S_2^0 \dots S_n^0 \dots$, wobei $S_n = A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+m} + \dots$ ist. Ist (A_n) kompakt, so ist, wie man leicht sieht, auch (S_n) kompakt. Mit Hilfe dieser Darstellung beweisen wir nun folgenden Satz:

Satz 2. Ist (A_n) eine kompakte Mengenfolge eines normalen Raumes und ist $S_n = A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m} + \dots$, so ist, damit ihr oberer abgeschlossener Limes \bar{A} zusammenhängend ist, notwendig und hinreichend, daß für je zwei fremde offene Mengen U und V , für welche US_n und VS_n für jedes n nicht leer sind, für jedes n , S_n^0 nicht Teilmenge von $U + V$ ist.

Beweis. Ist nämlich die Bedingung nicht erfüllt, so gibt es zwei fremde offene Mengen U und V , so daß für unendlich viele n_k , $S_{n_k}^0 \subseteq U + V$ und sowohl $S_{n_k} U$ als auch $S_{n_k} V$ nicht leer sind. Für jedes k gibt es ein $a_k \in US_{n_k}$ und ein $b_k \in VS_{n_k}$, und da (A_n) , also auch (S_n) kompakt und außerdem (S_n) monoton abnehmend ist, besitzen die Folgen (a_k) und (b_k) je mindestens einen Häufungspunkt, welcher zu jedem S_n^0 gehört. Es ist, wie man sogleich sieht, $h \in U$ und $h' \in V$. Da h und h' Punkte von \bar{A} sind, sind $\bar{A}U$ und $\bar{A}V$ nicht leer, und da nach (1) \bar{A} der Durchschnitt der Mengen S_n^0 ist, ist $\bar{A} \subseteq S_{n_k}^0 \subseteq U + V$. Also ist $\bar{A} = \bar{A}U + \bar{A}V$. Dies ist eine Zerlegung von \bar{A} in zwei nicht leere, fremde, in \bar{A} offene Summanden, \bar{A} ist daher nicht zusammenhängend. Die Bedingung des Satzes ist daher notwendig. Ist andererseits \bar{A} nicht zusammenhängend, so gibt es bei den Voraussetzungen über den zu Grunde gelegten Raum, wie beim Beweise des Satzes 1 näher gezeigt wurde, zwei fremde, offene Mengen U und V , so daß $\bar{A} \subseteq U + V$ und $\bar{A}U$ und $\bar{A}V$ nicht leer sind. Da die Folge (A_n) kompakt, der Raum normal und $U + V$ eine Umgebung von \bar{A} ist, so ist nach dem eingangs bewiesenen Satze $S_n^0 \subseteq U + V$ für fast alle n . Andererseits ist nach (1) $US_n^0 \supseteq \bar{A}U$ und $VS_n^0 \supseteq \bar{A}V$. Es sind daher für alle n , US_n^0 und VS_n^0 nicht leer, und da U und V offen sind, sind nach einem bekannten Satze⁷⁾ auch US_n und VS_n für jedes n nicht leer. Damit ist der Satz auf indirektem Wege bewiesen.

Der Satz 2 enthält Satz 1 als Folgesatz. Sind nämlich U und V zwei beliebige, den Bedingungen des Satzes 2 genügende Mengen und ist $S_n^0 \subseteq U + V$ und A_n fastzusammenhängend für fast alle n , so ist A_n^0 für fast alle n entweder Teilmenge von U oder von V . Also ist in diesem Falle der untere abgeschlossene Limes der Folge leer.

Für die Praxis ist es offenbar bequemer, einen vom Satze 2 unabhängigen direkten Beweis des Satzes 1 zu haben.

⁶⁾ HAHN, S. 105, Satz 17.1.14.

⁷⁾ HAHN, S. 58, Satz 10.5.411.

In metrischen Räumen kann man mit spezifisch metrischen Begriffsbildungen weitere Kriterien entwickeln. Diesen wollen wir uns jetzt zuwenden.

Definition 2. Die obere Grenze der Distanzen⁸⁾ je zweier Punkte einer mehrpunktigen, metrischen Menge heißt die innere Distanz der Punktmenge. Die innere Distanz einer höchstens einpunktigen metrischen Punktmenge wird Null gesetzt.

Es gilt dann der Satz:

Satz 3. Ist $i(A)$ die innere Distanz von A , $i(B)$ diejenige von B und ist A Teilmenge der ϱ -Umgebung B_ϱ von B und B Teilmenge der σ -Umgebung A_σ von A , so ist entweder $|i(A) - i(B)| \leq 2 \max(\varrho, \sigma)$ oder es ist $i(A) = i(B) = +\infty$.

Beweis. Ist A mehrpunktig, $\vartheta > 0$ und sind a und b zwei beliebige Punkte von A und $i(B) < +\infty$, so gibt es zwei Punkte $a' \in B$ und $b' \in B$, so daß $aa' < \varrho$ und $bb' < \varrho$ ist. a' und b' lassen sich in B durch eine $(\vartheta + i(B))$ -Kette⁹⁾ verbinden. Es gibt also endlich viele Punkte $a' = p'_1, p'_2, \dots, p'_n = b'$ aus B , so daß $p'_i p'_{i+1} < \vartheta + i(B)$ ist. Da B Teilmenge von A_σ ist, gibt es zu jedem p'_i ein p_i aus A , so daß $p_i p'_i < \sigma$ ist. Nach der Entfernungsungleichung für metrische Räume ist daher $ap_2 \leq aa' + a'p'_2 + p'_2 p_2 < \vartheta + \sigma + i(B)$ und analog ist für $i \leq n-2$, $p_i p_{i+1} < 2\sigma + \vartheta + i(B)$ und $p_{n-1} b < \varrho + \vartheta + \sigma + i(B)$. Demnach lassen sich je zwei Punkte von A durch eine $i(B) + \vartheta + 2 \max(\varrho, \sigma)$ -Kette in A verbinden. Völlig analog verläuft der Beweis, wenn man von der Menge B ausgeht. Ist eine der Mengen einpunktig oder leer, so ergibt sich der Beweis des Satzes unmittelbar. Da $\vartheta > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist damit der Satz bewiesen.

Nennen wir in üblicher Weise die Mengenfolge $((A_n))$ metrisch konvergent mit dem Limes A , wenn es eine abgeschlossene Menge A gibt, so daß für jedes $\varrho > 0$, $A_n \subseteq A_\varrho$ und $A \subseteq A_{n,\varrho}$ für fast alle n gilt¹⁰⁾, so folgt aus dem Satze 3 sogleich der wichtige Satz:

Satz 4¹¹⁾. Ist die Folge $((A_n))$ metrisch konvergent, A ihr Limes, so hat die Folge $i(A_n)$ einen Grenzwert und es ist $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) = i(A)$.

Aus dem letzten Satz ergibt sich mit Hilfe der Darstellung (1) und dem eingangs bewiesenen Satz, aus welchem folgt, daß im metrischen Raume monotone, kompakte Folgen metrisch konvergent sind, und dem leicht zu beweisenden Satze, wonach für die innere Distanz der Vereinigungsmenge V aller Glieder A_n einer monoton wachsenden Folge $((A_n))$ die Beziehung gilt: $i(V) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} i(A_n)$, sogleich die Beziehung:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} i(A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}) \geq i(S_n).$$

⁸⁾ HAUSDORFF, 1935, S. 158.

⁹⁾ HAHN, S. 100, 2. Etwas davon abweichend bei HAUSDORFF, S. 158.

¹⁰⁾ Die hier verwendete Definition der metrischen Konvergenz stimmt mit dem Konvergenzbegriff von HSÜ-PAO-LU überein. HSÜ-PAO-LU: On the limit of a sequence of point sets. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 502—504 (1935).

¹¹⁾ Ein Teil dieses Satzes findet sich für monoton abnehmende Folgen bei ALEXANDROFF-HOFF: Topologie, 1935, S. 118, Satz III.

Ist nun $((A_n))$ kompakt, so ist auch $((S_n))$ kompakt, also, worauf soeben hingewiesen wurde, $((S_n))$ metrisch konvergent, so daß $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(S_n) = i(A)$ ist, so daß schließlich die Beziehung gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\lim_{m \rightarrow +\infty} i(A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+m})] \geq i(A).$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich sogleich nach einem bekannten Satze¹²⁾ hinreichende Bedingungen dafür, daß der obere abgeschlossene Limes einer kompakten Mengenfolge zusammenhängend ist. Im kompakten Raume gelten gemäß den vorhergehenden Überlegungen in den beiden Beziehungen die Gleichheitszeichen, und die unteren Limiten können einfach durch die Grenzwerte ersetzt werden. Denn dann sind die Folgen $((B_m^{(n)}))$ mit $B_m^{(n)} = A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}$ kompakt und monoton, also metrisch konvergent mit dem Limes S_n^0 und es ist $i(S_n^0) = i(S_n)$, da, wie man sehr leicht zeigt, für jede metrische Menge X , $i(X) = i(X^0)$ ist. Es bleibt also die Frage offen, ob die Gleichheitszeichen in diesen Beziehungen für kompakte Folgen auch in nicht kompakten Räumen, bzw. in Räumen gelten, in welchen für alle n , S_n nicht kompakt ist. Ein sehr einfaches Beispiel für den letzten Fall erhalten wir, wenn wir als Raum die Menge aller rationalen Punkte des R_1 und für A_n die Menge aller rationalen Punkte des Intervalls $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ nehmen. $((A_n))$ ist metrisch konvergent mit dem Limes $\{0\}$, und $((A_n))$ ist kompakt, ohne daß ein A_n kompakt ist, und es gelten trotzdem die Gleichheitszeichen. Um die Frage zu beantworten, erweist es sich als zweckmäßig, feinere Kompakteigenschaften zu verwenden.

Definition 3. Die metrische Menge A heiße λ -kompakt, wenn es zu jedem $\delta > 0$ und jeder unendlichen Teilmenge B von A mindestens einen Punkt p des Raumes gibt, so daß der Durchschnitt von B mit der sphärischen Umgebung von p vom Radius $\lambda + \delta$ unendlich viele Punkte enthält.

Die untere Grenze aller Zahlen λ , für welche A λ -kompakt ist, heißt die Kompaktibilität von A . Gibt es keine reelle Zahl x , für welche A x -kompakt ist, so wird die Kompaktibilität von A , $+\infty$ gesetzt.

Mit Hilfe dieses Begriffes haben wir nun die Möglichkeit, die nicht kompakten Mengen weiter zu unterscheiden, und wir können damit einige der bisher aufgestellten Sätze verschärfen, bzw. verallgemeinern. Wir wollen jedoch hier nur auf zwei Sätze hinweisen, welche wir zur Beantwortung unserer Frage benötigen. Ist $((A_n))$ monoton wachsend, V ihre Vereinigungsmenge und ist V λ -kompakt, so ist:

$$i(V) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \leq \max[i(V), 2\lambda] = m.$$

Der erste Teil der Behauptung wurde bereits vorhin benützt, so daß wir uns auf den Beweis des letzten Teiles der Behauptung beschränken. Diesen beweisen wir indirekt. Wäre die Behauptung nicht richtig, so gäbe es ein $\delta > 0$ und eine unendliche Teilfolge $((A_{n_k}))$ von $((A_n))$, so daß $i(A_{n_k}) \geq m + 2\delta$

¹²⁾ HAHN, S. 101, Satz 16.2.21 und HAUSDORFF, S. 159, Satz XIV.

wäre. Es gäbe dann für jedes k in A_{n_k} mindestens zwei Punkte a_k und b_k , deren Distanz in A_{n_k} größer als $m + \partial$ wäre. $((a_k))$ und $((b_k))$ sind Punktfolgen aus V und da V λ -kom. ist, gibt es ein α , so daß für unendlich viele k , a_k Punkt der sphärischen Umgebung vom Radius $\lambda + \frac{\partial}{6}$ von α ist, und es gibt einen Punkt β mit analogen Eigenschaften für die Folge $((b_k))^{13}$. α und β sind in $V + \{\alpha, \beta\}$ durch eine $\left[\max(i(V), \lambda) + \frac{\partial}{6}\right]$ -Kette verbunden, deren endlich viele Punkte $\alpha = p_1, p_2, \dots, p_n = \beta$, mit Ausnahme höchstens von α und β , Punkte von V und daher Punkte fast aller A_n sind. Daher ist die Kette $a_k, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, b_k$ eine $\left[\max(i(V), 2\lambda) + \frac{\partial}{3}\right]$ -Kette für unendlich viele k in A_{n_k} . Dies steht aber im Widerspruch damit, daß die Distanz von a_k, b_k in A_{n_k} größer als $m + \partial$ für jedes k ist. Aus der soeben bewiesenen Beziehung ergibt sich der folgende Satz:

Satz. Ist $((A_n))$ eine monoton wachsende Mengenfolge eines metrischen Raumes, V ihre Vereinigungsmenge und $K(V)$ die Kompaktibilität von V , so besteht die Beziehung:

$$i(V) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \leq \max[i(V), 2K(V)].$$

Der zweite Satz, welchen wir brauchen, besagt, daß, wenn A λ -kompakt und B Teilmenge der ϱ -Umgebung A_ϱ von A ist, B , $(\varrho + \lambda)$ -kompakt ist. Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten. Wir kehren nun zur Ausgangsfrage zurück. Da $((S_n^0))$ gegen \bar{A} metrisch konvergiert, wenn $((A_n))$ kompakt ist und \bar{A} nach dem eingangs bewiesenen Satze in sich kompakt ist und daher die Kompaktibilität von \bar{A} Null ist, gibt es zu jedem $\partial > 0$ ein n_0 , so daß für $n \geq n_0$ die Kompaktibilität von $S_n^0 < \partial$ ist. Da $((B_m^{(n)}))$ mit $B_m^{(n)} = A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}$ monoton ist mit S_n als Vereinigungsmenge, ist also nach dem soeben bewiesenen Satze:

$$i(S_n) = i(S_n^0) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} i(B_m^{(n)}) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} i(B_m^{(n)}) \leq \max[i(S_n), 2\partial]$$

für $n \geq n_0$. Da $\partial > 0$ beliebig wählbar ist, erhalten wir daher den ersten Teil des folgenden Satzes.

Satz 5. Ist $((A_n))$ eine kompakte Mengenfolge eines metrischen Raumes, \bar{A} ihr oberer abgeschlossener Limes, dann existieren stets die Doppellimiten

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} i(A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} i(A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}) \right] = L \end{aligned}$$

und es ist $L = i(\bar{A})$, auch ist stets $i(\bar{A})$ endlich. \bar{A} ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn $L = 0$ ist.

¹³⁾ Genauer: Es gibt ein α und eine unendliche Teilfolge $((a_{k_l}))$ aus $((a_k))$, so daß für fast alle l , a_{k_l} Punkt der sphärischen Umgebung von α mit dem Radius $\lambda + \frac{\partial}{6}$ ist und zu $((a_{k_l}))$ gibt es eine Teilfolge $((b_{k_l}))$ aus $((b_k))$ mit einem β analoger Eigenschaften.

Der Beweis des letzten Teiles des Satzes ergibt sich aus einem bereits benützten Satze¹²⁾.

Man kann schließlich noch nach weiteren Verallgemeinerungen fragen, und es scheint, daß man eben ohne weitere Voraussetzungen über die notwendigen Bedingungen des Satzes 5 mit den hier verwendeten Begriffen nicht wesentlich hinauskommen kann.

Man kann nun den Begriff der inneren Distanz auf Systeme von Mengen eines metrischen Raumes erweitern. Ist nämlich m ein Mengensystem, dann wollen wir die Mengen L und M aus m durch eine q -Kette in m verbunden nennen, wenn es endlich viele Mengen $L = V_1, V_2, \dots, V_n = M$ aus m gibt, so daß die untere Entfernung von V_i V_{i+1} , für $i = 1, 2, \dots, n-1$, $< q > 0$ ist. Die untere Grenze aller Zahlen q , für welche L und M durch eine q -Kette in m verbunden sind, nennen wir die Distanz von L und M im Mengensystem m . Analog der Def. 2 wird nun die innere Distanz $i(m)$ von m erklärt. Ist nun $((A_n))$ eine unendliche Mengenfolge, dann betrachten wir das Mengensystem $\mathfrak{R}_n = \{A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}, \dots\}$ und bezeichnen den $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(\mathfrak{R}_n)$ als die obere Grenzentfernung $\bar{e}((A_n))$ von $((A_n))$ und nennen den $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(\mathfrak{R}_n)$ die untere Grenzentfernung $e((A_n))$ von $((A_n))$. Es gilt dann folgender Satz:

Satz 6. Ist $((A_n))$ eine kompakte Mengenfolge eines metrischen Raumes, dann gilt:

$$\bar{e}((A_n)) \leq i(\bar{A}) \leq \max[e((A_n)), \lim_{n \rightarrow +\infty} i(\mathfrak{R}_n)].$$

Beweis. Hat S_n die übliche Bedeutung, ist i_n^* die obere Grenze der inneren Distanzen aller Mengen von $((A_k))$, deren Index $\geq n$ ist und e_n die innere Distanz des Mengensystems $\{A_n, A_{n+1}, \dots\}$, so ist $i(S_n) \leq \max(i_n^*, e_n)$. Ist nun e die untere Grenzentfernung von $((A_n))$, so gibt es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, so daß $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_{n_k} = e$ ist. Ist $\partial > 0$ und $i_n = i(A_n)$, so ist für fast alle natürlichen Zahlen k , $i_{n_k}^* < \partial + \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n$. Es ist daher $i(S_{n_k}) < \max(e + \partial, \partial + \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n)$ für fast alle k . Da $((A_k))$ kompakt ist, konvergiert $((S_n))$ metrisch gegen \bar{A} . Es ist daher $i(\bar{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} i(S_n)$. Demnach ist $i(\bar{A}) \leq \max(e, \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n)$. Andererseits gibt es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $((n_l))$, so daß $\lim_{l \rightarrow +\infty} e_{n_l} = \bar{e}$ ist. Da nun für jedes $\partial > 0$, $i(S_{n_l}) \geq \bar{e} - \partial$ für fast alle l ist und wieder $i(\bar{A}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} i(S_{n_l})$ ist, ist daher $i(\bar{A}) \geq \bar{e}$. Damit ist der Satz bewiesen. Aus dem Satze 6 ergibt sich nun sogleich der folgende Satz:

Satz 7. Ist $((A_n))$ eine kompakte Mengenfolge eines metrischen Raumes und ist $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) = 0$, so ist $e((A_n)) = \bar{e}((A_n))$, und es ist, damit der obere abgeschlossene Limes \bar{A} von $((A_n))$ zusammenhängend ist, notwendig und

hinreichend, daß $e((A_n)) = 0$ ist.

Aus diesem Satze ergibt sich sogleich eine nicht unwesentliche Verschärfung des Satzes von ZORETTI für metrische Punktmengenfolgen. Es gilt nämlich der Zusatz:

Zusatz. Damit der obere abgeschlossene Limes der kompakten Folge fastzusammenhängender Mengen A_n eines metrischen Raumes zusammenhängend ist, ist notwendig und hinreichend, daß die untere Grenzentfernung der Folge Null ist.

Für den unteren abgeschlossenen Limes \underline{A} einer unendlichen Folge $((A_n))$ gilt nur die schwächere, der Beziehung (1) entsprechende Beziehung:

$$(2) \quad \underline{A} \supseteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \right)^0, \quad \text{wobei} \quad D_n = A_n^0 A_{n+1}^0 \cdots A_{n+m}^0 \cdots$$

ist. Im allgemeinen Falle gilt nicht das Gleichheitszeichen, wie man am Beispiele einer konvergenten Punktfolge mit unendlich vielen verschiedenen Punkten sogleich erkennt. Wir wollen daher, um die bisher angewendeten Methoden auch hier anwenden zu können, einen anderen Weg einschlagen.

Ist $((A_n))$ eine Mengenfolge eines metrischen Raumes und $\varrho > 0$, so wollen wir unter dem unteren (oberen) ϱ -Limes von $((A_n))$ die Menge aller und nur der Punkte des Raumes verstehen, zu welchen es eine sphärische Umgebung U_ϱ vom Radius ϱ gibt, so daß $U_\varrho A_n$ für fast alle (unendlich viele) n nicht leer ist. Ist dann $A_{n,\varrho}$ die ϱ -Umgebung von A_n und $D_n^{(\varrho)} = A_{n,\varrho} A_{n+1,\varrho} \cdots$, so gilt für den unteren ϱ -Limes $\underline{A}^{(\varrho)}$ von $((A_n))$ die Beziehung:

$$(3) \quad \underline{A}^{(\varrho)} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(\varrho)}.$$

Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten. Ist \underline{A} der untere abgeschlossene Limes von $((A_n))$, so zeigt man sogleich, daß folgende Beziehung gilt:

$$(4) \quad \underline{A} = \bigcap_{\varrho > 0} \underline{A}^{(\varrho)}.$$

Da nun, wie man leicht sieht, der Durchschnitt D aller $\underline{A}^{(\varrho)}$ gleich dem Durchschnitt der Folge $((\underline{A}^{(\varrho_n)}))$ ist, wobei $((\varrho_n))$ eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwert Null ist, können wir, wie wir nun zeigen wollen, den Satz 4 wiederholt anwenden. Ist nämlich $((A_{n,\varrho}))$ für ein $\varrho > 0$ kompakt, so ist die Folge $((D_n^{(\varrho)}))$, weil $D_n^{(\varrho)} \subseteq A_{n,\varrho}$, ebenfalls kompakt. Da nun $((D_n^{(\varrho)}))$ monoton wachsend ist, ist $\underline{A}^{(\varrho)}$ Teilmenge des oberen abgeschlossenen Limes von $((D_n^{(\varrho)}))$ und dieser ist nach dem eingangs bewiesenen Satze in sich kompakt. Demnach sind fast alle Glieder der Folge $((\underline{A}^{(\varrho_n)}))$ Teilmenge einer in sich kompakten Menge und daher ist diese Folge kompakt. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Satz 8. Ist $((A_n))$ eine Mengenfolge eines metrischen Raumes und ist $((A_{n,\varrho}))$ für ein $\varrho > 0$ kompakt, so existiert stets der iterierte Limes:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} i(A_n, \varrho A_{n+1, \varrho} \cdots A_{n+m, \varrho}) \right] \right\} = L^*$$

und es ist $L^* = i(A)$, auch ist L^* stets endlich. A ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn $L^* = 0$ ist.

Man kann die beiden äußeren Grenzübergänge des letzten Satzes im allgemeinen nicht vertauschen, was man an einfachen Beispielen leicht nachweist.

Wir wollen nun noch ganz kurz für allgemeine mengenwertige Funktionen, bzw. Abbildungen die abgeschlossenen Limiten behandeln.

Definition 4. Ist A eine Punktmenge eines topologischen Raumes R und ist jedem Punkte p von A eine Menge $f(p)$ eines topologischen Raumes W zugeordnet und ist a ein Häufungspunkt von A , dann heißt die Menge der Punkte x aus W , für welche es zu jeder Umgebung V_x in jeder reduzierten Umgebung U'_a von a ein b gibt, so daß $f(b) \cap V_x$ nicht leer ist, der obere abgeschlossene Limes $\bar{f}(a)$ von f in a .

Die Menge der Punkte y aus W , für welche es in jeder Umgebung V_y eine reduzierte Umgebung U'_a von a gibt, so daß für jeden Punkt b aus U'_a die Menge $f(b) \cap V_y$ nicht leer ist, heißt der untere abgeschlossene Limes $\underline{f}(a)$ von $f(a)$.

Aus dieser Definition ergibt sich sogleich, daß $\bar{f}(a) \supseteq \underline{f}(a)$, $\bar{f}(a)$ und $\underline{f}(a)$ für jedes zulässige f und a abgeschlossen sind. Man findet sehr leicht eine der Beziehung (1) analoge Beziehung:

$$(1a) \quad \bar{f}(a) = D \left(\bigcap_{U'_a} S f(b) \right)^a,$$

wobei der Durchschnitt über alle reduzierten Umgebungen U'_a von a zu bilden ist. Gibt es nun eine sich auf den Punkt a zusammenziehende Umgebungsfolge¹⁴⁾, was z. B. der Fall ist, wenn R separabel oder ein metrischer Raum ist, oder ist W separabel, so kann der Durchschnitt in (1a) durch den Durchschnitt abzählbar vieler Mengen ersetzt werden. Für diese Fälle kann man nun die vorhin aufgezeigten Methoden in entsprechender Weise anwenden. Insbesondere wird man eine entsprechende Grenzentfernung für die Funktionswerte für feinere Kriterien heranziehen. Wir wollen uns jedoch mit der Angabe des folgenden Analogons zum Satze von ZORETTI begnügen:

Satz 9. Ist $f(x)$ eine mengenwertige Punktfunktion auf A und ist der Wertraum ein kompakter metrischer Raum, ist ferner $f(x)$ für jedes x aus einer in A reduzierten Umgebung von a fast zusammenhängend und ist $\underline{f}(a)$ nicht leer, so ist $\bar{f}(a)$ zusammenhängend.

Wir wenden uns nun den Komponenten zu. Wir geben hierzu folgende Erklärung:

Definition 5. Ist A eine metrische Menge, dann heißt jede umfassendste Teilmenge B von A , deren innere Distanz $\leq \tau$ ist, eine τ -Quasikomponente¹⁵⁾ von A .

Ist z eine natürliche Zahl oder allgemeiner eine Kardinalzahl ≥ 1 , so heißt die untere Grenze aller Zahlen τ , für welche die nicht leere Menge A aus höchstens z nicht leeren τ -Quasikomponenten besteht, die innere z -Distanz

¹⁴⁾ HAHN, S. 79.

¹⁵⁾ Verwandte Begriffsbildungen finden sich bei ALEXANDROFF-HOFF: Topologie, 1935.

oder kurz die z -Distanz von A . Die z -Distanz der leeren Menge wird für jedes zulässige z Null gesetzt.

Aus dieser Definition folgt sogleich, daß jede τ -Quasikomponente von A für jedes $\tau > 0$ in A offen und für $\tau \geq 0$ abgeschlossen in A ist. Ferner gilt folgender wichtiger Satz:

Satz 3a. Ist $z(A)$ die z -Distanz von A , $z(B)$ diejenige von B und ist A Teilmenge der ϱ -Umgebung B_ϱ von B und B Teilmenge der σ -Umgebung A_σ von A , so ist entweder $|z(A) - z(B)| \leq 2 \max(\varrho, \sigma)$ oder es ist $z(A) = z(B) = +\infty$.

Beweis. Ist $z(A)$ endlich, $\vartheta > 0$ und sind $k'_1, k'_2, \dots, k'_1, \dots$, die höchstens $z, [z(A) + \vartheta]$ -Quasikomponenten von A , $k_1, k_2, \dots, k_1, \dots$, ihre σ -Umgebungen, dann ist B Teilmenge der Vereinigungsmenge aller k_1 . Setzen wir $Bk_1 = B_1$, so ist B die Vereinigungsmenge aller B_1 . Setzen wir $z(A) + 2 \max(\varrho, \sigma) + \vartheta = m$, so zeigen wir, daß jede m -Quasikomponente von B mindestens ein B_1 als Teilmenge enthält. Sind nämlich a und b zwei beliebige Punkte von B_1 , dann gibt es Punkte $a' \in k'_1$ und $b' \in k'_1$, so daß $aa' < \sigma$, $bb' < \sigma$ ist. a' und b' sind für jedes $\vartheta > 0$ durch eine $[z(A) + \vartheta]$ -Kette in k'_1 verbunden. Sind $a' = p_1, p_2, \dots, p_n = b'$ die Punkte dieser Kette, so gibt es für $j = 1, 2, \dots, n$ Punkte p_j in B , so daß $p_1 = a, p_n = b$ und $p_j p'_j \leq \max(\varrho, \sigma)$ ist. Demnach ist nach der Entfernungungleichung $p_j p_{j+1} < m$. Die beliebigen Punkte a und b von B_1 sind daher in B durch eine m -Kette verbunden. B_1 ist daher Teilmenge einer m -Quasikomponente von B . Da es höchstens z verschiedene, nicht leere Teilmengen B_1 gibt, ist daher $z(B) \leq m$. Vertauschen wir in der Beweisführung A und B , so erhalten wir schließlich die Behauptung des Satzes. Aus diesem Satze ergibt sich nun sogleich der zum Satze 4 entsprechende Satz. Aus diesem ergeben sich nun weiter die analogen allgemeineren Sätze zu den Sätzen 5 und 8. Man erhält diese einfach, wenn man in diesen Sätzen generell $i(X)$ durch $z(X)$ ersetzt. Zum Beweise dieser Behauptungen haben wir dann noch folgenden analogen Satz heranzuziehen:

Satz. Ist (A_n) eine monoton wachsende Mengenfolge eines metrischen Raumes, V ihre Vereinigungsmenge und $K(V)$ die Kompaktibilität von V , so besteht die Beziehung:

$$z(V) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} z(A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} z(A_n) \leq \max[z(V), 2K(V)].$$

Zum Beweise dieses Satzes verwendet man im Falle, daß z eine unendliche Kardinalzahl¹⁰⁾ ist, die Ordnungszahlen. Den letzten Teil des Satzes beweist man mit Hilfe des entsprechenden Satzes für $i(V)$ vor dem Satze 5 und dem folgenden, leicht zu beweisenden Überdeckungssatz: Ist $K(A)$ die Kompaktibilität von A , so ist A für jedes $\vartheta > 0$ die Vereinigungsmenge endlich vieler Mengen A_k , so daß $i(A_k) < 2K(A) + \vartheta$ und der Durchmesser $d(A_k) < 4K(A) + \vartheta$ ist.

Aus dem zum Satze 5 analogen, allgemeineren Satze ergibt sich dann noch folgender Satz als Korollar.

¹⁰⁾ Man beachte, daß die κ_0 -Distanz jeder separablen metrischen Menge Null ist.

Satz 10. Damit der obere abgeschlossene Limes \bar{A} der kompakten Mengenfolge $((A_n))$ eines metrischen Raumes endlich viele Komponenten hat, ist notwendig und hinreichend, daß es eine natürliche Zahl z gibt, so daß

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} z(A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+m}) \right] = 0^{17)}$$

ist. \bar{A} hat dann höchstens z -Komponenten. Ist z_0 die kleinste natürliche Zahl dieser Eigenschaft und ist \bar{A} nicht leer, so hat \bar{A} genau z_0 Komponenten.

Für monoton wachsende Folgen gilt der Satz:

Satz 11. Ist $((A_n))$ eine monoton wachsende Mengenfolge in einem topologischen Raume, V ihre Vereinigungsmenge, z eine Kardinalzahl und hat A_n für unendlich viele n höchstens z Komponenten, so hat V höchstens z Komponenten.

Beweis. V wird nicht geändert, wenn wir in $((A_n))$ alle Glieder streichen, welche mehr als z Komponenten haben. Wir können daher beim Beweis voraussetzen, daß jedes A_n höchstens z Komponenten hat. Mit y bezeichnen wir die Mächtigkeit der Menge \mathfrak{R} aller Komponenten von V . \mathfrak{R} wird nun in folgender Weise wohlgeordnet: Wir fassen zunächst alle Komponenten aus \mathfrak{R} ins Auge, welche mit A_1 Punkte gemein haben, und ordnen diese Teilmenge wohl, dann nehmen wir diejenigen Komponenten aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1$, welche mit $A_2 - A_1$ Punkte gemein haben und ordnen diese Menge wohl und fügen sie zur ersten Menge so, daß die Summe wieder wohlgeordnet ist, und fahren auf diese Weise fort, so daß schließlich \mathfrak{R} auf diese Weise wohlgeordnet ist. Ist dann P_α eine Komponente aus \mathfrak{R} und $A_n P_\alpha$ nicht leer, so ist für jede Ordnungszahl $\beta \leq \alpha$ $A_n P_\beta$ nicht leer. Wäre nun $y > z$, so gäbe es eine Ordnungszahl γ , deren Mächtigkeit größer als z ist, so daß eine Komponente P_γ in \mathfrak{R} existiert. Ist dann A_m eine Menge, welche Punkte mit P_γ gemeinsam hat, so ist, worauf vorhin hingewiesen wurde, für jedes $\delta \leq \gamma$, $A_m P_\delta$ nicht leer. Da die Komponenten P_δ abgeschlossen in V sind, sind die Durchschnitte $A_m P_\delta$ abgeschlossen in A_m . Ist x die Mächtigkeit der Ordnungszahl γ , so ist $x > z$ und es gäbe daher mindestens x zu je zweien fremde und relativ zu A_m abgeschlossene Teilmengen von A_m . Dies steht aber im Widerspruch damit, daß A_m höchstens z Komponenten hat.

Für monoton abnehmende Folgen gilt folgender Satz:

Satz 12. Ist $((A_n))$ eine monoton abnehmende und kompakte Folge abgeschlossener Mengen eines normalen topologischen Raumes und gibt es eine natürliche Zahl z , so daß A_n für unendlich viele n höchstens z Komponenten hat, so hat der Durchschnitt D aller Mengen der Folge höchstens z Komponenten¹⁸⁾.

Beweis. Hätte D mehr als z Komponenten, so gäbe es, da D abgeschlossen ist, $z+1$ abgeschlossene, nicht leere und zu je zweien fremde Mengen D_1, D_2, \dots, D_{z+1} , so daß $D = D_1 + D_2 + \dots + D_{z+1}$ ist. Da der Raum normal ist,

¹⁷⁾ Abkürzende Schreibweise für den oberen oder unteren Limes.

¹⁸⁾ Man sieht sogleich, daß der CANTORSche Durchschnittssatz auch für eine kompakte Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen gilt.

gibt es $z + 1$, zu je zwei fremde offene Mengen U_1, U_2, \dots, U_{z+1} , so daß $U_i \supseteq D_i$ ist. Ist $U = U_1 + U_2 + \dots + U_{z+1}$, so ist U eine Umgebung von D und nach dem eingangs bewiesenen Satze ist daher $A_n \subseteq U$ für fast alle n . Es ist daher $A_n = A_n U_1 + A_n U_2 + \dots + A_n U_{z+1}$ für fast alle n . Da $D \subseteq A_n$ für jedes n ist, sind die Mengen $A_n U_i$ für $i = 1, 2, \dots, z + 1$ nicht leer. A_n hätte daher für fast alle n mindestens $z + 1$ Komponenten. Dies steht aber im Widerspruch mit den Voraussetzungen. Damit ist der Satz bewiesen.

Für metrische Mengen erhält man einen schärferen und allgemeineren Satz unmittelbar aus Satz 10¹⁹).

Wir wenden uns nun ganz kurz den offenen Limiten²⁰) zu. Ist $((A_n))$ eine Punktmengenfolge, A^* ihr oberer, A_* ihr unterer offener Limes, dann gilt:

$$(5) \quad A^* \subseteq D S_n, \text{ wobei } S_n = 0_n + 0_{n+1} + \dots + 0_{n+m} + \dots$$

und 0_n der offene Kern von A_n ist, und

$$(6) \quad A_* = S K_n, \text{ wobei } K_n \text{ der offene Kern von } A_n A_{n+1} \dots A_{n+m} \dots$$

ist. Aus der letzten Beziehung ergibt sich nun mit Hilfe des Satzes 11 sogleich der Satz:

Satz 13. Ist $((A_n))$ eine Mengenfolge eines topologischen Raumes, K_n der offene Kern des Durchschnittes $A_n A_{n+1} \dots A_{n+m} \dots$ und gibt es eine Kardinalzahl z , so daß K_n höchstens z Komponenten für unendlich viele n hat, so hat der untere offene Limes von $((A_n))$ höchstens z Komponenten.

Um Kriterien für den oberen offenen Limes zu erhalten, verwenden wir den Begriff des ϱ -Kerns ϱA einer Punktmenge A , worunter wir die Menge aller und nur der Punkte x aus A verstehen, für welche es eine sphärische Umgebung $U_{x,\varrho}$ vom Radius ϱ gibt, so daß $U_{x,\varrho}$ Teilmenge von A ist. Es ist dann, wie man leicht sieht:

$$(7) \quad A^* = S D S_n^{(\varrho)} = S D (S_n^{(\varrho)})^0, \text{ wobei } S_n^{(\varrho)} = \varrho A_n + \varrho A_{n+1} + \dots + \varrho A_{n+m} \dots$$

ist. Ist nun $((A_n))$ kompakt, so ist, wie bereits oft verwendet, auch $((S_n))$ kompakt, und da für jedes $\varrho > 0$, $D^{(\varrho)} = D (S_n^{(\varrho)})$ Teilmenge eines jeden S_n

ist, ist für jede unendliche Folge $((\varrho_n))$ positiver Zahlen $((D^{(\varrho_n)}))$ ebenfalls kompakt. Demnach gilt nach den vorhergehenden Entwicklungen für eine kompakte Folge $((A_n))$ die Beziehung:

$$(8) \quad z(A^*) = \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \{ \lim_{n \rightarrow +\infty} [\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} z(\varrho A_n + \varrho A_{n+1} \dots \varrho A_{n+m})] \}.$$

Aus (8) folgert man nun ziemlich leicht den Satz:

Satz 14. Ist für eine unendliche Folge $((\varrho_i))$ positiver Zahlen, deren Limes Null ist, der ϱ_i -Kern von A_n fastzusammenhängend für fast alle n , ist ferner $((A_n))$ kompakt und der untere offene Limes von $((A_n))$ nicht leer, so ist der obere offene Limes von $((A_n))$ zusammenhängend.

¹⁹) Das CANTORSche Diskontinuum zeigt, daß der Satz in dieser Form für $z = \aleph_0$ nicht mehr gilt.

²⁰) HAUSDORFF, S. 146—147.

Die BORELSchen Limiten können analog und zum Teil auch mit den Sätzen 11 und 12 behandelt werden.

Wir wenden uns nun noch ganz kurz den mehrfach zusammenhängenden Punktmengen zu. Wir geben hierzu folgende Erklärung:

Definition 6²¹⁾. Ist R ein euklidischer Raum, dann heiße die beschränkte Teilmenge A von R k -fach zusammenhängend, wobei k eine Kardinalzahl ist, wenn A zusammenhängend ist und das Komplement von A , $R - A$, genau k Komponenten hat.

Die nicht beschränkte Menge B aus R heiße k -fach zusammenhängend, wenn k die kleinste Kardinalzahl ist, für welche B die Vereinigungsmenge einer monoton wachsenden Folge beschränkter, k -fach zusammenhängender Mengen ist. Die hier gegebene Erklärung des mehrfachen Zusammenhanges hat relativen Charakter.

Da das Komplement des oberen (unteren) abgeschlossenen Limes einer Mengenfolge $((A_n))$ der untere (obere) offene Limes der Folge der Komplemente $((R - A_n))$ ist, lassen sich mit Hilfe der Sätze 10—14 sehr einfache Kriterien für den einfachen bzw. k -fachen Zusammenhang von Grenzmengen herleiten. Insbesondere erhält man auf diese Weise folgenden, nicht unwichtigen Satz:

Satz 15. Ist $((A_n))$ eine monoton abnehmende Folge abgeschlossener und beschränkter Mengen eines euklidischen Raumes und sind unendlich viele A_n höchstens k -fach zusammenhängend, so ist der Durchschnitt aller A_n höchstens k -fach zusammenhängend.

Beweis. Ist D der Durchschnitt der Folge und B_n das Komplement von A_n , so ist B_n offen und hat für unendlich viele n höchstens k Komponenten. $((B_n))$ ist monoton wachsend und ihre Vereinigungsmenge V hat nach Satz 11 höchstens k Komponenten. Nach Satz 12 ist D zusammenhängend, und da V das Komplement von D ist und D beschränkt ist, ist daher D höchstens k -fach zusammenhängend.

Die Aussage des Satzes 15 bleibt richtig, wenn man bloß verlangt, daß $((A_n))$ monoton abnehmend ist, mindestens ein A_n beschränkt ist und wenn der Durchschnitt D zusammenhängend ist.

Ein analoger Satz gilt bei endlichem k für monoton wachsende Folgen offener Mengen für den offenen Limes.

Nun wollen wir noch ganz kurz einen Weg skizzieren, wie man die nicht kompakten Folgen behandeln kann. Man kann zu diesem Zwecke an die Definition 3 anknüpfen und entsprechend λ -kompakte Mengenfolgen betrachten und analog die Kompaktibilität einer Mengenfolge eines metrischen Raumes erklären und mit Hilfe der bereits erklärten q -Limiten Sätze über die abgeschlossenen Limiten usw. gewinnen. Wir können aber auch noch auf andere Weise die nicht kompakten Folgen behandeln. Zu diesem Zwecke verwenden wir folgende Erklärung:

²¹⁾ Die hier gegebene Erklärung weicht von der in der Funktionentheorie für ebene Gebiete üblichen Erklärung ab. Die spezifischen Erfordernisse sind in den verschiedenen Theorien eben manchmal verschieden.

Definition 7. Ist $((V_k))$ eine monoton wachsende Folge offener Mengen, dann heißt die Mengenfolge $((A_n)), ((V_k))$ -halbkompakt, wenn $\bigcap_k S V_k \supseteq \bigcap_n (S A_n)^0$ und für jedes feste k die Folge $((V_k A_n))$ kompakt ist.

Man zeigt nun sehr leicht, daß die Folge $((\bar{A}_k))$ der oberen abgeschlossenen Limiten von $((V_k A_n))$ als abgeschlossenen Limes den oberen abgeschlossenen Limes von $((A))$ hat. Da $((V_k A_n))$ kompakt ist und $((\bar{A}_k))$ monoton wachsend ist, kann man nun die bereits bewiesenen Sätze über kompakte, bzw. monoton wachsende Folgen unmittelbar anwenden. Man erhält auf diese Weise allgemeinere Kriterien mit hinreichenden Bedingungen. Setzen wir $i(V_k A_n) = i_{k,n}$, $\varepsilon((V_k A_n)) = \varepsilon_k$, so erhalten wir nach Satz 6 $i(\bar{A}_k) \leq \max(\varepsilon_k, \lim_{n \rightarrow +\infty} i_{k,n})$, also schließlich $i(\bar{A}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} [\max(\varepsilon_k, \lim_{n \rightarrow +\infty} i_{k,n})]$. Nun kann man durch Zusatzforderungen über die Doppelfolge $((i_{k,n}))$ und über die Grenzentfernung ohne Schwierigkeiten auch für die direkte Anwendung in der Praxis Kriterien erhalten. Die Einzelheiten hierzu bieten keine Schwierigkeiten.

Abschließend berühren wir noch ganz kurz die mehrfachen Mengenfolgen. Wird jedem Komplex (n_1, n_2, \dots, n_k) aus genau k natürlichen Zahlen eine Menge zugeordnet, so nennen wir diese Zuordnung eine mehrfache Mengenfolge, genauer eine k -fache Mengenfolge²³). Die dem Komplex (n_1, n_2, \dots, n_k) zugeordnete Menge bezeichnen wir mit A_{n_1, n_2, \dots, n_k} und nennen sie ein Glied, genauer das Glied mit den Indizes n_1, n_2, \dots, n_k , der Folge. Die BORELSchen Limiten, sowie in Räumen, die abgeschlossen und offenen Limiten usw. werden analog wie für einfache Folgen erklärt. So wird z. B. der obere abgeschlossene Limes \bar{A} als die Menge aller und nur der Punkte x des Raumes erklärt, für welche zu jeder Umgebung U von x und zu jeder natürlichen Zahl n es k natürliche Zahlen $n_1 > n, n_2 > n, \dots, n_k > n$ gibt, so daß $U A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ nicht leer ist. Ist S_n die Vereinigungsmenge aller Glieder der Folge, deren Indizes alle mindestens den Wert n haben, so ist wieder analog wie in (1) $\bar{A} = D S_n^0$. Aus dieser Darstellung ergibt sich, daß der Satz von ZORETTI, bzw. die hier gegebenen Verallgemeinerungen sowie eine Reihe der anderen hier bewiesenen Sätze auch für mehrfache Mengenfolgen in analoger Weise gelten. Die Einzelheiten der hier entwickelten Methoden für mehrfache Reihen bieten keine Schwierigkeiten.

Schließlich kann man auch jeder Folge natürlicher Zahlen $((n_i))$ eine Menge zuordnen, und wir wollen diese Zuordnung kurz eine Hyperfolge nennen. Auch für diese Hyperfolgen bilden wir die entsprechenden Limiten. So verstehen wir z. B. unter dem oberen abgeschlossenen Limes \bar{A} der Hyperfolge $((A_{((n_i))}))$ die Menge aller und nur der Punkte x des Raumes, für welche es zu jeder Umgebung U von x und zu jeder natürlichen Zahl z mindestens eine Folge natürlicher Zahlen $((n_i))$ gibt, so daß jedes Glied n_i dieser Folge mindestens

²³) Es handelt sich hier natürlich nur um eine Primär- oder Ausgangsdefinition. Der allgemeine Begriff der mehrfachen Folge wird hier der Kürze halber nicht gegeben.

den Wert z hat und der Durchschnitt der Menge $A_{((n_i))}$, welche dieser Folge $((n_i))$ zugeordnet ist, mit U nicht leer ist. Wieder finden wir, daß $\bar{A} = D S_n^0$ ist, wobei S_n die Vereinigungsmenge aller und nur der Glieder der Hyperfolge ist, deren Folgen- oder Hyperindex $((n_i))$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, deren Glieder alle mindestens den Wert n haben.

Man sieht hier sogleich wieder, daß das Analogon des Satzes von ZORETTI bzw. die hier gegebenen Verallgemeinerungen desselben in entsprechender Weise auch für Hyperfolgen gelten. Auf Einzelheiten wird hier nicht mehr eingegangen.

Schließlich kann man allgemeiner Zuordnungen betrachten, bei welchen gewissen wohlgeordneten Ordinalzahlmengen Mengen zugeordnet werden. Auf diese Hyperfolgen höherer Art soll jedoch hier nicht mehr näher eingegangen werden.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

HANS RICHTER in Freiburg i. Br.

Teil V. Indirekte Wahrscheinlichkeitstheorie.

§ 19. Die Problemstellung der indirekten Theorie.

Bei der Begründung der direkten Theorie waren wir von den Begriffen Versuchsschema, Ereignis, Sicherheit des Eintretens und physikalische Abgeschlossenheit ausgegangen, mit deren Hilfe eine Erfassung und Beschreibung der Erfahrungswelt geschehen sollte. Diese Begriffe dienten zur Motivierung unserer Axiome; doch wurden nur ihre Verknüpfungen durch diese wiedergegeben. Solange wir nur direkte Theorie treiben, können wir die ursprüngliche Bedeutung der Begriffe vergessen und dabei die $E|H$ als abstrakte Gegenstände ansehen, die durch das Axiomensystem implizit definiert sind. Des erkenntnistheoretischen Inhaltes unserer Termini müssen wir uns aber erinnern, sobald wir den W -Begriff tatsächlich auf die Erfahrungswelt anwenden wollen. Hierzu haben wir in jedem gegebenen Falle als Arbeitshypothese anzusetzen:

- a) Gewisse empirische Situationen gelten als Versuchsschemata im Sinne der Axiomatik.
- b) Für gewisse dieser Versuchsschemata wird physikalische Abgeschlossenheit postuliert.
- c) Jedes der betrachteten $E|H$ erhält einen numerischen Wert für p unter Beachtung der Axiome und der Festsetzungen unter b). Die letzteren erscheinen dabei nur in der schwächeren Gestalt von w -theoretischen Unabhängigkeiten.

Wenn wir uns nur für W .en interessieren, dann besteht die Arbeitshypothese einfach darin, für die vorgegebenen $E|H$ aus der Menge Π aller denkbaren p -Systeme π ein bestimmtes auszuwählen. Die Aufgabe der indirekten W -Theorie ist es, Aussagen über die Richtigkeit dieser Auswahl zu machen. Allein auf Grund der Sätze der W -Rechnung ist es nämlich noch nicht möglich, über diese Richtigkeit zu entscheiden; denn jeder Satz der W -Rechnung liefert nur eine Aussage über W .en, die in jedem π gilt. Insoweit ist das Anwendungsproblem in der W -Theorie von anderer Art als das oft zum Vergleich herangezogene Anwendungsproblem der deterministischen Beschreibungsweisen. Um uns dies klarzulegen, stellen wir uns eine Welt vor, die exakt den Sätzen der klassischen Mechanik einschließlich euklidischer Geometrie folgt. In dieser Welt hat ein Beobachter die Fähigkeit, über die Richtigkeit behaupteter Ungleichheiten zwischen Längen auf Grund der von ihm gelernten Sätze endgültig zu entscheiden. Im Gegensatz hierzu hat selbst ein Beobachter, der sicher wüßte, daß ein bestimmter Münzenwurf beliebig

oft mit festem Wert von p für das Eintreten von „Kopf“ durchführbar ist, keine Möglichkeit, aus den Sätzen der W-Rechnung eine endgültige Entscheidung darüber zu treffen, ob die Behauptung $p \leq 0,5$ richtig ist, solange er auch den Versuch wiederholt; denn das Eintreten eines jeden Ereignisses ist bei jedem Werte der zugehörigen W nicht ausgeschlossen. Um nun doch eine Entscheidung zu treffen, muß der Beobachter weitere Prinzipien heranziehen, die nicht aus der direkten Theorie allein begründbar sind. Solche Entscheidungsprinzipien für die Richtigkeit eines individuellen π sind dann gleichzeitig die Prinzipien für die Auswahl bestimmter π auf Grund der vorliegenden experimentellen Erfahrung. Bei weiteren experimentellen Ergebnissen ist diese Auswahl entsprechend zu ändern. Dabei sei vorläufig noch offengelassen, ob „Auswahl“ als fortgesetzte Untermengenbildung in Π oder als eine Gewichtssetzung auf Π zu verstehen ist.

Bis hierher ist dem in Teil I dieser Arbeit ausgesprochenen Programm folgend noch keine Unterscheidung zwischen dem objektivistischen und dem subjektivistischen Standpunkt notwendig. Für beide Standpunkte gilt ja jede getroffene Auswahl als vorläufig und nur als unserem Wissensstande entsprechend; man sucht nach Prinzipien zur Änderung dieser Auswahl. Verschieden ist allerdings die erkenntniskritische Deutung dieses Prozesses:

Der Objektivist sieht die vorgegebene Auswahl als eine mehr oder weniger gute Approximation an ein unbekanntes richtiges $\hat{\pi}$ an. Er fragt nach den Prinzipien der *Verbesserung* der Approximation. Der Subjektivist dagegen sieht Π als eine Menge von W-Bewertungsmöglichkeiten an, unter denen er rein subjektiv oder multisubjektiv eine Auswahl trifft, ohne nach einer Richtigkeit fragen zu dürfen. Er interessiert sich nur dafür, inwieweit die *Änderung* der Auswahl bei Vorliegen weiterer Versuchsergebnisse allgemein verbindlich zu erfolgen hat. Gemeinsam ist beiden Standpunkten jedoch der Glaube an einen Erfolg in dem Sinne, daß man durch Anwendung der Änderungsvorschrift mit immer größerer Sicherheit Voraussagen machen kann.

Für den Aufbau der indirekten W-Theorie wäre eine Entscheidung zwischen den beiden erkenntniskritischen Standpunkten offenbar nur dann erforderlich, wenn in ihnen verschiedene Änderungsvorschriften anzuwenden sind. Wir wollen daher jetzt zunächst das Änderungsprinzip betrachten, das der Objektivist anwendet, um es dann mit dem subjektivistischen Verfahren zu vergleichen.

§ 20. Glaubwürdigkeitsgrad und Chance.

a) Änderungsprinzipien der objektivistischen Auffassung.

Wir stellen uns zunächst auf den objektivistischen Standpunkt, daß in der Natur festliegt, welche numerischen Werte $\hat{p}(E|H)$ für die W .en der $E|H$ als das richtige Maß für die Sicherheit ihres Eintretens gelten. Es gibt also ein absolutes p -System $\hat{\pi}$, das wir zwar nicht kennen, nach dessen Vorschrift sich aber das indeterministische Naturgeschehen abspielt. Unsere Aufgabe ist es, auf $\hat{\pi}$ aus den Beobachtungen zu schließen, um mit Hilfe von $\hat{\pi}$ das Beobachtungsmaterial zu erklären und für künftige Ereignisse Voraussagen machen zu können. Eine solche Voraussage ist dabei nie von völliger Gewißheit

wie etwa die Voraussagen in einer idealen Welt der klassischen Mechanik; sondern die Voraussage auf das Eintreten eines $E|H$ gilt eben nur mit der Sicherheit, die durch $\hat{p}(E|H)$ angegeben ist. Sie wird entsprechend als um so sicherer betrachtet, als $\hat{p}(E|H)$ der Zahl 1, dem W-Werte für die logische Gewißheit, nahekommmt. Es ist daher nur eine andere Beschreibung dessen, was wir unter W verstehen, wenn wir die Vorschrift für die Voraussage als COURNOTSches Prinzip folgendermaßen formulieren.

Absolutes COURNOTSches Prinzip (a. C. Pr.): Liegt für ein $E|H$ die absolute Wahrscheinlichkeit $\hat{p}(E|H)$ genügend nahe bei 1, $p(E|H) \geq 1 - \varepsilon$, so sollen wir so tun, als ob $E|H$ sicher eintreten wird. Das Eintreten von $E|H$ heißt dann empirisch sicher.

Das a.C.Pr. wäre die Vorschrift des praktischen Handelns bei Kenntnis des absoluten Systems $\hat{\pi}$. Nun ist dieses aber gar nicht bekannt, sondern stattdessen besitzen wir nur eine Approximation. An die Stelle des a.C.Pr. tritt dann das folgende Prinzip.

Praktisches COURNOTSches Prinzip (pr.C.Pr.): Nehmen wir auf Grund von theoretischen Überlegungen und von Erfahrungen an, daß $\hat{p}(E|H) \geq 1 - \varepsilon$ ist, so sollen wir so tun, als ob $E|H$ sicher eintreten wird. Das Eintreten von $E|H$ heißt dann praktisch sicher.

Jede Handlung des täglichen Lebens geschieht auf Grund der laufenden Anwendung dieses Prinzips. Es ist auch für den Subjektivisten gültig, wenn unter $\hat{p}(E|H)$ eine subjektivistische W-Belegung verstanden wird.

Von dem praktischen Handeln gemäß dem pr.C.Pr. unterscheiden wir nun ein theoretisches Handeln, worunter wir die Auffindung der Approximationen an das unbekannte absolute $\hat{\pi}$ verstehen wollen. Die Anweisung des pr.C.Pr. nimmt dann zwar Bezug auf das gerade erhaltene Ergebnis des theoretischen Handelns, greift aber in das letztere nicht ein; es bedeutet im Gegenteil einen vorläufigen Verzicht auf Fortsetzung desselben.

Jede Anweisung zur Voraussage kann aber durch gedankliche zeitliche Rückverlegung des Betrachtungspunktes zur Grundlage einer Erklärung des Vergangenen gemacht werden. Es ist daher zu erwarten, daß eine geeignete, auf bereits eingetretene Ereignisse bezügliche Umkehrung des C.Pr. einen Hinweis darauf gibt, in welcher Weise die unbekannten $\hat{p}(E|H)$ approximativ zu finden sind. Die nächstliegende Invertierung¹⁾ des a.C.Pr. lautet in unserer Terminologie folgendermaßen: Ist ein Ereignis $E|H$ eingetreten, so sind diejenigen π zu verwerfen, in denen $E|H$ eine erdrückend kleine W. besäße. Diese Umkehrung ist aber sicher nicht einwandfrei, wie das folgende Beispiel lehrt.

Eine Münze habe in n aufeinanderfolgenden Würfeln die richtigen W.en $\hat{p}_r(K) = \theta_r \approx \frac{1}{2}$ für das Werfen von Kopf. Man möge die Ergebnisfolge $KWWKW \dots$ erhalten haben, für welche $\hat{p} \approx \frac{1}{2^n}$ ist. Würden wir nun die genannte Umkehrung des C.Pr. anwenden, so müßten wir gerade das richtige $\hat{\pi}$

¹⁾ Zum Beispiel bei M. G. KENDALL: "The advanced theory of statistics, Teil I (1948). S. 180.

verwerfen zugunsten der folgenden falschen Annahme $\hat{\pi}$: $p_1(K) \approx 1$, $p_2(K) \approx 0$, $p_3(K) \approx 0$, usw. in Übereinstimmung mit der erhaltenen Ergebnisfolge.

In der Tat folgt die genannte Umkehrung gar nicht aus dem C.Pr., wenn wir uns zum Versuch einer Erklärung des Geschehenen auf den Standpunkt vor Eintritt des $E|H$ zurückversetzen. Haben wir nämlich ein W-System π , über dessen Richtigkeit wir entscheiden sollen, so müssen wir nach dem a.C.Pr. zunächst ein $E|H$ konstruieren, das gemäß π empirisch sicher eintreten wird. Tritt $E|H$ nicht ein, so ist π zu verwerfen. Hieraus ergibt sich die folgende Invertierung des a.C.Pr.:

Vorgegeben sei das Experiment H , als unbekannt gilt das Beobachtungsergebnis $x|H$. Zu jedem π aus Π wird ein Ereignis $E(\pi)$ von H so gewählt, daß $p_\pi(E(\pi)) \geq 1 - \varepsilon$ ist. Es sind dann alle π zu verwerfen, für die das beobachtete x nicht in $E(\pi)$ liegt. Jedes x soll dabei in wenigstens einem $E(\pi)$ liegen.

Der letzte Zusatz ist nötig, damit es nicht vorkommen kann, daß bei einem x jedes π aus Π verworfen wird. Damit sind wir zwangsläufig auf den bekannten Konfidenzschluß (KS) geführt worden. Charakteristisch für den KS ist, daß er aus der Menge Π je nach dem erhaltenen x eine bestimmte Untermenge $\Pi'(x) = \{\pi \text{ mit } x \in E(\pi)\}$ auswählt und dann behauptet, daß das wahre $\hat{\pi}$ in $\Pi'(x)$ liegt. Für eine iterierbare Verbesserungsvorschrift wäre eine solche endgültige Auswahl nicht statthaft: In $\Pi - \Pi'(x)$ liegen ja Systeme, für die x mit einer $W. > 0$ realisierbar ist, und es ist daher nicht ausgeschlossen, daß $\hat{\pi}$ doch zu $\Pi - \Pi'(x)$ gehört. Dies zeigt, daß der KS nicht iteriert anwendbar ist. Er ist jeweils ein einmalig gedachtes Verfahren, um über $\hat{\pi}$ eine vorläufige Aussage zu machen. Diese Aussage wird annulliert und der KS neu aufgestellt, sobald weitere experimentelle Ergebnisse vorliegen. Damit erhält auch der KS den Charakter eines jeweiligen Abschlusses des theoretischen Handelns.

Unsere Aufgabe, ein laufendes Verbesserungsverfahren zu finden, ist daher durch den KS nicht gelöst; im Gegenteil tritt das zusätzliche Problem auf, die Beziehungen zwischen dem fraglichen Verbesserungsverfahren und dem KS als einmaliger Abschlußmethode zu klären. Hier kommen wir nun durch eine tiefere Analyse des KS weiter.

Da wir von der Menge Π aller π ausgegangen waren, ist es gleichgültig, ob wir die Behauptung des KS mit den Worten „ $\hat{\pi}$ liegt in $\Pi'(x)$ “ oder „ $\hat{\pi}$ liegt nicht in $\Pi - \Pi'(x)$ “ formulieren. Ein Irrtum bei Anwendung des KS findet jedenfalls nur bei Eintreten von $\bar{E}(\hat{\pi})$ statt mit der objektiven $W. \hat{p}(\bar{E}(\hat{\pi})) \leq \varepsilon$. Wir dürfen also ganz korrekt von der Irrtumswahrscheinlichkeit (IW) als einer $W.$ im wahren System $\hat{\pi}$ sprechen und sind ohne Kenntnis desselben sicher, daß die $IW \leq \varepsilon$ ist. W-theoretisch ist damit alles in Ordnung unter Wahrung des objektivistischen Standpunktes. In Schwierigkeiten kommen wir aber, sobald wir den KS anwenden wollen. Dies wollen wir uns an einem typischen Beispiel klarlegen.

Ein Experiment H mit den Ergebnismöglichkeiten $x = 0$ oder 1 werde n -mal wiederholt. Aus dem Ergebnis der n Wiederholungen wollen wir eine W-Aussage über das Ergebnis anschließend geplanter m Wiederholungen

machen. Hierzu sei für die n Wiederholungen ein KS aufgebaut mit der Schranke $\varepsilon > 0$. Tritt nun das Ergebnis $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_v = 0$ oder 1 ein, so liegen bei jeder Wahl der $E(\pi)$ jedenfalls alle π^* in $\Pi'(x)$, für die gilt: $p_{\pi^*}(x_v) = 1$ und $p_{\pi^*}(\bar{x}_v) = 0$ für $1 \leq v \leq n$ und $p_{\pi^*}(x_\mu)$ beliebig für $\mu > n$. Da wir nach dem KS nur behaupten können, daß $\hat{\pi}$ in $\Pi'(x)$ liegt, können wir also für weitere Wiederholungen gar nichts aussagen. Der übliche Weg zur Vermeidung dieser Schwierigkeit ist der a priori-Ausschluß solcher π^* ; z. B. dadurch, daß nur Systeme π zugelassen werden, für die die W en von H genügend genau konstant sind. Untersuchen wir diesen Ausweg.

An die Stelle von $\Pi'(x)$ tritt jetzt $\Pi'(x) \cap \Pi_1$, wo $\Pi_1 \subset \Pi$ die Menge der zugelassenen π bedeutet. Es bieten sich nun die beiden folgenden Konfidenzbehauptungen zur Wahl an:

$A \equiv \text{„}\hat{\pi} \text{ liegt in } \Pi'(x) \cap \Pi_1\text{“}$ oder $B \equiv \text{„}\hat{\pi} \text{ liegt nicht in } \Pi_1 - \Pi'(x) \cap \Pi_1\text{“}$. Aus B folgt nun sofort „ $\hat{\pi}$ liegt in $(\Pi - \Pi_1) + \Pi'(x) \cap \Pi_1$ “ und hieraus durch Multiplikation mit $\Pi'(x) + (\Pi - \Pi'(x))$: „ $\hat{\pi}$ liegt in $\Pi'(x) + (\Pi - \Pi'(x)) \cap (\Pi - \Pi_1)$ “. Das ist jedenfalls nicht stärker als „ $\hat{\pi}$ liegt in $\Pi'(x)$ “; B gestattet also erst recht keine Voraussagen. Bei geeigneter Wahl von Π_1 ist daher nur A für die Anwendungen brauchbar. Wie groß ist nun die IW für A ? Falls das wahre $\hat{\pi}$ in Π_1 liegt, so ist die IW $\leq \varepsilon$ nach Konstruktion; liegt aber $\hat{\pi}$ nicht in Π_1 , so ist A stets falsch, die IW ist 1. Solange wir streng im Rahmen der objektivistischen Annahme von der Existenz eines unbekannten wahren $\hat{\pi}$ bleiben, können wir daher nicht mehr eine nichttriviale Schranke für die IW angeben. Es verbietet sich auch, den Satz „unter der Voraussetzung $\hat{\pi} \in \Pi_1$ ist die IW $\leq \varepsilon$ “ als Aussage über eine bedingte W aufzufassen; denn die Richtigkeit von $\hat{\pi} \in \Pi_1$ ist in strenger objektivistischer Auffassung überhaupt keine W -Frage, sondern objektiv feststehend. Wir müssen daher zusammenfassend feststellen:

Praktisch interessant ist nur die Gestalt A der Konfidenzbehauptung. A ist aber im streng objektivistischen Rahmen w-theoretisch nicht begründbar.

In der Tat kümmern wir uns in den Anwendungen gar nicht darum, daß hier der objektivistische Standpunkt auf ein unauflösbares Dilemma führt. Wir rechtfertigen nämlich die Form A des KS einfach damit, daß wir die Voraussetzung $\hat{\pi} \in \Pi_1$ für genügend „glaubwürdig“ halten. Wie wir soeben sahen, können wir als Objektivist diese „Glaubwürdigkeit“ nicht als objektive W deuten. Damit kommt in den KS ein subjektives Element hinein, nämlich eine Bewertung von Π_1 gegen $\Pi - \Pi_1$ auf Grund unserer früheren Erfahrungen. Den Schluß A rechtfertigen wir dann mit der Auffassung, daß von der Glaubwürdigkeit des Π_1 roh gesprochen der Anteil $1 - \varepsilon$ auf $\Pi'(x) \cap \Pi_1$ übertragen wird. Diese Auffassung ist allerdings durch die vorangehenden objektivistischen W -Überlegungen noch nicht begründet. Sie würde die Vermutung eines Satzes sein, der über die Gestalt A des KS in einer Theorie aussprechbar ist, die außer von der Menge Π und von $\hat{\pi}$ noch von Glaubwürdigkeiten der $\Pi_1 \subset \Pi$ handelt. Unser Versuch, im Rahmen der objektivistischen Theorie ein praktisch anwendbares Schlußverfahren zu finden, hat damit zu der Erkenntnis geführt, daß in die indirekte Theorie

noch ein subjektives Element, die Glaubwürdigkeit, eingebaut werden muß, die als neuer Begriff anzusehen ist. Der Grund hierfür liegt letztlich darin, daß in einer indeterministisch ablaufenden Welt keine nichttriviale Aussage über dieselbe im strengen Sinne verifizierbar ist.

Was können wir nun über ein laufendes Verbesserungsverfahren aussagen, wenn es ein solches neben dem KS gibt?

a) Wegen des Mangels an strenger Verifizierbarkeit darf kein π endgültig ausgeschlossen werden, in welchem das eingetretene Ereignis eine positive W besitzt. Es findet also für alle π aus Π eine Gewichtung statt, die von dem eingetretenen Ereignis abhängt.

b) Die Gewichte sind weder als objektive W .en aus dem richtigen $\hat{\pi}$, noch als W .en aus einem falschen p -System deutbar. Es handelt sich um einen neuen Begriff, für den wir den Namen „Glaubwürdigkeitsgrad“ (G-Grad) $\varphi(\pi)$ eines π aus Π einführen.

Eine weitere Aussage erhalten wir, wenn wir etwa an das S. 4 genannte Beispiel des Münzenwerfens denken: Bei Eintreten der Wurffolge $x = KWWKW \dots$ bleibt doch das dort genannte $\tilde{\pi}$ mit $p_{\tilde{\pi}}(x) \approx 1$ weiterhin sehr unglaublich, weil sein G-Grad vor dem Werfen ganz extrem klein, wenn natürlich auch nicht Null, war. Dies weist uns auf die folgende Eigenschaft hin.

c) Die nach Realisierung eines Experimentes H zu erteilenden G-Grade $\varphi^*(\pi)$ hängen auch von den $\varphi(\pi)$ ab, die vor der Realisierung von H erteilt waren. Ist ein $\varphi(\pi_1)$ genügend klein im Vergleich zu den übrigen $\varphi(\pi)$ angenommen, so wird $\varphi^*(\pi_1)$ beliebig klein relativ zu den übrigen $\varphi^*(\pi)$.

Endlich kommt noch die Bedeutung der W als eines Maßes für das Eintreten eines E zum Ausdruck durch die COURNOTSche Forderung

d) Ist ein E eingetreten, so gilt für Systeme π_1, π_2, \dots mit Ausgangs-G-Graden in der gleichen Größenordnung: $\varphi^*(\pi_r)$ ist beliebig klein, wenn $p_{\pi_r}(E)$ genügend klein ist im Vergleich zu den übrigen $p_{\pi}(E)$.

Damit haben wir eine qualitative Beschreibung der Erweiterung gefunden, die die direkte W -Rechnung in der indirekten W -Theorie erfährt. Um weiterzukommen, müssen wir die G-Grade mathematisieren: Die $\varphi(\pi)$ werden durch Zahlen ausgedrückt; die Änderungsvorschrift wird durch eine Formel F geliefert, die für jedes $\pi_1 \in \Pi$ den neuen G-Grad $\varphi^*(\pi_1)$ bestimmt als Funktion aller alten G-Grade $\varphi(\pi)$ und aller $p_{\pi}(E)$ für das eingetretene Ereignis E . Bevor man eine solche allgemeine Theorie aufbaut, wird man sich die folgenden Fragen vorlegen:

α) Ist die Voraussetzung scharf präzisierte $\varphi(\pi)$ sinnvoll?

β) Nach welchen Prinzipien sind die $\varphi(\pi)$ zu bestimmen, aus denen die $\varphi^*(\pi)$ berechnet werden?

γ) Was soll die Theorie der G-Grade leisten?

Zu α) bemerken wir, daß ein F für scharfe G-Grade automatisch auch Auskunft für den Fall unscharf gesetzter φ liefert. Dies ist wesentlich, weil wir zu β) zugeben müssen, daß sich die Festlegung der Ausgangs-G-Grade

nicht mathematisieren läßt. Es kann sein, daß vorliegende G-Grade φ_0 mit Hilfe von F aus älteren φ_{-1} hervorgegangen sind, für die sich dann aber die gleiche Frage nach ihrer Herkunft ergibt. Die φ_{-1} können nun aus G-Graden φ_{-2} durch Verwertung der experimentellen Ergebnisse anderer Beobachter entstanden sein. Diese geglaubten Ergebnisse wären aber bereits nicht allgemein gemäß F zu verrechnen, sondern zusammen mit der Erfahrung, die mit dem Vertrauen an derartige Ergebnisübernahmen gemacht wurde. Doch auch Täuschungen, Analogieschlüsse usw. drücken sich in der Aufstellung der φ_0 aus, so daß ein Vorgang entsteht, der etwa folgendermaßen schematisiert werden könnte: Die Aufstellung der G-Grade geschieht intuitiv durch überschlägige Anwendung von F zur Änderung einer Gleichgewichtung, die einem mehr oder weniger gut vorstellbaren Zustande völligen Nichtwissens entspräche, unter Verwendung unserer gesamten, gerade im Bewußtsein befindlichen Erfahrung anstelle eines Versuchsergebnisses. Damit ist aber die Möglichkeit abgelehnt, die Setzung der φ_0 zu mathematisieren. Die indirekte Theorie als mathematische Theorie der G-Grade ist so in völliger Analogie zur direkten Theorie:

In der direkten Theorie wird nicht der inhaltliche W-Begriff, sondern seine Verknüpfung axiomatisiert; in der indirekten Theorie wird entsprechend nicht der Begriff der Glaubwürdigkeit, sondern die auf ihn anzuwendende Änderungsvorschrift axiomatisch präzisiert.

Zu (γ) kann man sich auf den Standpunkt stellen, daß unsere bereits erreichte qualitative Beschreibung der Änderung der G-Grade ausreicht, weil unser naturwissenschaftlicher common sense den gesuchten Verbesserungsprozeß von allein richtig durchführt. Die Theorie der G-Grade als Mathematisierung des Funktionierens dieses common sense soll prüfen, inwieweit wir wenigstens in der Naturwissenschaft von einem common sense bei der W-Bestimmung sprechen können. Wir werden sehen, daß diese Theorie den Gültigkeitsanspruch der oben diskutierten Gestalt K des KS erklären kann; sie wird auch für den bisher w-theoretisch unbegründeten R. A. FISHERschen Fiduzialschluß einen Gültigkeitsbereich angeben können.

In welchem Sinne ist nunmehr das pr.C.Pr. anzuwenden? Bei Anwendung unseres Änderungsverfahrens gilt ja nicht eine bestimmte Untermenge der denkbaren π als Approximation des richtigen $\hat{\pi}$, sondern für jedes π gibt sein G-Grad $\varphi(\pi)$ den Grad von Approximation an, den es nach den vorliegenden Erfahrungen besitzt. Damit ist die im pr.C.Pr. zitierte „Annahme, daß $\hat{p}(E|H) \geq 1 - \varepsilon$ ist“, folgendermaßen zu präzisieren:

Unter Verwendung der gerade erreichten Bewertung $\varphi(\pi)$ bilden wir einen Mittelwert über alle $p_\pi(E|H)$ als jeweils gültigen Schätzwert für $\hat{p}(E|H)$ bei der Anwendung des pr.C.Pr.

Dieser Schätzwert ist keine Wahrscheinlichkeit, obwohl auch er im üblichen Sprachgebrauch so genannt wird. Wir geben ihm den neuen Namen „Chance“ für $E|H$ bei Vorliegen der Bewertung $\varphi(\pi)$. Immer dann, wenn wir im täglichen Leben von „Wahrscheinlichkeiten“ zu prognostischen Zwecken sprechen, handelt es sich eigentlich um Chancen in unserem Sinne. Die Art der zur Chance führenden Mittelwertbildung lassen wir zunächst offen.

b) Das Änderungsprinzip der subjektivistischen Theorie.

Das Änderungsprinzip der subjektivistischen Theorie lautet nach JEFFREYS²⁾:

$$P(q \mid r \parallel w) = P(q \parallel w) \cdot P(r \mid q \parallel w).$$

Dabei bedeuten bei Beschränkung auf einen einfachen Fall: w unseren Wissensstand, q und r zwei unabhängige Ereignisse, qw unseren Wissensstand nach dem Eintreten von q . $P(a \parallel b)$ ist allgemein die subjektivistische Wahrscheinlichkeit für das künftige Eintreten des Ereignisses a bei Vorliegen der Kenntnis b .

Sei nun q das Ergebnis bei 100 maligem Werfen einer Münze, r das Ergebnis bei weiterem 100 maligem Werfen. Wäre nun etwa das subjektivistische P zu deuten als W aus einem π in unserem Sinne, so müßte bei Unterstellung der Gültigkeit der physikalischen Abgeschlossenheit gelten:

$$(*) \quad P(qr \parallel w) = P(q \parallel w) \cdot P(r \parallel w),$$

und hieraus folgend

$$P(r \parallel w) = P(r \parallel qw);$$

d. h. die Beobachtung von q hätte unsere subjektive W -Bewertung zukünftiger Ereignisse nicht verändert. Im vorliegenden Falle wird auch der Subjektivist die physikalische Abgeschlossenheit akzeptieren; (*) darf aber nicht gelten. Hieraus folgt: Wegen der Gültigkeit des Additions- und des Multiplikationssatzes bilden zwar die subjektivistischen W -en formal ein π ; aber aus physikalischer Abgeschlossenheit kann nicht mehr auf w -theoretische Unabhängigkeit geschlossen werden.

Wir werden später sehen, daß auch die vom objektivistischen Standpunkt aus eingeführten Chancen diese Eigentümlichkeit haben. Da weiter nach objektivistischer Auffassung die Chance der subjektiv gefärbte Schätzwert der unbekannten wahren W ist, liegt es daher nahe, überhaupt die W -en der Subjektivist mit den Chancen der Objektivist zu identifizieren. Alle Überlegungen über das Änderungsprinzip für die G -Grade und über die Bildungsregel für die Chance würden damit gleichzeitig eine neue Begründung des subjektivistischen Änderungsprinzips liefern, das in der subjektivistischen Theorie selbst durch eine Analogiebetrachtung eingeführt wird. Die vorgeschlagene Identifizierung würde verlangen, daß umgekehrt der Subjektivist seine W als Mittelbildung mit G -Graden als Gewichten über der Menge aller Systeme ansieht, die möglicherweise in Zukunft multisubjektiv objektiviert werden. Als Unterschied zwischen subjektivistischem und objektivistischem Standpunkt bleibt so schließlich nur, daß der Objektivist an die Existenz eines absoluten $\hat{\pi}$ glaubt, das auch ohne Bezugnahme auf uns für alle Zeiten objektiv gültig ist, während der Subjektivist das Postulat eines solchen $\hat{\pi}$ nur im Sinne einer Objektivierbarkeit für uns und deshalb nur solange aufrechterhält, als wir den W -Begriff zur Ordnung der Natur verwenden. Dieser Unterschied zwischen den beiden Standpunkten liegt aber außerhalb

²⁾ H. JEFFREYS: *Theory of probability*. Oxford 1948, S. 25.

der Naturwissenschaft. Die vorgeschlagene Identifizierung der subjektivistischen W mit der Chance führt so zur Vereinigung der beiden gegensätzlichen Auffassungen.

§ 21. Die mathematische Problemstellung.

Es sei wieder Π die Menge aller W -Systeme π . Π_1 sei eine Untermenge von Π . In objektivistischer Sprechweise soll dann die reelle Zahl $\varphi(\Pi_1)$ den G-Grad dafür bedeuten, daß das unbekannte, wahre $\hat{\pi}$ in Π_1 liegt. Unabhängig vom Standpunkt sei $\varphi(\Pi_1)$ das Maß dafür, wie stark wir uns bei unserem Handeln auf die π aus Π_1 stützen sollen.

$\varphi(0)$ setzen wir gleich Null. Wir werden dann entsprechend der Bedeutung der G-Grade fordern, daß bei zwei fremden Untermengen Π_1 und Π_2 sich $\varphi(\Pi_1 + \Pi_2)$ aus den Einzel-G-Graden durch eine stetige Funktion Φ berechnen läßt:

$$\varphi(\Pi_1 + \Pi_2) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2) \text{ bei } \varphi_r = \varphi(\Pi_r)$$

mit der Monotonieeigenschaft

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) > \varphi_1 \text{ bei } \varphi_2 > \varphi(0) = 0.$$

Dann ist $\varphi(\Pi_1) \geq 0$ für jedes Π_1 . Da wir im übrigen bezüglich der φ -Werte völlig freie Hand haben, ist Φ überall in $0 \leq \varphi_r < \infty$ definiert und monoton wachsend in jeder Variablen. Wegen der Korrespondenz zu den Mengenoperationen in Π ist Φ symmetrisch, assoziativ, und es gilt $\Phi(\varphi, 0) = \varphi$. Bis auf eine monotone, stetige Transformation ist also Φ die Addition.

φ sei nun gleich als additive Mengenfunktion auf Π betrachtet. Bei Eintreten eines Ereignisses $E|H$ soll φ durch die Änderungsvorschrift in ein φ^* übergeführt werden. φ^* hängt dabei außer von φ noch von der w-theoretischen Beschaffenheit des $E|H$ ab. Dagegen soll φ^* nicht durch die physikalische Bedeutung des $E|H$ beeinflusst werden, die ihren Ausdruck ja bereits in φ gefunden hat. Man könnte nun versuchen, φ^* von allen W .en $p(\pi; x_r|H)$ abhängig anzusetzen, die den atomaren Ergebnissen x_r von H in allen π aus Π zugeschrieben werden. Dies geht aber aus folgendem Grunde nicht: Jedes H können wir als Vergrößerung eines Versuches auffassen, der aus H und einem beliebigen zeitlich darauf folgenden H' mit Atomen x'_μ besteht. Es müßten dann auch alle $p(\pi; x_r, x'_\mu|H, H')$ ins Spiel kommen; und zwar für alle überhaupt denkbaren H' . Soll φ^* unabhängig von solchen willkürlich wählbaren H' sein, so dürfen wir überhaupt nur die $p(\pi; E|H)$ als W -Argumente in φ^* zulassen. Dabei ist $E|H$ als festgewählt anzusehen, so daß $p(\pi; E|H)$ eine zu $E|H$ gehörige Punktfunktion $l(\pi)$ auf Π ist. Dies sei festgehalten in

Definition 12: Bei festem $E|H$ heißt die Wahrscheinlichkeit von $E|H$ in Abhängigkeit von π die Likelihood $l(\pi)$ von $E|H$. $l(\pi)$ ist eine Punktfunktion auf Π . Soll E besonders angegeben werden, so schreiben wir $l_E(\pi)$ ³⁾.

³⁾ In der direkten Theorie dagegen wird in $p(\pi; E|H)$ das π festgehalten, und man erhält die W .en $p_\pi(E)$ aller $E|H$ im System π .

Wir sehen, daß wir die Änderungsvorschrift als eine Funktion

$$\varphi^* = F(\varphi, l)$$

ansetzen müssen, die Paaren aus G-Bewertung φ und Likelihood l auf Π eine neue G-Bewertung φ^* zuordnet. Um für F zu einer Formel zu gelangen, wird man annehmen müssen, daß φ totaladditiv ist, und daß φ -meßbare Mengen auch φ^* -meßbar sind. Weiter soll l ebenfalls φ -meßbar sein. Die letzte Forderung ist eine sehr unübersehbare Einschränkung für φ , da die Menge der über Π möglichen l unbekannt ist. Auf der anderen Seite ist auch der Begriff der Menge Π aller möglichen W.-Systeme zu unbestimmt, um eine mathematische Theorie darauf aufzubauen.

Diese Schwierigkeiten vermeiden wir dadurch, daß wir uns von vornherein in Übereinstimmung mit den Anwendungen auf die Betrachtung endlich oder höchstens abzählbar unendlich vieler Versuchsschemata H_ν beschränken. Dabei sei zunächst noch zusätzlich angenommen, daß die H_ν in einer vorgegebenen zeitlichen Aufeinanderfolge H_1, H_2, \dots realisiert werden sollen. Wir sprechen dann von einer *Versuchskette*⁴⁾. Die H_ν können dabei teilweise identisch sein; so denken wir beim Münzenwurf an die n -fachen Wiederholungen eines einzigen H für alle natürlichen $n \geq 1$. Wir interessieren uns jetzt nur für die Aussagen, die von den Systemen π für eine gegebene Versuchskette K gemacht werden. Hat nun H_ν die Atome $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \dots$, so ist π bezüglich K festgelegt durch die Angabe aller W.en $p_\pi(x_\mu^{(1)})$ und aller bedingten W.en $p_\pi(x_\mu^{(\nu)}; x_{\mu_1}^{(1)}, \dots, x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)})$ für das Eintreten von $x_\mu^{(\nu)}$ nach Realisierung von $H_1, \dots, H_{\nu-1}$ mit dem Ergebnis $x_{\mu_1}^{(1)}, \dots, x_{\mu_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$. Das sind endlich oder höchstens abzählbar unendlich viele Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots$, mit $0 \leq \theta_\nu \leq 1$, die abzählbar vielen Summenbedingungen unterliegen. Ein derartiger Vektor $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ ist dann Repräsentant der Klasse aller π , die in bezug auf die vorgegebene Kette übereinstimmende W.-Aussagen machen. Eine solche Klasse nennen wir eine *einfache statistische Hypothese* über $K = H_1, H_2, \dots$ und bezeichnen sie mit $m(K)$. Die Menge aller einfachen Hypothesen über K heißt die *zu K gehörige Hypothesenmenge* und wird mit $\mathfrak{M}(K) = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ bezeichnet. Eine beliebige Untermenge \mathfrak{N} von \mathfrak{M} nennen wir entsprechend eine *zusammengesetzte Hypothese*, wenn \mathfrak{N} mehr als ein m enthält.

Bei vorgegebener Versuchskette K können wir nun das zugehörige \mathfrak{M} anstelle von Π benutzen. Die totaladditive Mengenfunktion φ wird auf \mathfrak{M} übertragen. Die Likelihood zu irgendeinem Ereignis E aus einem beliebigen endlichen Abschnitt H_1, \dots, H_m von K definiert dann eine Punktfunktion, die Likelihood $l_E(m)$ auf \mathfrak{M} . Da jedes m aus \mathfrak{M} durch einen Vektor $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ festgelegt ist, haben wir eine spezielle Darstellung von \mathfrak{M} durch höchstens abzählbar viele kontinuierlich variable Parameter θ_ν . Diese Parameter nennen wir *Likelihood-Parameter*, weil jede Likelihood auf \mathfrak{M} eine ganzrationale Funktion aus endlich vielen dieser θ_ν ist. Wir können nun unbedenklich die

⁴⁾ Eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes auf den in der Theorie der Entscheidungsfunktionen betrachteten Fall von Ketten mit Verzweigung nach Wahrscheinlichkeit ist später leicht möglich. Vgl. hierzu auch § 25.

Forderung formulieren, daß φ so gewählt sein soll, daß alle l φ -meßbar sind; Beispiele solcher φ lassen sich ja leicht bilden⁵⁾. Unter den φ -meßbaren Mengen aus \mathfrak{M} interessieren uns nur diejenigen, die durch σ - und δ -Prozesse aus den Zylindermengen $0 \leq l(m) \leq a$ für alle $l(m)$ und $0 \leq a \leq 1$ erzeugt werden. Wir werden daher von vornherein φ nur auf dem so erzeugten Mengenring als definiert ansehen.

Die Voraussetzung $\varphi(\mathfrak{M}) < \infty$ wollen wir nicht einführen, um praktisch wichtige Fälle nicht auszuschneiden, in denen wir in einer Untermenge von \mathfrak{M} Gleichverteilung eines geeigneten Parameters τ in $-\infty < \tau < +\infty$ annehmen möchten. Dagegen legt unsere Parameterdarstellung nahe, von φ wenigstens Normalität zu verlangen; d. h. wir fordern die Zerlegbarkeit von \mathfrak{M} in höchstens abzählbar viele Summanden \mathfrak{M}_ν mit $\varphi(\mathfrak{M}_\nu) < \infty$. Den trivialen Fall $\varphi(\mathfrak{M}) = 0$ scheiden wir aus. Damit kommen wir zu der folgenden

Definition 13: Eine G-Bewertung φ auf \mathfrak{M} ist ein totaladditives normales Maß mit $\varphi(\mathfrak{M}) > 0$, dessen Meßbarkeitsring durch alle Zylindermengen $0 \leq l(m) \leq a$ erzeugt wird.

Die Vereinfachung, die wir durch die Einführung von \mathfrak{M} erreicht haben, führt jetzt aber auf eine neue Schwierigkeit bei der Betrachtung der Änderungsvorschrift $\varphi^* = F(\varphi, l)$. φ war als totaladditives Maß auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ erklärt; φ^* sollte denselben Meßbarkeitsring haben. Damit erscheint φ^* zunächst wieder als Maß auf \mathfrak{M} . Ist nun z. B. l die Likelihood zu $x_1|H_1$, so interessiert aber nach Realisierung von H_1 gar nicht mehr \mathfrak{M} , sondern die Hypothesenmenge $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}(H_2, \dots)$. Wir müssen uns daher nun überlegen, in welcher Weise φ^* von \mathfrak{M} auf \mathfrak{M}' zu übertragen ist.

Hierzu benutzen wir die Darstellung der m aus \mathfrak{M} durch Likelihood-Parameter, die wir in der folgenden Form schreiben: $\theta_1, \dots, \theta_n, \eta_{rk}$. Dabei mögen die θ_ν die W.en der $x_\nu|H_1$ angeben, während η_{rk} die bedingte W. eines Atoms von H_μ mit $\mu \geq 2$ bedeutet, falls $x_\nu|H_1$ in der Bedingung vorkommt. Ist nun $x_1|H_1$ eingetreten, so gibt m die Anweisung, den Ereignissen E der Restkette H_2, \dots die bedingten W.en $p(E; x_1)$ zuzuschreiben, die allein aus den η_{lk} gebildet sind. Damit wird m auf dasjenige m' aus \mathfrak{M}' abgebildet, das gerade die Parameter η_{lk} hat. Durchläuft m das ganze \mathfrak{M} , so durchläuft m' mehrfach ganz \mathfrak{M}' . Wegen der Additivität der G -Belegungen ist bei dieser Abbildung von \mathfrak{M} auf \mathfrak{M}' das Maß φ^* wie üblich zu übertragen: Für ein $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}'$ ist $\varphi^*(\mathfrak{N}')$ das φ^* -Maß aller m mit $m \rightarrow m' \in \mathfrak{N}'$. Nehmen wir für \mathfrak{N}' speziell eine Zylindermenge $0 \leq l'_E(m') \leq a$, gebildet mit der Likelihood eines E der Restkette, so erhalten wir

$$\varphi^*(0 \leq l'_E(m') \leq a) = \varphi^*\left(0 \leq \frac{l_{x_1, E}(m)}{l_{x_1}(m)} \leq a\right).$$

$\frac{l_{x_1, E}}{l_{x_1}}$ ist als Quotient zweier Likelihood in \mathfrak{M} meßbar außer in der Menge $l_{x_1}(m) = 0$, wo der Quotient unbestimmt wird. Doch liefert unsere Formel

⁵⁾ So könnte man z. B. \mathfrak{M} mit Hilfe der Likelihood-Parameter als endliches oder abzählbar unendliches Produkt von endlich-dimensionalen Simplexes darstellen, die den H_ν der Kette entsprechen und in denen Gleichverteilung angenommen wird. Durch Produktbildung findet man ein φ .

auch in diesem Falle dann einen eindeutigen Wert für alle $\varphi^*(0 \leq l'_E(m') \leq a)$, wenn $\varphi^*(l_{x_e} = 0) = 0$ ist. Wir werden sehen, daß dies für ein φ^* automatisch gilt. Daher können wir nun bei der Definition der gesuchten Übertragung auf die Verwendung der Likelihood-Parameter verzichten und statt dessen die gewonnene Formel zugrunde legen.

Definition 14: Es sei φ eine G-Bewertung auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ mit der Likelihood $l(m)$. x_e seien die Atome von H_1 ; E sei ein Ereignis von H_2, H_3, \dots . $l'(m')$ seien die Likelihood auf $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}(H_2, \dots)$. Ist $\varphi(l_{x_e}(m) = 0) = 0$, so sei durch

$$\varphi_e(0 \leq l'_E(m') \leq a) = \varphi\left(0 \leq \frac{l_{x_e, E}(m)}{l_{x_e}(m)} \leq a\right)$$

gemäß Definition 13 eine G-Bewertung φ_e auf \mathfrak{M}' erklärt. Dann heißt φ_e die x_e -Projektion von φ auf \mathfrak{M}' und wird durch $[\varphi]_{x_e}$ symbolisiert. Entsprechend bedeutet $[d\varphi]_{x_e}$ das Differential von $[\varphi]_{x_e}$.

Unsere durch das Eintreten von $x_e | H_1$ gewonnene Erfahrung drückt sich also in zwei Schritten aus: Zunächst wird φ über \mathfrak{M} verwandelt in $\varphi^* = F(\varphi, l_{x_e})$. Dann wird die x_e -Projektion von φ^* auf \mathfrak{M}' gebildet, wozu jedoch $\varphi^*(l_{x_e} = 0) = 0$ erforderlich ist. Damit haben wir den Prozeß der Änderung der G-Grade in eine mathematische Gestalt gebracht. Die weitere Untersuchung hat sich nun mit der Frage zu beschäftigen, welche Funktion $F(\varphi, l)$ wir verwenden wollen. Für die Beantwortung bieten sich zwei Wege an:

a) Es wird ein bestimmtes $F(\varphi, l)$ axiomatisch gewählt. Durch Studium der Anwendungen wird gezeigt, daß die Wahl „vernünftig“ ist.

b) Es wird axiomatisch festgelegt, welche Eigenschaften ein $F(\varphi, l)$ haben soll, damit es als vernünftig gelten kann. Anschließend wird untersucht, welche $F(\varphi, l)$ diese Eigenschaften besitzen.

In Übereinstimmung mit unseren Überlegungen im vorigen § 20 werden wir den zweiten Weg einschlagen. Vorher aber seien noch zwei Arten von G-Bewertungen angeführt, die praktisch besonderes Interesse haben.

Bei der Diskussion des KS erwähnten wir bereits, daß man in der Anwendung so tut, als ob nur eine geeignete Untermenge aus \mathfrak{M} zur Konkurrenz stünde. So nimmt man etwa bei einem $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H, H_1, \dots)$ als „Wahrscheinlichkeitsmodell“ an, daß H genügend oft wiederholbar ist mit konstanten W.en; oder man betrachtet allgemeiner nur diejenigen Hypothesen, für die in einem H der Folge alle W.en nur von den Ergebnissen der k vorhergehenden Realisierungen abhängen. Solche Untermengen $\tilde{\mathfrak{M}}$ aus \mathfrak{M} fallen unter den folgenden Typ.

Definition 15: $\tilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ heißt eine stetige, r -dimensionale Hypothesenmenge mit den Modellparametern τ_1, \dots, τ_r , wenn gilt:

a) Über $\tilde{\mathfrak{M}}$ hängen alle Likelihood stetig von den τ_e ab.

b) Sind H_1, \dots, H_m mit beliebigen Ergebnissen x_1, y_1, \dots, z_r realisiert, so gibt es unter den dann gültigen Likelihood für die E aus H_{m+1}, \dots noch r funktionell unabhängige.

Bemerkung: Die genannten Likelihood sind für ein $n \in \tilde{\mathfrak{N}}$ gegeben durch die bedingten W.en $p_n(E; x_1, y_1, \dots, z_1)$. Der 2. Satz in Definition 15 stellt sicher, daß $\tilde{\mathfrak{N}}$ auch nach Realisierung eines Anfanges der Versuchskette noch r -dimensional bleibt.

Wenn wir in den Anwendungen nur mit $\tilde{\mathfrak{N}}$ arbeiten, so heißt dies, daß wir eine G-Belegung mit $\varphi(\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{N}}) = 0$ als idealisierten Grenzfall dafür benutzen, daß wir $\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{N}}$ für extrem unglaublich halten. Wegen der S. 310 angeführten Eigenschaft (c) der Änderungsvorschrift wird dann auch $\varphi^*(\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{N}}) = 0$ sein. Es bleibt so nur die G-Belegung auf $\tilde{\mathfrak{N}}$ von Interesse. Fassen wir φ und φ^* als Maße im r -dimensionalen Raum der τ_ϵ auf, so wird auch die in Definition 14 eingeführte x_ϵ -Projektion von φ^* entbehrlich; denn wegen Definition 15b wird bei der Projektion jedes m aus $\tilde{\mathfrak{N}}$ eineindeutig auf diejenige Hypothese m' aus $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}(H_2, \dots)$ abgebildet, die dieselben τ_ϵ besitzt. Im τ_ϵ -Raum wird also die Projektion zur Erhaltung von φ^* bei der identischen Abbildung.

Eine noch weitere Spezialisierung von φ besteht darin, daß endlich oder abzählbar unendlich viele m aus \mathfrak{M} endliche G-Grade erhalten, während im übrigen $\varphi = 0$ gesetzt wird. Wir sprechen dann von einer *diskreten Hypothesenmenge* $\mathfrak{D} = \{m_1, m_2, \dots\}$. Zu dieser Idealisierung gehört die bekannte Grundaufgabe der mathematischen Statistik, zwischen zwei einfachen Hypothesen eine Entscheidung zu treffen.

§ 22. Die Festlegung der Änderungsvorschrift.

Von der gesuchten Änderungsfunktion $F(\varphi, l)$ sei nun zunächst verlangt, daß sie nicht von dem jeweiligen $\mathfrak{M}(K)$ abhängt; alle Vorkenntnisse über K sollen also bereits durch φ ausgedrückt sein. Diese Forderung nach einer „Universalität der Änderungsvorschrift“ drückt sich mathematisch folgendermaßen aus:

Es seien \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 die Hypothesenmengen zu zwei verschiedenen Versuchsketten mit den G-Bewertungen φ_1 und φ_2 sowie den Likelihood $l_1(m_1)$ und $l_2(m_2)$. Gibt es nun eine eineindeutige Abbildung von \mathfrak{M}_1 auf \mathfrak{M}_2 so, daß dabei φ_1 in φ_2 und l_1 in l_2 übergeht, so soll dabei auch φ_1^* auf φ_2^* abgebildet werden. Wegen der Eindeutigkeit der Funktion $F(\varphi, l)$ könnten wir dies auch so formulieren: Zum Definitionsgebiet von $F(\varphi, l)$ über \mathfrak{M} gehören alle Paare (φ_1, l_1) , die durch eineindeutige Abbildung eines \mathfrak{M}_1 auf \mathfrak{M} entstehen. Wie die Darstellung durch die Likelihood-Parameter zeigt, ist nun jedes \mathfrak{M} von der Mächtigkeit c des Kontinuums. Es ist daher bequemer, unsere Forderung folgendermaßen als Definition der Änderungsvorschriften auszusprechen.

Definition 16: a) Es sei M eine festgewählte Menge der Mächtigkeit c des Kontinuums. Die Elemente von M heißen μ . M heißt *abstrakte Hypothesenmenge*.

b) Eine Funktion $\psi^* = F(\psi, \lambda)$ für totaladditive Maße ψ , ψ^* und Punktfunktionen $\lambda(\mu)$ auf M heißt *Änderungsvorschrift*, wenn:

$\alpha)$ $F(\varphi, \lambda)$ definiert ist für alle Paare (φ, λ) , die durch eindeutige Abbildung einer G-Belegung φ und Likelihood λ eines \mathfrak{M} auf M entstehen.

$\beta)$ ψ^* denselben Meßbarkeitsring wie ψ besitzt.

$c)$ φ und $\lambda(\mu)$ heißen bzw. G-Belegung und Likelihood auf M .

Von den gesuchten $F(\varphi, \lambda)$ werden wir eine gewisse Stetigkeit verlangen, die wir jetzt definieren.

Definition 17: Eine Änderungsvorschrift $F(\varphi, \lambda)$ heißt stetig, wenn gilt:
a) Sind $\psi_n^ = F(\varphi_n, \lambda)$ definiert und konvergiert $\varphi_n(N)$ gegen $\varphi(N)$ gleichmäßig für alle $N \subset M$ mit $\varphi(N) < \infty$, so ist auch $\psi^* = F(\varphi, \lambda)$ definiert, und es gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_n^*(N) = \psi^*(N)$ für jedes φ -meßbare $N \subset M$.*

b) Sind $\psi_n^ = F(\varphi, \lambda_n)$, $\psi^* = F(\varphi, \lambda)$ definiert und konvergiert $\lambda_n(\mu)$ gleichmäßig gegen $\lambda(\mu)$ bis auf eine Menge M_0 mit $\varphi(M_0) = 0$, so gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_n^*(N) = \psi^*(N)$ für jedes $N \subset M - M_0$.*

Wie in der allgemeinen Integrationstheorie üblich, haben wir in Definition 17b die gleichmäßige Stetigkeit der Punktfunktionen $\lambda_n(\mu)$ nur „fast überall“ verlangt. Damit ist gleichzeitig das übliche Verfahren der mathematischen Statistik gerechtfertigt, sich auf eine Teilmenge $M - M_0$ von M dann zu beschränken, wenn $\varphi(M_0)$ praktisch als Null angesehen werden soll. Es wird ja von der Änderungsvorschrift damit verlangt, daß ψ^* auf $M - M_0$ nicht von den Werten des λ auf M_0 abhängt. In der Tat folgt dies aus der Stetigkeit gemäß

Hilfssatz d 1: Sind $\psi_1^ = F(\varphi, \lambda_1)$ und $\psi_2^* = F(\varphi, \lambda_2)$ für ein stetiges F definiert und ist $\lambda_1 = \lambda_2$ bis auf ein M_0 mit $\varphi(M_0) = 0$, dann ist $\psi_1^* = \psi_2^*$ auf $M - M_0$.*

Beweis: In Definition 17b setze man alle $\lambda_n = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$.

Gemäß den Vorbemerkungen zu Definition 13 haben wir auf die Normierung $\varphi(M) = 1$ verzichtet. Wir werden daher einen positiven Faktor bei φ beliebig zulassen.

Definition 18: φ_1 und φ_2 heißen äquivalent, wenn $\varphi_1(N) = k \cdot \varphi_2(N)$ ist für jedes $N \subset M$ bei konstantem $k > 0$; symbolisch: $\varphi_1 \dot{\sim} \varphi_2$.

Der Möglichkeit einer Äquivalenz der G-Bewertungen entspricht eine Eigenschaft von $F(\varphi, \lambda)$ gemäß

Definition 19: $F(\varphi, \lambda)$ heißt homogen, wenn aus $\varphi_1 \dot{\sim} \varphi_2$ folgt $F(\varphi_1, \lambda) \dot{\sim} F(\varphi_2, \lambda)$.

Die Forderung, daß das gesuchte $F(\varphi, \lambda)$ mit den bisher genannten Eigenschaften gesetzt ist, wird nun ausgesprochen in

Axiom D 1: Auf M ist eine stetige, homogene Änderungsvorschrift $F(\varphi, \lambda)$ definiert.

Wir kommen nun zu einer Eigenschaft von $F(\varphi, \lambda)$, die anschaulich bedeutet, daß man Hypothesen mit übereinstimmender Likelihood vor Anwendung von $F(\varphi, \lambda)$ unter Wahrung ihres Gesamt-G-Grades zusammenfassen darf. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Hypothesenmenge $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ mit der G-Bewertung φ und der Likelihood $\lambda_1 = \lambda_E(m_1)$. Bei Eintreten von E hätten wir dann $\varphi_1^* = F(\varphi_1, \lambda_1)$ auf \mathfrak{M}_1 zu bilden.

Nehmen wir nun an, H_1, H_2, \dots sei eine endliche Versuchskette $K = H_1, \dots, H_m$. Dann können wir K fortsetzen durch ein willkürlich gewähltes H_{m+1} . Jedes $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ wird damit zu einer zusammengesetzten Hypothese h_2 der Mächtigkeit c aus $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}(K, H_{m+1})$. Dabei ist $l_2 = l_2(m_2)$ auf jedem h_2 konstant mit dem Werte $l_2(m_1)$. Wir haben so eine nicht umkehrbare Abbildung C_0 , die \mathfrak{M}_2 mit G -Bewertung φ_2 und Likelihood l_2 abbildet auf \mathfrak{M}_1 mit G -Bewertung φ_1 und Likelihood l_1 . Dabei gilt:

$$(a) \quad l_2(m_2) = l_1(C_0 m_2) \text{ und } \varphi_1(\mathfrak{N}_1) = \varphi_2(C_0 m_2 \in \mathfrak{N}_1)$$

für alle \mathfrak{N}_1 , während φ_2 im übrigen auf \mathfrak{M}_2 beliebig sein kann. Anstelle von φ_1^* wäre nunmehr $\varphi_2^* = F(\varphi_2, l_2)$ über \mathfrak{M}_2 zu bilden. Wegen der Willkür in der Wahl des vielleicht später gar nicht realisierten H_{m+1} darf nun die genannte gedankliche Fortsetzung von K das Ergebnis der Änderung der G -Grade nicht beeinflussen, abgesehen von Äquivalenz. Haben wir also zwei Mengen \mathfrak{N}_1' und \mathfrak{N}_1'' von \mathfrak{M}_1 , denen die Mengen $\mathfrak{N}_2^{(e)} = \{C_0 m_2 \in \mathfrak{N}_1^{(e)}\}$ von \mathfrak{M}_2 entsprechen, so soll sein:

$$(b) \quad \varphi_1^*(\mathfrak{N}_1'): \varphi_1^*(\mathfrak{N}_1'') = \varphi_2^*(\mathfrak{N}_2'): \varphi_2^*(\mathfrak{N}_2'').$$

Unsere Forderung, daß aus (a) stets (b) folgen soll, ist nun nicht nur zu erheben, wenn \mathfrak{M}_1 die Hypothesenmenge zu einem endlichen K ist. Jedes E gehört ja zu einem endlichen Abschnitt H_1, \dots, H_r , und unsere W -Schlüsse zielen stets nur auf einen weiteren endlichen Abschnitt H_{r+1}, \dots, H_s , für den die Betrachtung von H_1, \dots, H_s dann genügen muß, wenn unsere Ergebnisse nicht davon abhängen sollen, ob die weiteren H_{s+1}, \dots tatsächlich einmal realisiert werden. $\mathfrak{M}(H_1, \dots, H_s)$ kann also in unseren Betrachtungen die Rolle des \mathfrak{M}_1 und $\mathfrak{M}(H_1, \dots, H_s, H_{s+1}, \dots)$ die Rolle von \mathfrak{M}_2 spielen, wobei wieder (a) gilt und (b) gefordert wird.

Es seien nun \mathfrak{M}_1 vermöge A_1 und \mathfrak{M}_2 vermöge A_2 eineindeutig auf M abgebildet. Auf M haben wir dann die G -Bewertungen ψ_1 und ψ_2 sowie die Likelihoods λ_1 und λ_2 , die vermöge der nicht umkehrbaren Abbildung $C = A_1 C_0 A_2^{-1}$ mit $C M = M$ aufeinander gemäß

$$(c) \quad \lambda_2(\mu) = \lambda_1(C \mu) \text{ und } \psi_1(N) = \psi_2(C \mu \in N)$$

bezogen sind, während (b) die Beziehung

$$(d) \quad \psi_1^*(N_1): \psi_1^*(N_2) = \psi_2^*(C \mu \in N_1): \psi_2^*(C \mu \in N_2)$$

liefert. Da für $F(\psi, \lambda)$ auf M alle eineindeutigen Abbildungen gestattet sind, kann C dabei eine beliebige Abbildung sein mit der Einschränkung \mathfrak{E} , daß für jedes μ_1 die Menge $\{C \mu = \mu_1\}$ von der Mächtigkeit c ist. Wir überzeugen uns nun, daß \mathfrak{E} unwesentlich ist. Haben wir nämlich ein beliebiges C mit $C M = M$, und ist D eine weitere Abbildung von M auf sich, die \mathfrak{E} genügt, so definieren wir ein ψ_3 und ein λ_3 gemäß

$$\lambda_3(\mu) = \lambda_2(D \mu) \text{ und } \psi_3(D \mu \in N') = \psi_2(N') \text{ für jedes } N',$$

und damit wegen (c) und bei $N' = \{C \mu \in N\}$:

$$\lambda_3(\mu) = \lambda_1(C D \mu) \text{ und } \psi_3(C D \mu \in N) = \psi_1(N) \text{ für jedes } N.$$

Die Abbildungen $C'D$ und D genügen \mathfrak{E} , so daß wir aus (d) erhalten:

$$\psi_1^*(N_1) : \psi_1^*(N_2) = \psi_3^*(C D \mu \in N_1) : \psi_3^*(C D \mu \in N_2)$$

und

$$\psi_2^*(C \mu \in N_1) : \psi_2^*(C \mu \in N_2) = \psi_3^*(C D \mu \in N_1) : \psi_3^*(C D \mu \in N_2),$$

woraus wieder (d) für ψ_1^* und ψ_2^* folgt. Diese Betrachtung gilt unter der axiomatisch einzuführenden Voraussetzung, daß durch Abbildungen, die \mathfrak{E} genügen, das Definitionsgebiet von $F(\varphi, \lambda)$ nicht verlassen wird; dann führt nach obiger Überlegung auch ein beliebiges C nicht aus dem Definitionsgebiet heraus. Damit haben wir

Axiom D 2: Auf M seien gegeben die G -Belegungen ψ_1 und ψ_2 , sowie zu jedem ψ_r eine ψ_r -meßbare Funktion λ_r . C sei eine Abbildung von M auf sich mit den Eigenschaften:

$$a) \quad C M = M$$

$$b) \quad \lambda_2(\mu) = \lambda_1(C \mu)$$

$$c) \quad \psi_1(N) = \psi_2(C \mu \in N).$$

Dann gilt: $\alpha)$ Ist $\psi_1^* = F(\psi_1, \lambda_1)$ definiert, so auch $\psi_2^* = F(\psi_2, \lambda_2)$ und umgekehrt.

$\beta)$ Bei $N_1 \cdot N_2 = 0$ gilt

$$\psi_1^*(N_1) : \psi_1^*(N_2) = \psi_2^*(C \mu \in N_1) : \psi_2^*(C \mu \in N_2).$$

Ist für ein $N \subset M$ mit $\psi(N) > 0$ überall $\lambda > 0$, dann wäre durch das Eintreten von E mit der Likelihood λ die Hypothese N teilweise gestützt, und es muß daher auch $\psi^*(N) > 0$ gelten. Dies liefert

Axiom D 3: Aus $\psi(N) > 0$ nebst $\lambda > 0$ auf N folgt $\psi^(N) > 0$.*

Die weiteren Forderungen, die wir an $F(\psi, \lambda)$ stellen wollen, formulieren wir der Einfachheit halber nur für den Spezialfall diskreter Hypothesemengen. Es sei also aus M eine diskrete Menge $\Delta = \mu_1 + \mu_2 + \dots$ der Mächtigkeit m , m endlich oder abzählbar unendlich, ausgewählt mit den Likelihood-Werten $\lambda_r = \lambda(\mu_r)$. ψ ist eine G -Belegung mit $\psi(M - \Delta) = 0$, während die $\psi_r = \psi(\mu_r)$ wegen der Normalität von ψ endlich sind. Die $\psi_r \geq 0$ sind beliebig wählbar mit $\sum_r \psi_r > 0$. Nach Hilfssatz d 1 brauchen wir uns um die $\lambda(\mu)$ auf $M - \Delta$ nicht zu kümmern. Umgekehrt können wir zu Δ endlich oder abzählbar unendlich viele weitere μ hinzunehmen, für die $\psi = 0$ ist. Es genügt daher, sich mit abzählbar unendlichen Δ zu beschäftigen.

Die ψ_r^* , ψ_r und λ_r fassen wir zu Vektoren $\vec{\psi}^*$, $\vec{\psi}$ und $\vec{\lambda}$ zusammen; dann erhält die Änderungsvorschrift im Spezialfall der diskreten Hypothesemengen die Gestalt

$$(22.1) \quad \vec{\psi}^* = \mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})$$

mit der Vektorfunktion \mathfrak{F} . Nach Axiom D 1 hängt jede Komponente von $\vec{\psi}^*$ stetig von allen Komponenten der Vektoren $\vec{\psi}$ und $\vec{\lambda}$ ab, wenn die letzteren gleichmäßig konvergieren. Weiter wissen wir wegen Definition 16 bereits, daß (22.1) invariant ist gegen jede simultane Permutation der Komponenten der Vektoren $\vec{\psi}^*$, $\vec{\psi}$ und $\vec{\lambda}$: *Symmetrie von \mathfrak{F} .*

Das Definitionsgebiet von \mathfrak{F} besteht aus allen Vektoren $\vec{\psi}$ mit $\sum \psi_r > 0$ und allen Vektoren $\vec{\lambda}$: Für $\vec{\psi}$ ist dies ja klar; für $\vec{\lambda}$ folgt es daraus, daß über $\mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ jede Likelihood zu Ereignissen aus H_1 alle Werte kontinuierlich oft annimmt, so daß wir beliebige m_r auswählen und auf Δ abbilden können mit zusätzlicher Abbildung von $\mathfrak{M} - \sum m_r$ auf $M - \Delta$.

Sind speziell die Komponenten $\psi_1 = r$ und $\psi_2 = s$ ganzrational und ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so betrachten wir noch die diskrete Hypothesenmenge $\Delta' = \{\mu'_1, \mu'_2, \dots\}$ mit:

$$\begin{cases} \psi'_1 = \psi'_2 = \dots = \psi'_{r+s} = 1; & \psi'_{r+s+k} = \psi_{2+k} \text{ bei } k \geq 1 \\ \lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_{r+s} = \lambda_1; & \lambda'_{r+s+k} = \lambda_{2+k}. \end{cases}$$

Wegen der Symmetrie von \mathfrak{F} ist dann: $\psi_1^* = \dots = \psi_{r+s}^*$. Es sei nun die Abbildung C definiert durch

$$\begin{cases} C \mu'_1 = \dots = C \mu'_r = \mu_1; & C \mu'_{r+1} = \dots = C \mu'_{r+s} = \mu_2; \\ C \mu'_{r+s+k} = \mu_{2+k} \text{ bei } k \geq 1; & C(M - \Delta') = M - \Delta \text{ eineindeutig.} \end{cases}$$

Durch C wird auf M eine Bewertung $\tilde{\psi}$ und eine Punktfunktion $\tilde{\lambda}$ definiert mit: $\tilde{\psi} = \psi$ und $\tilde{\lambda} = \lambda$ auf Δ ; $\tilde{\psi}(M - \Delta) = \psi(M - \Delta) = 0$. Nach Hilfssatz d 1 ist also

$$\tilde{\psi}_1^* : \tilde{\psi}_2^* = \psi_1^* : \psi_2^*.$$

Andererseits haben wir nach Axiom D 2:

$$\tilde{\psi}_1^* : \tilde{\psi}_2^* = \psi_1^* : \psi_2^* (C \mu'_r = \mu_1) : \psi_1^* (C \mu'_r = \mu_2) = r : s = \psi_1 : \psi_2.$$

Damit erhalten wir

$$(22.2) \quad \text{bei } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ ist } \psi_1^* : \psi_2^* = \psi_1 : \psi_2$$

zunächst für ganzrationale ψ_1, ψ_2 ; dann aber wegen der Homogenität und der Stetigkeit auch allgemein. Beachten wir noch Axiom D 3, so können wir zusammenfassen zu

Hilfssatz d 2: Die Vektorfunktion $\vec{\psi}^ = \mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})$ ist definiert für alle $\vec{\lambda}$ und alle $\vec{\psi}$ mit $\sum \psi_r > 0$. Sie ist stetig, symmetrisch, homogen; es gilt (22.2). Aus $\psi_r \cdot \lambda_r > 0$ folgt $\psi_r^* > 0$.*

Betrachtet sei nun eine diskrete Hypothesenmenge $\mathfrak{D} = \{m_1, m_2, \dots\}$ aus $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$. x' sei ein Ergebnis von H_1 , x'' von H_2 , $l_r = l'(m_r)$ seien die Likelihood-Werte von x' ; l'_r sei definiert durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $l'_r = p_{m_r}(x''; x')$. Die Likelihood-Werte zu dem Ereignis (x', x'') auf \mathfrak{D} sind also $l_r = l'_r \cdot l''_r$. Tritt nun x' ein, so ist $\vec{\varphi}$ zu ändern in $\vec{\varphi}^* = \mathfrak{F}(\vec{\varphi}, \vec{l}')$. Tritt anschließend x'' ein, so ist weiter zu ändern in $\vec{\varphi}^{**} = \mathfrak{F}(\vec{\varphi}^*, \vec{l}'')$. Betrachten wir jedoch sofort das Eintreten von (x', x'') unter Zusammenfassung von H_1, H_2 zu einem einzigen Versuch, so würden wir die Bewertung $\vec{\chi} = \mathfrak{F}(\vec{\varphi}, \vec{l})$ erhalten haben. Soll nun das Endergebnis nicht davon abhängen, ob wir gleich das Eintreten von (x', x'') oder nacheinander erst x' und dann x'' feststellen, dann muß $\vec{\varphi}^{**} \sim \vec{\chi}$ sein. Wir sprechen dann von einer *Transitivität* der Bewertungsänderung. Da wir aus \mathfrak{M} beliebige m_r auswählen konnten, sind die Vektoren \vec{l}' und \vec{l}'' beliebig; nur müssen wir beachten, daß $\sum \varphi_r^* > 0$

wird, damit wir das Definitionsgebiet von \mathfrak{F} bei der Bildung von $\vec{\varphi}^{**}$ nicht verlassen. Formulieren wir nun unsere Forderung auf M, so ergibt sich

Axiom D 4: Ist $\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}') \neq 0$, so gilt

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}'), \vec{\lambda}'') \text{ äq } \mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}'\vec{\lambda}'')$$

bei

$$\vec{\lambda}'\vec{\lambda}'' = (\lambda'_1 \lambda''_1, \lambda'_2 \lambda''_2, \dots).$$

Die auf S. 310 als Eigenschaft (d) ausgesprochene COURNOTSche Forderung soll nun noch in die Axiomatik aufgenommen werden. Hierfür genügt der Spezialfall, daß \vec{l} überhaupt nur Komponenten mit den Werten 0 und 1 besitzt. In diesem Falle führt die COURNOTSche Forderung wegen der Stetigkeit von \mathfrak{F} zu

Axiom D 5: Gestattet die diskrete Hypothesenmenge Δ eine Zerlegung $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ mit $l_v = 1$ auf Δ_1 und $l_v = 0$ auf Δ_2 , und ist $\psi^*(\Delta_1) < \infty$, so ist $\psi^*(\Delta_2) = 0$.

Mit diesen Forderungen haben wir \mathfrak{F} bereits weitgehend festgelegt. Es gilt nämlich der

Hilfssatz d 3: Genügt die Vektorfunktion $\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})$ dem Hilfssatz d 2 und den Axiomen D 4 und D 5, so ist $\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}) \text{ äq } \overline{\psi \cdot \lambda^n}$ mit einem $n > 0$.

Es möge genügen, die Schritte des an sich einfachen Beweises zu skizzieren:

(a) Es ist $\vec{\psi}^* \text{ äq } \vec{\psi}$, falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \neq 0$ ist. Dies folgt unmittelbar aus (22.2).

(b) Bei $k > 0$ ist $\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}) \text{ äq } \mathfrak{F}(\vec{\psi}, k \cdot \vec{\lambda})$. Dies folgt durch Anwendung von D 4 mit dem Hilfsvektor (k, k, \dots) und Benutzung der Homogenität sowie der Aussage (a).

(c) Bei $\vec{\lambda} = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ist $\vec{\psi}^* \text{ äq } (\psi_1, \psi_2, 0, 0, \dots)$. Unmittelbare Folge von (22.2) und D 5.

(d) Aus $\psi_1 \cdot \lambda_1 = 0$ folgt $\psi_1^* = 0$. Wegen der Stetigkeit kann beim Beweis dieser Relation vorausgesetzt werden: $\psi_2 \cdot \lambda_2 > 0$ sowie ψ_1 und λ_1 nicht beide Null. Im Falle $\psi_1 = 0$ benutzen wir den Hilfsvektor $\vec{r} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, 0, 0, \dots \right)$ mit passendem α so, daß alle $r_v \leq 1$ sind. Wegen $\vec{r} \cdot \vec{\lambda} \text{ äq } (1, 1, 0, 0, \dots)$ führt D 4 auf (c) zurück. Im Falle $\lambda_1 = 0$ wird D 4 und die Aussage (b) mit den Hilfsvektoren $\vec{q} = (1, 1, 0, 0, \dots)$ und $\vec{r} = (0, 1, 0, 0, \dots)$ unter Beachtung von $\vec{\lambda} \cdot \vec{q} \text{ äq } \vec{r}$ angewendet. Die letzte Aussage von d 2 sorgt bei diesem Beweis-teil dafür, daß das Definitionsgebiet von \mathfrak{F} nicht verlassen wird.

(e) Ist $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, so hängt ψ_2^*/ψ_1^* nur von ψ_2/ψ_1 und λ_2/λ_1 ab, jedoch nicht von den ψ_v und λ_v mit $v \geq 3$. Dies ergibt sich folgendermaßen: Ist $\vec{q} = (1, 1, 0, 0, \dots)$, so ist wegen (c) und D 4

$(\psi_1^*, \psi_2^*, 0, 0, \dots) \text{ äq } \mathfrak{F}(\vec{\psi}^*, \vec{q}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}), \vec{q}) \text{ äq } \mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{\lambda} \cdot \vec{q}) \text{ äq } \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{q}), \vec{\lambda})$. $\vec{\lambda} \cdot \vec{q}$ enthält nicht die λ_v mit $v \geq 3$; andererseits enthält $\mathfrak{F}(\vec{\psi}, \vec{q})$ nicht die ψ_v mit $v \geq 3$ bis auf Äquivalenz. Also ist ψ_2^*/ψ_1^* unabhängig von den ψ_v und λ_v mit $v \geq 3$. Aus der Homogenität und (b) folgt die Behauptung.

(f) Seien $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ alle von Null verschieden. Aus (e) und der Symmetrie folgt

$$\psi_\mu^* / \psi_\nu^* = g\left(\frac{\psi_\mu}{\psi_\nu}, \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\nu}\right)$$

für alle Paare μ, ν aus 1, 2, 3. Dies liefert die Funktionalgleichung

$$g(x, y) \cdot g(\xi, \eta) = g(x\xi, y\eta)$$

für die stetige Funktion g ; also ist $g(x, y) = x^m \cdot y^n$. Wegen (22.2) ist $m = 1$, während die Stetigkeit zusammen mit (d) zeigt, daß $n > 0$ sein muß. Der allgemeine Fall folgt aus der Stetigkeit. — Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Exponent n hat unmittelbar anschauliche Bedeutung: Bei $n \rightarrow 0$ tendiert $\vec{\psi}$ zur Erhaltung der Ausgangsbewertung $\vec{\psi}$ ohne Beachtung des experimentellen Ergebnisses. Das letztere wird mit wachsendem n stärker benutzt. Bei $n \rightarrow \infty$ entsteht die Methode des Maximum-Likelihood, die die Vorbewertung $\vec{\psi}$ unberücksichtigt läßt. Wir lassen den Wert von n zunächst offen.

Die Übertragung unseres Ergebnisses auf den Fall eines beliebigen ψ wird nun natürlich auf die Vorschrift

$$(22.3) \quad d\psi^* \propto \lambda^n \cdot d\psi$$

führen. Um (22.3) streng zu rechtfertigen, zeigen wir den folgenden

Hilfssatz d 4: Es sei ψ eine G -Belegung auf M ; weiter M_0 eine Untermenge von M mit $\psi(M_0) = 0$ und von der Mächtigkeit c . Zu der Zerlegung $M - M_0 = \sum M_\sigma$ in höchstens abzählbar viele M_σ mit $\psi(M_\sigma) < \infty$ seien nicht notwendig verschiedene Zahlen κ_σ mit $0 \leq \kappa_\sigma \leq 1$ vorgegeben. Dann gibt es eine Funktion κ auf M mit der Eigenschaft:

a) $\psi^* = F(\psi, \kappa)$ ist definiert,

b) $\kappa \equiv \kappa_\sigma$ auf M_σ .

Es ist $\psi^*(M_\sigma) : \psi^*(M_\tau) = \psi(M_\sigma) \cdot \kappa_\sigma^n : \psi(M_\tau) \cdot \kappa_\tau^n$.

Beweis: Zu jedem M_σ wählen wir ein Element μ_σ aus M ; alle μ_σ verschieden. Wir betrachten die folgende Abbildung C :

$$C M_\sigma = \mu_\sigma; C M_0 = C_1 M_0,$$

wobei C_1 eine beliebige eineindeutige Abbildung von M_0 auf $M - \sum \mu_\sigma$ ist. Es entsteht hierbei aus ψ das Maß ψ' mit $\psi'(\mu_\sigma) = \psi(M_\sigma)$, $\psi'(M - \sum \mu_\sigma) = 0$. Die μ_σ bilden auf M eine diskrete endliche Hypothesenmenge mit Bewertung ψ' . Es gibt daher eine Likelihood λ auf M mit $\lambda(\mu_\sigma) = \kappa_\sigma$. Wir setzen $\kappa(\mu) = \lambda(C\mu)$. Axiom D 2 mit Hilfssatz d 3 liefern die Behauptung.

Mit Hilfe von d 4 läßt sich nun (22.3) folgendermaßen beweisen: Es seien die Untermengen N_1 und N_2 aus M so vorgegeben, daß gilt: $N_1 \cdot N_2 = 0$; $M - N_1 \cdot N_2$ ist von der Mächtigkeit c ; $\psi(N_\nu) < \infty$; $\int \lambda d\psi > 0$. Nach Vorgabe einer natürlichen Zahl m können wir dann M zerlegen in

$$M = M_0 + \sum N_{1\mu} + \sum N_{2\mu} + \sum N_{2\mu} + \dots$$

mit den Eigenschaften: M_0 ist von der Mächtigkeit c mit $\psi(M_0) = 0$; M_0 ist unabhängig von m gewählt; $\sum N_{e\mu} = N_e$ bei $e = 1, 2$; $\psi(N_{r\mu}) < \infty$; in $N_{r\mu}$

gilt $\frac{\mu-1}{2^m} < \lambda \leq \frac{\mu}{2^m}$. Es sei $\kappa_m(\mu)$ gemäß Hilfssatz d 4 gewählt mit $\kappa_m = \frac{\mu}{2^m}$ auf $N_{1\mu}, N_{2\mu}, \dots$. Dann ist für $\psi_m^* = F(\psi, \kappa_m)$:

$$(22.4) \quad \psi_m^*(N_\varrho) = k_m \cdot \sum_{\mu} \psi(N_{\varrho\mu}) \cdot \left(\frac{\mu}{2^m}\right)^n \text{ mit einem } k_m > 0; \varrho = 1, 2.$$

Weiter gibt es wegen $\int \lambda d\psi > 0$ eine feste Untermenge $N'_1 = \sum_{N'_1} N_{1\mu}$ in N_1 mit $\psi(N'_1) > 0$ und $\lambda > 0$ auf N'_1 sowie $\psi^*(N'_1) < \infty$ wegen der Normalität von ψ^* . Es ist

$$(22.5) \quad \psi_m^*(N'_1) = k_m \cdot \sum_{N'_1} \psi(N_{1\mu}) \cdot \left(\frac{\mu}{2^m}\right)^n.$$

Gehen wir nun zu $m \rightarrow \infty$ über, so konvergieren auf $M - M_0$ die $\kappa_m(\mu)$ gleichmäßig gegen $\lambda(\mu)$. Wegen der Stetigkeit konvergieren $\psi_m^*(N_\varrho)$ und $\psi_m^*(N'_1)$ gegen $\psi^*(N_\varrho)$ und $\psi^*(N'_1)$. Gemäß Axiom D 3 folgt aus (22.5) auf Grund der an N'_1 gestellten Bedingungen, daß dabei k_m gegen ein k mit $0 < k < \infty$ strebt. (22.4) liefert also

$$\psi^*(N_\varrho) = k \cdot \int_{N_\varrho} \lambda^n \cdot d\psi \text{ mit } k > 0; \varrho = 1, 2.$$

Da wir M_0 beliebig wählen konnten, ist damit (22.3) bewiesen, sofern $\int_M \lambda^n d\psi \neq 0$ ist.

Im Falle $\int_M \lambda^n d\psi = 0$ wählen wir ein μ_0 mit $\lambda(\mu_0) = \frac{1}{2}$, was bei einer Likelihood ja stets möglich ist, und bilden $\psi_m = \psi + \psi'_m$ mit $\psi'_m(\mu_0) = \frac{1}{m}$ und $\psi'_m(M - \mu_0) = 0$. Für $F(\psi_m, \lambda)$ gilt dann (22.3); also auch für $F(\psi, \lambda)$ wegen der Stetigkeit.

§ 23. Die Festlegung der Chance.

Die Chance hatten wir eingeführt als eine Mittelbildung über die Likelihood l auf \mathfrak{M} unter Verwendung von φ als Gewicht. Wie bei $F(\varphi, l)$ fordern wir die „Universalität“ der Vorschrift zur Chancenbildung; d. h. die Chance ist auf M durch ein Funktional $\chi(\lambda \parallel \psi)$ erklärt, das invariant bei eindeutigen Abbildungen von M auf sich und bei $\psi \rightarrow k \cdot \psi$ ist; $k > 0$. $\chi(\lambda \parallel \psi)$ soll weiter eine Stetigkeit analog zu Definition 17 besitzen. Damit ist bereits ausgedrückt, daß die Werte von λ auf einem M_0 mit $\psi(M_0) = 0$ das χ nicht beeinflussen; dies entspricht auch der Bedeutung von ψ als Gewicht bei der Chancenbildung. Aus unseren Überlegungen vor der Einführung von Axiom D 2 folgt weiter analog, daß auch $\chi(\lambda \parallel \psi)$ die Zusammenfassung von Hypothesen mit übereinstimmenden Werten von λ gestatten muß. Von vornherein ist zu erwarten, daß χ im Falle $\psi(M) = \infty$ im allgemeinen nicht definierbar ist; $\psi(M) = \infty$ sei daher zunächst ausgeschlossen. Im übrigen soll das Definitionsgebiet von χ mit dem von F übereinstimmen. Damit kommen wir zu

Axiom E 1: Es sei $F(\psi, \lambda)$ definiert und $\psi(M) < \infty$. Dann ist ein Funktional $\chi = \chi(\lambda \parallel \psi)$ festgelegt mit den Eigenschaften:

a) Unter den Voraussetzungen von Axiom D 2 ist $\chi(\lambda_1 \parallel \psi_1) = \chi(\lambda_2 \parallel \psi_2)$.

b) $\chi(\lambda \parallel \psi) = \chi(\lambda \parallel k \cdot \psi)$ bei $k > 0$.

c) Ist $\psi(M_0) = 0$, so ist $\inf_{M-M_0} \lambda \leq \chi \leq \sup_{M-M_0} \lambda$.

d) χ ist stetig bei gleichmäßiger Stetigkeit von ψ und bei gleichmäßiger Stetigkeit von λ fast überall auf M .

Ist $l(m)$ über M die Likelihood zu E , so heißt $\chi_M(E \parallel \varphi) = \chi(l \parallel \varphi)$ die Chance von E bei der G-Bewertung φ von M .

Bevor wir χ völlig festlegen, wollen wir noch eine Überlegung definitorisch erfassen, die wir bei der Setzung von φ häufig anstellen. Wir möchten z. B. die G-Bewertung für das M , gehörig zu dem wiederholten Werfen H einer Münze, davon abhängig machen, welches Ergebnis eine vorhergehende Schwerpunktbestimmung hat, ohne diese aber tatsächlich durchführen zu können. Eine solche Überlegung gehört zu den auf S. 311 genannten Analogiebetrachtungen zur Festlegung von φ . Wir können sie aber auch folgendermaßen auffassen:

Wir haben eine G-Bewertung φ_0 für die Hypothesenmenge $M(H_0, H, \dots)$ und fragen, welches φ wir statt dessen auf $M(H, H, \dots)$ nehmen wollen, wenn H_0 nicht realisiert wird. Allgemeiner sei ein $M_0 = M(H_0, K)$ mit der Versuchskette K gegeben und dazu die G-Belegung φ_0 . Wir fragen nach demjenigen φ auf $M = M(K)$, welches bei Verzicht auf die Realisierung von H_0 zu setzen ist. Betrachten wir hierzu aus M_0 ein m_0 , für das $\varphi(m_0) > 0$ sei. Für die Atome x_e zu H_0 und ein beliebiges Ereignis E aus K seien $p_e = p_{m_0}(x_e)$ und $p_{m_0}(E; x_e)$ die absoluten und die bedingten W.en in m_0 . m_0 schreibt vor: Ist x_e eingetreten, so hat E die W. $p_{m_0}(E; x_e)$; d. h. m_0 geht über in die Hypothese m_e aus M mit $p_{m_0}(E) = p_{m_0}(E; x_e)$. Bei Verzicht auf H_0 werden wir daher m_0 ersetzen durch die aus ihm möglicherweise folgenden m_e und dabei $\varphi_0(m_0)$ entsprechend den $p_e = p_{m_0}(x_e)$ additiv auf die m_e aufteilen, so daß m_e den G-Grad $h(p_e) \cdot \varphi_0(m_0)$ erhält mit einer geeigneten monoton wachsenden Funktion $h(p)$. Nun können wir nach Axiom D 2 Hypothesen mit gleichen Likelihoodwerten beliebig vereinigen oder aufteilen. Soll D 2 mit unserem Verzichtprozeß vereinbar bleiben, so müssen wir $h(p) = p$ wählen. Sind mehrere m_0 gegeben, so brauchen die daraus entstehenden m_e nicht alle verschieden zu sein. Wir müssen dann wieder gleiche unter ihnen zusammenfassen und ihre G-Grade addieren. Für allgemeines φ_0 auf M_0 ist analog zu verfahren: Jedes m_0 aus M_0 wird auf m_e abgebildet und dabei die G-Bewertung φ_e mit $d\varphi_e = l_{x_e} \cdot d\varphi_0$ übertragen, was gemäß Definition 14 $[l_{x_e} \cdot d\varphi_0]_{x_e}$ liefert. In M ist dann φ die Summe dieser G-Bewertungen über alle e :

$$d\varphi = \sum_e [l_{x_e}(m_0) \cdot d\varphi_0]_{x_e}.$$

Die angegebenen Projektionen sind durchführbar, da ja $\int_{l_{x_e}=0} l_{x_e} \cdot d\varphi_0 = 0$ ist. Wir fassen zusammen zu

Definition 20: Es sei $M_0 = M(H_0, H_1, \dots)$ mit φ_0 gegeben, wobei H_0 die Atome x_e besitze. Der Übergang von M_0 zu $M = M(H_1, H_2, \dots)$ mit der G-Bewertung φ gemäß

$$d\varphi = \sum_e [l_{x_e} \cdot d\varphi_0]_{x_e}$$

heißt dann H_0 -Verzicht.

Es handelt sich hier nur um eine Definition und kein Axiom, da wir nicht fordern wollen, daß man gemäß Definition 20 verfährt, wenn die x_e nicht beobachtbar sind. Statt dessen können wir ja auch H_0, H_1 als einen einzigen Versuch betrachten, in welchem die Atome y_e von H_1 eine Ereignisdisjunktion bilden. Bei Realisierung eines y_e wird dann wie gewöhnlich erst $F(\varphi_0, l_{y_e})$ auf \mathfrak{M}_0 angewendet und dann das Ergebnis φ_0^* auf $\mathfrak{M}(H_2, \dots)$ projiziert. Beide Möglichkeiten, die Anwendung von Definition 20 oder die Ansehung von H_0, H_1 als eines Experimentes, sind gleichermaßen Ausdruck unseres w-theoretischen Denkens. Da wir aber jedes φ als gemäß Definition 20 entstanden ansehen können, wobei ein solches H_0 völlig willkürlich ist, werden wir verlangen, daß die beiden genannten Möglichkeiten wenigstens für die Berechnung der Chance dasselbe liefern. Auf die Chancen kommt es ja letztlich allein an. Damit fordern wir

Axiom E 2: Unter Übernahme der Bezeichnungen von Definition 20 sei y ein Ereignis von H_1 und z ein Ereignis von H_2 . Bei Realisierung von y liefere φ_0 für $\mathfrak{M}^ = \mathfrak{M}(H_2, \dots)$ die G-Bewertung φ_1 ; dagegen das durch H_0 -Verzicht auf \mathfrak{M} entstehende φ die Bewertung φ_2 . Dann ist*

$$\chi_{\mathfrak{M}^*}(z \parallel \varphi_1) = \chi_{\mathfrak{M}^*}(z \parallel \varphi_2),$$

falls diese Chancen existieren.

Durch E 2 ist nun nicht nur $\chi(\lambda \parallel \psi)$ festgelegt, sondern auch der in (22.3) offengebliebene Exponent n . Es gilt nämlich

Satz 7 (Hauptsatz der indirekten Theorie): Genügen $\psi^ = F(\psi, \lambda)$ und $\chi = \chi(\lambda \parallel \psi)$ den Axiomen D 1—5 und E 1—2, so ist*

$$d\psi^* \text{ äq } \lambda \cdot d\psi \text{ und } \chi = \int_{\mathfrak{M}} \lambda \cdot d\psi / \psi(M).$$

Beweis: Die Bezeichnungen von Definition 20 und von Axiom E 2 seien übernommen. Vorgegeben seien die Zahlen ξ_e, η_e, ζ_e mit $\xi_e \geq 0$, $\sum \xi_e = 1$, $0 \leq \eta_e \leq 1$ und $0 \leq \zeta_e \leq 1$; alle ξ_e verschieden, alle ζ_e verschieden. Aus \mathfrak{M}_0 greifen wir diejenige Hypothese m_0 heraus, für welche gilt:

$$p_{m_0}(x_e) = \xi_e; \quad p_{m_0}(y; x_e) = \eta_e; \quad p_{m_0}(z; x_e, y) = \zeta_e.$$

φ_0 sei definiert durch $\varphi_0(m_0) = 1$, $\varphi_0(\mathfrak{M}_0 - m_0) = 0$. Bei Realisierung von y geht m_0 über in die Hypothese m^* von \mathfrak{M}^* mit $p_{m^*}(z) = p_{m_0}(z; y) = \sum \xi_e \eta_e \zeta_e / \sum \xi_e \eta_e$. Es ist $\varphi_1(m^*) = 1$, $\varphi_1(\mathfrak{M}^* - m^*) = 0$. Nach E 1c ist also

$$(23.1) \quad \chi_{\mathfrak{M}^*}(z \parallel \varphi_1) = p_{m^*}(z) = \sum \xi_e \eta_e \zeta_e / \sum \xi_e \eta_e.$$

Wenden wir Definition 20 an, so entsteht die folgende Bewertung φ für \mathfrak{M} :

$$\begin{cases} \varphi_e = \varphi(m_e) = \xi_e & \text{bei } m_e \text{ mit } p_{m_e}(y) = \eta_e; \quad p_{m_e}(z; y) = \zeta_e, \\ \varphi = 0 & \text{auf } \mathfrak{M} - \sum m_e. \end{cases}$$

Wird y realisiert, so ergibt hieraus (22.3) und anschließende Projektion auf \mathfrak{M}^* :

$$\begin{cases} \varphi_2(m_e^*) = \xi_e \eta_e^* & \text{bei } m_e^* \text{ mit } p_{m_e^*}(z) = \zeta_e, \\ \varphi_2 = 0 & \text{im übrigen auf } \mathfrak{M}^*. \end{cases}$$

Also ist nach E 1 bei Verwendung der Vektorschreibweise für diskrete Hypothesenmengen:

$$(23.2) \quad \chi_{\mathfrak{M}}(z \| \varphi_2) = \chi(\vec{\lambda} \| \vec{\psi}) \text{ mit } \psi_r = \xi_r \eta_r^n \text{ und } \lambda_r = \zeta_r.$$

Die Anwendung von E 2 im Spezialfall, daß alle $\eta_e = 1$ sind, zeigt zunächst unter Beachtung von E 1 b:

$$(23.3) \quad \chi(\vec{\lambda} \| \vec{\psi}) = \sum \psi_r \lambda_r / \sum \psi_r \text{ bei endlich-dimensionalen Vektoren.}$$

Die Gleichsetzung von (23.1) mit (23.2) ergibt dann aber

$$\sum \xi_e \eta_e \zeta_e / \sum \xi_e \eta_e = \sum \xi_e \eta_e^n \zeta_e / \sum \xi_e \eta_e^n,$$

was bei beliebigen ξ_e, η_e, ζ_e nur bei $n = 1$ erfüllt ist.

Es bleibt also nur noch die Formel für χ im Falle des allgemeinen ψ zu zeigen, was aber wieder aus Hilfssatz d 4, Axiom E 1a und der Stetigkeit von χ leicht folgt, wenn man beachtet, daß wegen $\psi(M) < \infty$ nur *endliche* diskrete Hypothesenmengen bei der Anwendung von E 1a benötigt werden.

Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems ergibt sich nun daraus, daß tatsächlich auch umgekehrt $d\psi^* = \lambda d\psi$ mit $\chi = \int_M \lambda d\psi / \psi(M)$ allen Axiomen genügt. Unmittelbar klar ist dies für D 1—5 und für E 1, während wir E 2 später verifizieren werden.

§ 24. Eigenschaften der Änderungsvorschrift und der Chance.

Formal hat die Änderungsvorschrift $d\varphi^* = k \cdot l d\varphi$ mit dem BAYESSchen Theorem der direkten W.-Rechnung eine große Ähnlichkeit, die vollkommen sichtbar wird, wenn wir uns auf die Fälle beschränken, wo $\varphi(\mathfrak{M})$ endlich ist. Es ist dann auch $\varphi^*(\mathfrak{M}) = k \cdot \int_{\mathfrak{M}} l d\varphi \leq k \cdot \varphi(\mathfrak{M})$ endlich, so daß wir φ und φ^* nach Art der W.en normieren können zu $\varphi(\mathfrak{M}) = \varphi^*(\mathfrak{M}) = 1$. Mit einer solchen Normierung ergibt sich dann

$$(24.1) \quad d\varphi^* = \frac{l \cdot d\varphi}{\int_{\mathfrak{M}} l \cdot d\varphi},$$

was dem BAYESSchen Theorem völlig entspricht. Diese formale Übereinstimmung darf aber über den logischen Unterschied zwischen (24.1) und dem BAYESSchen Theorem nicht täuschen:

a) Das BAYESSche Theorem ist ein Satz der W.-Rechnung und gilt innerhalb eines festgewählten π ; (24.1) dagegen gibt die Bewertungsänderung für die Menge aller π an.

b) Im BAYESSchen Theorem bedeuten alle Größen W.en in einem π ; in (24.1) kommen G-Grade und die Punktfunktionen $l(\pi)$ auf Π vor.

Die übliche Interpretation des BAYESSchen Theorems als Vorschrift für die Änderung der Bewertung verschiedener Möglichkeiten für ein $p(E|H)$ wird also zwar durch (24.1) gerechtfertigt; doch erforderte diese Rechtfertigung eben die neuen Axiome des induktiven w.-theoretischen Schließens. Die Notwendigkeit einer solchen neuen Begründung ist wohl der Grund dafür, daß die Zulässigkeit von (24.1) von den objektivistischen W.-Theoretikern bestritten wurde.

Auch mathematisch liegt ein Unterschied zwischen BAYESSchem Theorem und unserer Änderungsvorschrift darin, daß nur unter der Voraussetzung $q(\mathcal{M}) < \infty$ eine Gleichheit der Formel erreicht wird, während es im Falle $q(\mathcal{M}) = \infty$ kein BAYESSches Analogon zu $d\varphi^* = k \cdot l \, d\varphi$ in der direkten W.-Rechnung gibt. Dies ist ein Mangel, der ebenfalls in der Literatur als Argument gegen die Verwendung der BAYESSchen Formel bekannt ist.

Im Gegensatz zu (24.1) wollen wir nun gerade auf die Normierung verzichten und als Änderungsschrift

$$(24.2) \quad d\varphi^* = l \cdot d\varphi$$

verwenden. Eine solche Festlegung des freien Faktors erlaubt nämlich einige Vereinfachungen.

Gehen wir aus von $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(H_1, H_2, \dots)$, wo H_1 die Atome x_e besitze, so ist bei Eintreten von x_e zunächst (24.2) über \mathcal{M}_1 anzuwenden und dann das erhaltene φ_e^* auf $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(H_2, \dots)$ zu projizieren. Jedes m_1 aus \mathcal{M}_1 wird dabei eindeutig auf ein m_2 aus \mathcal{M}_2 abgebildet. Eine Ausnahme bilden jedoch die m_1 mit $l_{x_e}(m_1) = 0$, für die m_2 unbestimmt ist; für diese m_1 ist aber $\varphi_e^* = 0$, so daß wir ihnen irgendein m_2 zuordnen können. Damit haben wir eine Punkt-funktion $m_2(m_1)$ auf \mathcal{M}_1 erklärt, welche φ_e^* auf das gesuchte φ_e für \mathcal{M}_2 abbildet. Tritt nun weiter y_σ von H_2 ein, so wäre $d\varphi_e$ zu ändern in $l_{y_\sigma}(m_2) \cdot d\varphi_e$ über \mathcal{M}_2 . Da aber (24.2) linear in φ ist, können wir stattdessen auch $l_{y_\sigma}(m_2) d\varphi_e^*$ auf \mathcal{M}_1 bilden und anschließend durch $m_2(m_1)$ auf \mathcal{M}_2 abbilden. Die weitere Abbildung auf $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}(H_3, \dots)$ durch $m_3(m_2)$ kann aber auch gleich durch $m_3(m_1) = m_3(m_2(m_1))$ von \mathcal{M}_1 aus geschehen. Auf diese Weise erhalten wir die endgültige Bewertung $d\varphi_{e,\sigma}$ auf \mathcal{M}_3 aus der Bewertung $l_{y_\sigma}(m_2) d\varphi_e^* = l_{y_\sigma}(m_2) l_{x_e}(m_1) d\varphi = l_{x_e, y_\sigma}(m_1) d\varphi$ auf \mathcal{M}_1 durch Abbildung mit Hilfe von $m_3(m_1)$. Allgemein haben wir so als Verallgemeinerung von Axiom D 4 über die Transitivität der Bewertungsänderung

Satz 8: Bei Realisierung von $x = x'_{e_1} | H_1, \dots, x^{(n)}_{e_n} | H_n$ werde auf $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(H_1, \dots)$ gebildet:

a) Die Punkt-funktion $m_{s+1}^{e_1, \dots, e_s}(m_1)$, wo die Hypothese $m_{s+1}^{e_1, \dots, e_s}$ aus $\mathcal{M}_{s+1} = \mathcal{M}(H_{s+1}, \dots)$ die bedingten W.en $p_{m_1}(E; x)$ von m_1 als W.en für die E aus H_{s+1}, \dots vorschreibt.

b) Die G-Bewertung $d\varphi_{e_1, \dots, e_s}^* = l_x(m_1) \cdot d\varphi$.

Die Abbildung der G-Bewertung (b) von \mathcal{M}_1 auf \mathcal{M}_{s+1} mit Hilfe der Punkt-funktion (a) liefert dieselbe G-Bewertung $d\varphi_{e_1, \dots, e_s}$ auf \mathcal{M}_{s+1} wie bei schritt-weißer Durchführung der Änderungsvorschrift.

Ist nun l_E auf \mathcal{M}_{s+1} gegeben, so wird

$$(24.3a) \quad \int_{\mathcal{M}_{s+1}} l_E(m_{s+1}) d\varphi_{e_1, \dots, e_s} = \int_{\mathcal{M}_1} \frac{l_{x,E}(m_1)}{l_x(m_1)} d\varphi_{e_1, \dots, e_s}^* = \int_{\mathcal{M}_1} l_{x,E}(m_1) d\varphi.$$

Speziell für $E = \Omega(H_{s+1})$ liefert dies wegen $l_E(m_{s+1}) \equiv 1$:

$$(24.3b) \quad \varphi_{e_1, \dots, e_s}(\mathcal{M}_{s+1}) = \int_{\mathcal{M}_1} l_x(m_1) d\varphi.$$

Damit wird schließlich, wenn $\varphi(\mathfrak{M}_1)$ endlich ist:

$$\chi_{\mathfrak{M}_{s+1}}(E \| \varphi_{e_1, \dots, e_s}) = \frac{\int I_{x, E} d\varphi}{\varphi(\mathfrak{M}_1)} \Bigg/ \frac{\int I_x d\varphi}{\varphi(\mathfrak{M}_1)} = \chi_{\mathfrak{M}}(x, E \| \varphi) / \chi_{\mathfrak{M}}(x \| \varphi).$$

Wir bezeichnen nun das in Satz 8 genannte $\varphi_{e_1, \dots, e_s}$ durch $\varphi \cdot x$, um gleichzeitig anzudeuten, daß (24.2) angewendet wurde und daß in $\varphi \cdot x$ die Vorkenntnis φ mit der neuen Erkenntnis des Eintretens von x vereinigt wird. Dann haben wir

Satz 9: Liefert, ausgehend von φ auf $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$, das Eintreten von E_1 aus H_1, \dots, H_s die G-Bewertung $\varphi \cdot E_1$ auf $\mathfrak{M}_{s+1} = \mathfrak{M}(H_{s+1}, \dots)$, so gilt für ein weiteres Ereignis E_2 von H_{s+1}, \dots :

$$\chi_{\mathfrak{M}_{s+1}}(E_2 \| \varphi \cdot E_1) = \chi_{\mathfrak{M}_1}(E_1, E_2 \| \varphi) / \chi_{\mathfrak{M}_1}(E_1 \| \varphi).$$

Die Indices \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_{s+1} bei den Chancen können wir dabei auch weglassen, da sie durch die Angabe von E_1 und E_2 selbstverständlich sind; alle H_i hinter E_2 beeinflussen ja den Wert der Chancen nicht. Anstelle von E_1, E_2 können wir natürlich auch $E_1 \cdot E_2$ schreiben. Sind umgekehrt E_1 und E_2 beliebige Ereignisse in einem H , so können wir H auffassen als die Aufeinanderfolge von zwei Experimenten H_1, H_2 folgendermaßen: H_1 bedeutet die Realisierung von H mit der Registrierung von E_1 oder \bar{E}_1 ; H_2 ist die dann folgende Ablesung von E_2 oder \bar{E}_2 . Damit haben wir allgemein die einfache Formel

$$(24.4) \quad \chi(E_1 E_2 \| \varphi) = \chi(E_1 \| \varphi) \cdot \chi(E_2 \| \varphi \cdot E_1).$$

Das ist der Multiplikationssatz für die Chancen, der formal mit dem für die subjektivistischen W.en übereinstimmt. Da für Chancen der Additionssatz trivialerweise gilt, besteht so in der Tat die in § 20b angekündigte Möglichkeit, die Chancen mit den subjektivistischen W.en zu identifizieren.

Nach Satz 9 sind die Chancen nach beliebig vielen Beobachtungen bereits durch die Chancen aller Ereignisse bei der Ausgangsbewertung festgelegt. Nun kann man tatsächlich verschiedene G-Bewertungen konstruieren, die bezüglich aller Chancen übereinstimmen; dies geht selbst noch mit G-Bewertungen, die auf einer stetigen Hypothesenmenge (vgl. Definition 15) durch $\gamma(\tau) d\tau$ mit stetigem $\gamma(\tau)$ definiert sind und auf $\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{N}}$ verschwinden. Dies sei Anlaß zu folgender

Definition 21: Die G-Bewertungen φ_1 und φ_2 auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ heißen von gleicher Art, wenn für alle E aus H_1, H_2, \dots gilt

$$\chi_{\mathfrak{M}}(E \| \varphi_1) = \chi_{\mathfrak{M}}(E \| \varphi_2).$$

Aus Satz 9 folgt dann unmittelbar

Satz 10: Sind φ_1 und φ_2 auf \mathfrak{M} von gleicher Art, so sind auch die bei Eintreten eines E geänderten Bewertungen φ_1^ und φ_2^* von gleicher Art.*

Anschaulich gedeutet: Haben zwei Beobachter entsprechend ihren verschiedenen Vorkenntnissen verschiedene G-Bewertungen, stimmen sie jedoch bezüglich der Chancen überein, so bleiben sie bei gleichen Beobachtungen auch künftig in Übereinstimmung bezüglich aller Chancen.

Wir erbringen nun die noch offene
Verifizierung von Axiom E 2: Unter Benutzung der in Axiom E 2 verwendeten
 Bezeichnungen ist nach (24.3):

$$\chi_{\mathfrak{M}}(z\|\varphi_1) = \int_{\mathfrak{M}_0} l_{y,z} d\varphi_0 / \int_{\mathfrak{M}_0} l_y d\varphi_0.$$

Um φ_2 zu finden, haben wir erst φ auf \mathfrak{M} zu bilden. Hierzu wird die G-Bewertung $l_{x_e} \cdot d\varphi_0$ über \mathfrak{M}_0 abgebildet auf \mathfrak{M} mit Hilfe von $m^x_e(m_0)$, wo m^x_e

die W.en $p_{m_0}(E; x_e) = \frac{p_{m_0}(x_e, E)}{p_{m_0}(x_e)}$ für alle E aus H_1, H_2, \dots vorschreibt.

Anschließend ist auf \mathfrak{M} über alle ϱ zu addieren. Wegen der Linearität können wir diese Summation mit der anschließenden weiteren Bewertungsänderung bei Eintreten von y vertauschen. Dies liefert gemäß Satz 8 die Bewertungen $l_{x_e, y} d\varphi_0$ auf \mathfrak{M}_0 mit den Abbildungen $m^x_e \cdot y(m_0)$ auf \mathfrak{M}^* . Dann ist aber für jedes z aus H_2, \dots :

$$\int_{\mathfrak{M}^*} l_z(m^*) d\varphi_2 = \sum_{\varrho \in \mathfrak{M}_0} \int l_z(m^x_e \cdot y) \cdot l_{x_e, y}(m_0) d\varphi_0 = \sum_{\varrho \in \mathfrak{M}_0} \int l_{x_e, y, z}(m_0) d\varphi_0 = \int_{\mathfrak{M}_0} l_{x, z} d\varphi_0.$$

Speziell für $z = \Omega$ liefert dies

$$\varphi_2(\mathfrak{M}^*) = \int_{\mathfrak{M}_0} l_y d\varphi_0,$$

so daß in der Tat $\chi_{\mathfrak{M}^*}(z\|\varphi_2) = \chi_{\mathfrak{M}}(z\|\varphi_1)$ wird.

Wir wollen uns nun für einige typische Situationen davon überzeugen, daß $F(\varphi, l)$ und $\chi(l\|\varphi)$ gerade das mathematisch widerspiegeln, was wir als Naturwissenschaftler beim w.-theoretischen induktiven Schließen tun.

Statistische Schlüsse spielen sich nicht wie bei uns über ganz $\mathfrak{M}(K)$ zu einer vorgegebenen Versuchskette K ab, sondern nur über einer Teilmenge \mathfrak{N} , die meist eine diskrete oder eine stetige Hypothesenmenge ist. \mathfrak{N} heißt Menge der „zugelassenen Hypothesen“ und wird deshalb ausgesondert, weil $\varphi(\mathfrak{N})/\varphi(\mathfrak{M})$ sehr nahe bei Eins liegt; $\varphi(\mathfrak{M})$ ist dabei als endlich vorausgesetzt. Beim statistischen Schluß wird dann stillschweigend angenommen:

(α) Die Änderung von φ auf \mathfrak{N} ist praktisch unbeeinflusst von den Likelihoodwerten auf $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

(β) \mathfrak{N} darf auch nach Realisierung eines E als die Menge der zugelassenen Hypothesen angesehen werden.

(γ) Es genügt, die Chancen über \mathfrak{N} zu berechnen.

Untersuchen wir diese Annahmen (α — γ). (α) gilt bei $d\varphi^* = l \cdot d\varphi$ überhaupt für jede Untermenge von \mathfrak{M} , ist also gerechtfertigt. (β) und (γ) erweisen sich nun als gleichwertig; denn es ist

$$\frac{\varphi^*(\mathfrak{N})}{\varphi^*(\mathfrak{M})} = \frac{\int_{\mathfrak{N}} l_E d\varphi}{\int_{\mathfrak{M}} l_E d\varphi} = \frac{\varphi(\mathfrak{N})}{\varphi(\mathfrak{M})} \cdot \frac{\int_{\mathfrak{N}} l_E d\varphi/\varphi(\mathfrak{N})}{\chi_{\mathfrak{M}}(E\|\varphi)}.$$

Es gibt aber durchaus Fälle, wo (β) nicht erfüllt ist. Haben wir z. B. aus einem Kartenspiel von 32 Karten 4 Stück blind zu ziehen, so werden wir nach unserer Erfahrung derjenigen Teilmenge \mathfrak{N}_1 ein erdrückend großes φ zumessen, für deren Hypothesen allen Kombinationen von 4 aus 32 ungefähr übereinstimmende W.en zugeschrieben werden. Dagegen ist $\varphi(\mathfrak{N}_2)$ extrem klein für

die Menge \mathfrak{N}_2 der Hypothesen, die ein bestimmtes Ergebnis als besonders wahrscheinlich auszeichnen. Bei jedem Ergebnis des Experimentes bleibt dann durchaus \mathfrak{N}_1 ausgezeichnet; in Übereinstimmung mit unserer Schlußfolgerung in der Praxis. Tritt jedoch ein bestimmtes Ergebnis bei Wiederholung des Ziehens sehr oft auf, so wird automatisch durch die Vorschrift $d\varphi^* = l \cdot d\varphi$ einmal \mathfrak{N}_2 gegen \mathfrak{N}_1 bevorzugt werden. In Übereinstimmung mit dem common sense wird also in diesem Falle schließlich die Voraussetzung V fallengelassen, daß \mathfrak{N}_1 die Menge der zugelassenen Hypothesen ist. So qualitativ diese Bemerkung ist, so zeigt sie doch, daß das Fallenlassen von V darauf beruht, daß wir trotz der praktisch völligen Akzeptierung von \mathfrak{N}_1 den G-Grad $\varphi(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1)$ nie als exakt Null ansehen. Ein völliger Meinungsumschlag bezüglich einer Untermenge \mathfrak{N} vom praktisch Sicheren zum praktisch Unmöglichen kann dann aber stets eintreten.

Von einem Experiment H mit den Ereignissen E und \bar{E} gelte als genügend sicher, daß H beliebig wiederholbar ist mit gleichbleibender, aber unbekannter W . θ für das Eintreten von E . Wie ändert sich die Chance von E , wenn E einmal beobachtet wurde? Es sei \mathfrak{N} die in der Voraussetzung genannte stetige Hypothesenmenge mit dem Modellparameter θ . Angesetzt ist die G-Bewertung φ mit $\varphi(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = 0$, $\varphi(\mathfrak{N}) < \infty$. Dann wird $\chi(E \| \varphi) = \int_{\mathfrak{N}} \theta d\varphi / \varphi(\mathfrak{N})$. Ist nun E eingetreten, so haben wir $d\varphi^* = \theta d\varphi$ und damit den neuen Chancenwert $\chi(E \| \varphi^*) = \int_{\mathfrak{N}} \theta^2 d\varphi / \int_{\mathfrak{N}} \theta d\varphi$. Also ist

$$(24.5) \quad \chi(E \| \varphi^*) - \chi(E \| \varphi) = \frac{\int \theta^2 d\varphi \cdot \int d\varphi - (\int \theta d\varphi)^2}{\int d\varphi \cdot \int \theta d\varphi} \geq 0$$

nach der SCHWARZSchen Ungleichheit. Dieses Ergebnis ist durchaus in Übereinstimmung mit der Schlußfolgerung des common sense. Das Gleichheitszeichen in (24.5) gilt nur, wenn es ein θ_0 gibt mit $\int (\theta - \theta_0)^2 d\varphi = 0$. Das bedeutet aber, daß überhaupt nur θ_0 nach Glaubwürdigkeit zugelassen wäre. In diesem Falle kann man aber in der Tat aus dem Eintreten von E keine neue Folgerung über die Chance von E ziehen.

Ist im angegebenen Beispiel H das Werfen einer Münze, bei der wir damit rechnen wollen, daß sie nicht völlig einwandfrei ist, so werden wir beim zweimaligen Werfen eher auf Doubletten als auf Nicht-Doubletten rechnen. Dies läßt sich ebenfalls verifizieren. Es ist ja bei der Normierung $\varphi(\mathfrak{N}) = 1$:

$$\begin{aligned} \chi(E, \bar{E} \| \varphi) &= \chi(\bar{E}, E \| \varphi) = \int \theta (1 - \theta) d\varphi, \\ \chi(E, E \| \varphi) &= \int \theta^2 d\varphi \quad \text{und} \quad \chi(\bar{E}, \bar{E} \| \varphi) = \int (1 - \theta)^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in der Tat

$$[\chi(E, E) + \chi(E, \bar{E})] - [\chi(E, \bar{E}) + \chi(\bar{E}, E)] = \int (1 - 2\theta)^2 d\varphi > 0,$$

außer im trivialen Falle $\varphi(\theta = \frac{1}{2}) = 1$, $\varphi(\theta \neq \frac{1}{2}) = 0$; also bei a priori Gewißheit einer w.-theoretisch einwandfreien Münze.

Wir sahen, daß in (24.5) im allgemeinen das $>$ gilt. Nach Satz 9 ist also

$$\chi(E, E \| \varphi) > \chi(E \| \varphi) \cdot \chi(E \| \varphi).$$

Entsprechend ist

$$\chi(E, \bar{E} \parallel \varphi) = \chi(E \parallel \varphi) - \chi(\bar{E}, E \parallel \varphi) < \chi(E \parallel \varphi) \cdot \chi(\bar{E} \parallel \varphi).$$

Obwohl wir in \mathfrak{N} die Wiederholungen von H als physikalisch unabhängiger ansehen, genügen also die Chancen nicht dem Multiplikationssatz unabhängiger Ereignisse; eine Eigenschaft, die wir in § 20b bereits bei den subjektivistischen W -en feststellten. Ja, gerade wegen dieser Eigenschaft ändern sich gemäß Satz 9 die Werte der Chancen bei weiteren Beobachtungen.

Wenn wir sagen, daß die W . für das Werfen von Kopf einer Münze konstant gleich θ bei allen Wiederholungen ist, so meinen wir eigentlich nur, daß diese W . mit genügender Genauigkeit diese Eigenschaft besitzt. Damit fassen wir vor Anwendung der Änderungsvorschrift eine gewisse Hypothesenuntermenge \mathfrak{N}_θ zu einer einzigen fiktiven Hypothese zusammen. Warum dürfen wir nun mit solchen „unscharfen“ Hypothesen rechnen? Um dies zu beantworten, müssen wir erst die \mathfrak{N}_θ genauer beschreiben. Zu einem \mathfrak{N}_θ gehört jedenfalls die einfache Hypothese m_θ , für die θ exakt die W . für das Werfen von Kopf angibt. Dagegen soll nicht zu \mathfrak{N}_θ auch die einfache Hypothese $m_{\theta+\varepsilon}$ mit einem $\varepsilon \neq 0$ gehören, da es ein Ereignis gibt, bei dessen Eintreten m_θ beliebig gut von $m_{\theta+\varepsilon}$ getrennt werden kann. Wir rechnen also zu \mathfrak{N}_θ alle m aus $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H, H, \dots)$, die mit vorgegebener relativer Genauigkeit für alle Ereignisse dieselben Voraussagen machen wie m_θ . Das heißt: zu \mathfrak{N}_θ gehören alle m mit der Eigenschaft

$$(24.6) \quad |l_E(m)/l_E(m_\theta) - 1| < \varepsilon$$

bei fest vorgegebenem, kleinem $\varepsilon > 0$. So gehören z. B. zu \mathfrak{N}_θ alle Hypothesen, die für den n -ten Wurf eine W . p_n (Kopf) mit

$$|p_n(\text{Kopf}) - \theta| \leq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2^n} \cdot \max(\theta, 1-\theta)$$

vorschreiben. Mit der Festsetzung (24.6) sind alle \mathfrak{N}_θ fremd zueinander; denn es gibt für jedes Paar $\theta_1 < \theta_2$ ein E mit beliebig großem $l_E(m_{\theta_1})/l_E(m_{\theta_2})$. Das Maß ψ , das wir für die \mathfrak{N}_θ verwenden, entsteht nun einfach aus der G -Bewertung φ auf der Vereinigung \mathfrak{N} aller \mathfrak{N}_θ durch Abbildung auf $0 \leq \theta \leq 1$.

Tritt ein E ein, so wäre korrekt $d\varphi^* = l_E \cdot d\varphi$ auf \mathfrak{N} anzuwenden und anschließend wieder auf $0 \leq \theta \leq 1$ abzubilden. Wegen (24.6) liefert das aber bis auf höchstens den relativen Fehler ε dasselbe wie $d\psi^* = l_E(m_\theta) d\psi$, gebildet direkt auf $0 \leq \theta \leq 1$. Aus dem gleichen Grunde haben alle über $0 \leq \theta \leq 1$ aus den Likelihood $l_E(m_\theta)$ gebildeten Chancen höchstens den relativen Fehler ε ; nach Satz 9 haben dann aber die nach Eintritt eines E geänderten Chancen höchstens den relativen Fehler 2ε . Sowohl bezüglich der G -Grade als auch der Chancen darf daher unbedenklich mit den unscharfen Hypothesen \mathfrak{N}_θ gerechnet werden.

§ 25. G -Grade zweiter Stufe.

Bei der Erteilung der Bewertung φ zu einer Hypothesenmenge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ sind wir mitunter im Zweifel, welches φ wir nehmen sollen. Stattdessen möchten wir eine Menge von Bewertungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ einführen,

die ihrerseits wieder mit Gewichten $\alpha_r \geq 0$ als „G-Graden zweiter Stufe“ zu belegen wären. Die α_r sollen dabei ausdrücken, daß uns gewisse Kenntnisse fehlen, die uns eines der φ_r als angemessen erscheinen ließen. Solche Vorkenntnisse beziehen sich, sobald wir sie präzisieren, auf das Ergebnis x_r eines Vorversuches H_0 , der aus einer großen, aber stets nur endlichen Folge von Einzelexperimenten bestehen kann. Die Realisierung von H_0 ist aber nicht möglich. $K = H_1, H_2, \dots$ erscheint so als Folgeteil der Kette H_0, K . Zu $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(H_0, K)$ gehört irgendeine Belegung ψ .

Wären nun H_0 und ψ gegeben, so könnten wir direkt über \mathfrak{M}_0 arbeiten; wir könnten aber auch gemäß Definition 20 auf die Realisierung von H_0 verzichten und damit ein φ auf \mathfrak{M} gewinnen. Beide Möglichkeiten führen ja zu Bewertungen der gleichen Art für $\mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$, sobald H_1 realisiert ist. Die gegebenen φ_r sind weiter bis auf Faktoren k_r die G-Bewertungen für \mathfrak{M} , zu denen wir bei Realisierung von $x_r | H_0$ gelangen würden. Auch die α_r lassen sich nun zwanglos deuten: Die α_r sind bis auf einen gemeinsamen Faktor die Chancen der x_r über \mathfrak{M}_0 bei der Bewertung ψ . Ist $\psi(\mathfrak{M}_0) = \infty$, so werden wir allgemeiner die α_r als proportional zu den $\int_{\mathfrak{M}_0} l_{x_r}(m_0) d\psi$ ansehen. So natur-

gemäß eine solche Deutung der G-Grade zweiter Stufe ist, so bedeutet sie doch ein Axiom, das die W.-Theorie mit den bisher eingeführten Begriffen insoweit abschließt, als wir nicht noch G-Grade zweiter und höherer Stufe zu betrachten brauchen. Wir formulieren daher

Axiom F: Es seien für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ die G-Bewertungen φ_r gegeben mit den G-Graden zweiter Stufe α_r . Dann sind die α_r bis auf einen gemeinsamen Faktor von der Gestalt $\alpha_r = \int_{\mathfrak{M}_0} l_{x_r}(m_0) d\psi$ für eine geeignete G-Bewertung ψ auf einer Hypothesenmenge $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(H_0, H_1, \dots)$ mit der Eigenschaft: H_0 hat die Atome x_r ; bei Eintreten von x_r würde ψ zu $k_r \cdot \varphi_r$ auf \mathfrak{M} führen; $k_r > 0$. Die Verwendung der φ_r mit den α_r ist gleichbedeutend mit der Benutzung von ψ auf \mathfrak{M}_0 und anschließendem Verzicht auf Realisierung von H_0 .

Durch Axiom F ist nun auch ohne Kenntnis von H_0 und ψ die Bewertung φ auf \mathfrak{M} völlig festgelegt. Es gilt nämlich

Satz 11: Es seien für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ die G-Bewertungen φ_r mit den G-Graden α_r zweiter Stufe gegeben. Dann gilt auf \mathfrak{M} die G-Bewertung φ mit $\varphi \propto \sum_r \alpha_r \cdot \frac{\varphi_r}{\varphi_r(\mathfrak{M})}$.

Beweis: Die Bezeichnungen von Axiom F seien verwendet. Bei Eintreten von x_r erhalten wir auf \mathfrak{M} die Bewertung ψ_r . Es ist dann nach Definition 20: $\varphi = \sum_r \psi_r$. Hierbei entsteht ψ_r aus ψ_r^* mit $d\psi_r^* = l_{x_r}(m_0) d\psi$ auf \mathfrak{M}_0 durch Abbildung von \mathfrak{M}_0 auf \mathfrak{M} vermöge eines $m_r(m_0)$. Also ist

$$\psi_r(\mathfrak{M}) = \psi_r^*(\mathfrak{M}_0) = \int_{\mathfrak{M}_0} l_{x_r}(m_0) d\psi.$$

Dann haben wir gemäß Axiom F: $\varphi_r(\mathfrak{M}) = k_r \cdot \alpha_r$ mit $k_r > 0$. Damit wird schließlich

$$\varphi = \sum_r \psi_r = \sum_r k \alpha_r \cdot \frac{\varphi_r}{\varphi_r(\mathfrak{M})} = k \cdot \sum_r \alpha_r \frac{\varphi_r/k_r}{\varphi_r(\mathfrak{M})/k_r} = k \cdot \sum_r \alpha_r \cdot \frac{\varphi_r}{\varphi_r(\mathfrak{M})},$$

wie behauptet.

Aus dem Beweis folgt gleichzeitig, daß Axiom F die Endlichkeit der $\varphi_r(\mathfrak{M})$ impliziert. Es ist dann die mit den α_r gewogene Summe der zu $\varphi_r(\mathfrak{M}) = 1$ normierten φ_r zu bilden. Auf nichtnormierbare φ_r ist dagegen Axiom F nicht anwendbar. Dies ist auch ganz naturgemäß, da man dann keine Möglichkeit mehr hat, die Faktoren zu erkennen, mit denen die φ_r willkürlich multipliziert vorgelegt wurden.

Anstelle von Satz 11 können wir natürlich auch schreiben

$$\varphi \text{ äq } \int \varphi' \cdot d\alpha(\varphi'),$$

wo α ein Maß endlichen Ranges auf der Menge aller normierten G-Bewertungen φ' zu \mathfrak{M} ist. Die Ausdehnung dieser Formel auf den Fall eines beliebigen totaladditiven Maßes $\alpha(\varphi')$ entspricht dann der Grenzvorstellung, daß H_0 aus abzählbar unendlich vielen Einzelexperimenten besteht, so daß sein Merkmalraum als Raum der Mächtigkeit c mit totaladditivem Maß anstelle der Chancen anzusehen ist.

§ 26. Chancen objektivistischer Behauptungen.

Haben wir eine Hypothesenmenge $\mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ mit der Bewertung φ , so ist jedem E aus H_1, H_2, \dots eine Chance $\chi_{\mathfrak{M}}(E \parallel \varphi)$ zugeordnet als Ersatz für die unbekannte Wahrscheinlichkeit und damit als ein Maß für die Sicherheit des Eintretens von E . $\chi_{\mathfrak{M}}(E \parallel \varphi)$ können wir dann auch als Chance für die Richtigkeit der Behauptung „es wird E eintreten“ ansehen. Logisch von anderer Art sind dagegen objektivistische Behauptungen der folgenden beiden Typen:

$B_{\mathfrak{M}}$: „das wahre \hat{m} liegt in der Untermenge \mathfrak{N} von \mathfrak{M} “,

$B_{\mathfrak{N}} \cdot E$: „das wahre \hat{m} liegt in \mathfrak{N} , und es wird E eintreten“.

Die Richtigkeit von $B_{\mathfrak{M}}$ kann streng überhaupt nicht, und die von $B_{\mathfrak{N}} \cdot E$ nur teilweise durch das Eintreten eines Ereignisses geprüft werden. Mit welcher Begründung können wir trotzdem $B_{\mathfrak{M}}$ und $B_{\mathfrak{N}} \cdot E$ Chancen für ihre Richtigkeit zuschreiben?

Wir sprechen als Objektivisten $B_{\mathfrak{M}}$ aus in der Voraussetzung, daß die Entscheidung über die Richtigkeit von $B_{\mathfrak{M}}$ immer genauer möglich wird, einen je längeren bereits realisierten Abschnitt H_1, \dots, E_m der Versuchskette wir vor uns haben werden. Genauer postulieren wir die Existenz einer Folge von Testereignissen E_r derart, daß bei Eintreten von E_r für das dann erhaltene $\varphi_r^* = \varphi \cdot E_r$ der Quotient $\varphi_r^*(\mathfrak{N}) : \varphi_r^*(\mathfrak{M} - \mathfrak{N})$ mit r gegen ∞ , dagegen bei Nichteintreten für das entsprechende φ_r^* der Quotient $\varphi_r^*(\mathfrak{N}) : \varphi_r^*(\mathfrak{M} - \mathfrak{N})$ gegen Null strebt. Dies führt bei Einsetzen von φ^* und φ^{**} zu

Definition 22: Für die G-Bewertung φ heißt $B_{\mathfrak{N}}$ entscheidbar, wenn es zu jedem $M > 0$ ein Ereignis E_M gibt mit

$$\int_{\mathfrak{N}} l_{E_M} \cdot d\varphi \Bigg| \int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}} l_{E_M} \cdot d\varphi \geq M; \quad \int_{\mathfrak{N}} l_{\bar{E}_M} \cdot d\varphi \Bigg| \int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}} l_{\bar{E}_M} \cdot d\varphi \leq \frac{1}{M}.$$

Für entscheidbare $B_{\mathfrak{N}}$ ist auch für Subjektivisten $B_{\mathfrak{N}}$ eine sinnvolle Aussage. Das objektivistische Postulat können wir nun einfach folgendermaßen

formulieren: Wir sollen so tun, als ob die betrachteten $B_{\mathfrak{N}}$ bei den verwendeten φ stets entscheidbar sind.

Rein mathematisch kann man nämlich G -Belegungen so konstruieren, daß es überhaupt keine entscheidbaren $B_{\mathfrak{N}}$ gibt. Bei den stetigen Hypothesenmengen, die wir in den Anwendungen als W -Modelle verwenden, ist es jedoch im allgemeinen so, daß im Raume der Modellparameter wenigstens die $B_{\mathfrak{N}}$ zu den Intervallmengen entscheidbar sind.

Ist nun $B_{\mathfrak{N}}$ entscheidbar, dann können wir die gesuchten Chancen einführen durch

Definition 23: Für entscheidbares $B_{\mathfrak{N}}$ heißt

$$\chi(B_{\mathfrak{N}} \cdot E \parallel \varphi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \chi(E \cdot E_M \parallel \varphi)$$

die Chance dafür, daß die Behauptung $B_{\mathfrak{N}} \cdot E$ richtig ist.

Wir zeigen nun

Satz 12: Es ist

$$\chi(B_{\mathfrak{N}} \cdot E \parallel \varphi) = \int_{\mathfrak{N}} l_E d\varphi / \varphi(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Wegen $l_E + l_{\bar{E}} = 1$ und $0 \leq l_E \leq 1$ folgt aus den Abschätzungen von Definition 22 sofort

$$\varphi(\mathfrak{N}) - \frac{1}{M} \cdot \varphi(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \leq \int_{\mathfrak{N}} l_{E_M} d\varphi \leq \varphi(\mathfrak{N}) \quad \text{und} \quad 0 \leq \int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}} l_{E_M} d\varphi \leq \frac{1}{M} \cdot \varphi(\mathfrak{N}).$$

Es ist daher

$$\begin{cases} l_{E_M} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ auf } \mathfrak{N} \text{ bis auf ein } \mathfrak{N}' \text{ mit } \varphi(\mathfrak{N}') \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \varphi(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \\ l_{E_M} \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ auf } \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \text{ bis auf ein } \mathfrak{N}'' \text{ mit } \varphi(\mathfrak{N}'') \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \varphi(\mathfrak{N}). \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'$ haben wir dann $l_{E_M} \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$ und damit auch $l_{E \cdot E_M} \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$. Es folgt hieraus:

$$l_E \geq l_{E \cdot E_M} = l_E - l_{E \cdot \bar{E}_M} \geq l_E - \frac{1}{\sqrt{M}},$$

während wir auf $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} - \mathfrak{N}''$ haben:

$$0 \leq l_{E \cdot E_M} \leq l_{E_M} \leq \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Damit wird

$$\int_{\mathfrak{M}} l_{E \cdot E_M} d\varphi = \int_{\mathfrak{N}} l_E d\varphi + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right).$$

Wegen $\chi(E \cdot E_M \parallel \varphi) = \int_{\mathfrak{M}} l_{E \cdot E_M} d\varphi / \varphi(\mathfrak{M})$ folgt hieraus bei $M \rightarrow \infty$ die Behauptung.

Speziell für $E = \Omega(H_1)$ liefert Satz 12 die Formel

$$\chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi) = \varphi(\mathfrak{N}) / \varphi(\mathfrak{M}),$$

was als naturgemäße Neu-Interpretation des normierten G -Grades anzusehen

ist. Unter $\varphi \cdot B_{\mathfrak{N}}$ werden wir analog zu Definition 23 die Bewertung $\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi \cdot E_M$ verstehen; also

$$\varphi \cdot B_{\mathfrak{N}} = \begin{cases} \varphi & \text{auf } \mathfrak{N} \\ 0 & \text{auf } \mathfrak{M} - \mathfrak{N}. \end{cases}$$

Dies ist auch anschaulich die aus φ entstehende Bewertung, wenn zu φ die Zusicherung hinzukommt, daß \hat{m} in \mathfrak{N} liege. Es gelten dann formal alle Regeln der Chancenrechnung:

$$\begin{aligned} \chi(B_{\mathfrak{N}} \cdot (E_1 + E_2) \parallel \varphi) &= \chi(B_{\mathfrak{N}} E_1 \parallel \varphi) + \chi(B_{\mathfrak{N}} E_2 \parallel \varphi) \text{ bei } E_1 \cdot E_2 = 0 \\ \chi(B_{\mathfrak{N}} E_1 E_2 \parallel \varphi) &= \chi(B_{\mathfrak{N}} E_2 \parallel \varphi \cdot E_1) \cdot \chi(E_1 \parallel \varphi) \\ \chi(B_{\mathfrak{N}} E \parallel \varphi) &= \chi(E \parallel \varphi \cdot B_{\mathfrak{N}}) \cdot \chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi) \\ \chi(B_{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2} E \parallel \varphi) &= \chi(B_{\mathfrak{N}_1} E \parallel \varphi) + \chi(B_{\mathfrak{N}_2} E \parallel \varphi) \text{ bei } \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 = 0 \\ \chi(B_{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2} E \parallel \varphi) &= \chi(B_{\mathfrak{N}_1} B_{\mathfrak{N}_2} E \parallel \varphi) = \chi(B_{\mathfrak{N}_1} E \parallel \varphi \cdot B_{\mathfrak{N}_2}) \cdot \chi(B_{\mathfrak{N}_2} \parallel \varphi), \end{aligned}$$

wie leicht zu verifizieren ist. Besonders bemerkenswert ist der Spezialfall

$$\chi(B_{\mathfrak{N}} E \parallel \varphi) = \chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi \cdot E) \cdot \chi(E \parallel \varphi),$$

der aussagt, daß die Chance für die Richtigkeit von $B_{\mathfrak{N}} \cdot E$ gleich ist der Chance für E , multipliziert mit der Chance von $B_{\mathfrak{N}}$ in der Bewertung, die bei Eintreten von E aus φ entsteht.

§ 27. Konfidenzschluß und Fiduzialschluß.

Als Anwendung wollen wir an zwei Schlüssen der mathematischen Statistik zeigen, wie ihr Gültigkeitsanspruch mit Hilfe der Theorie der G -Grade geklärt werden kann. Zunächst betrachten wir den Konfidenzschluß (KS), bei dem die Diskussion der praktischen Anwendbarkeit uns in § 20a auf ein Dilemma führte, das im streng objektivistischen Rahmen nicht auflösbar war. Sei nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ gegeben. Dabei kann z. B. H_1 bereits die n -malige Wiederholung eines H sein, von dem H_2, \dots weitere Wiederholungen sind. In \mathfrak{M} ist eine Untermenge \mathfrak{N} als Menge der „zugelassenen Hypothesen“ ausgewählt. In den Anwendungen ist \mathfrak{N} eine stetige oder eine diskrete Hypothesenmenge. Über diesem \mathfrak{N} wird der KS konstruiert:

Für jedes $n \in \mathfrak{N}$ wird ein Ereignis $E(n) | H_1$ gewählt mit $p_n(E(n)) \geq 1 - \alpha$. Zu jedem Ergebnis x_r von H_1 sei \mathfrak{N}_r die Menge aller n mit $x_r \in E(n)$; kein \mathfrak{N}_r sei leer. Vorgeschrieben wird: Wenn x_r eintritt, so behaupte man, daß die richtige Hypothese \hat{m} in \mathfrak{N}_r liegt.

Wir berechnen die Chance χ für die Richtigkeit dieser Vorschrift. Es ist nach § 26:

$$(27.1) \quad \chi = \chi\left(\sum_r x_r \cdot B_{\mathfrak{N}_r} \parallel \varphi\right) = \sum_r \int_{\mathfrak{N}_r} l_{x_r}(n) d\varphi / \varphi(\mathfrak{M}).$$

Sei nun $G(x_r, n)$ definiert durch

$$(27.2) \quad G(x_r, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_r \in E(n), \text{ bzw. } n \in \mathfrak{N}_r, \\ 0 & \text{für } x_r \notin E(n), \text{ bzw. } n \notin \mathfrak{N}_r, \end{cases}$$

so ist $\int_{\mathfrak{N}_v} l_{x_v}(n) d\varphi = \int_{\mathfrak{N}} l_{x_v}(n) \cdot G(x_v, n) d\varphi$. Damit liefert (27.1):

$$\varphi(\mathfrak{M}) \cdot \chi = \int_{\mathfrak{N}} \sum_v l_{x_v}(n) \cdot G(x_v, n) d\varphi$$

oder nach (27.2):

$$\varphi(\mathfrak{M}) \cdot \chi = \int_{\mathfrak{N}} p_n(E(n)) d\varphi \geq (1 - \alpha) \cdot \varphi(\mathfrak{N}).$$

Damit haben wir mit $\chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi) = \varphi(\mathfrak{N})/\varphi(\mathfrak{M})$ den

Satz 13: Bei der Befolgung des Konfidenzschlusses mit der Signifikanzschranke α auf der Menge \mathfrak{N} der zugelassenen Hypothesen hat man eine Chance $\chi \geq (1 - \alpha) \cdot \chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi)$ für die Richtigkeit der Konfidenzbehauptung.

Damit haben wir folgendes erreicht:

a) Die für die Anwendungen des KS notwendige Beschränkung auf ein \mathfrak{N} ist gerechtfertigt durch Angabe einer unteren Schranke für χ . Mehr brauchen wir nicht, da wir uns stets nur von den Chancen und nicht von den unbekannten wahren W. en leiten lassen.

b) Der Einfluß der subjektiven Setzung der Menge der zugelassenen Hypothesen ist jetzt sichtbar in dem Faktor $\chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi)$.

c) Der universelle Charakter des KS ist weiterhin gewahrt, da das individuelle φ nur pauschal als $\chi(B_{\mathfrak{N}} \parallel \varphi)$ eingeht.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Fiduizialschlusses (FS), dessen strenge Begründung in der mathematischen Statistik bisher fehlt. Zunächst sei er beschrieben, um die Bezeichnungen festzulegen.

Vorgegeben sei aus $\mathfrak{M}(H_1, H_2, \dots)$ eine stetige Untermenge $\tilde{\mathfrak{N}}$ mit dem Modellparameter θ in $\theta' \leq \theta \leq \theta''$; $\theta^{(\nu)}$ endlich oder unendlich. Die Ergebnisse von H_1 seien idealisiert dargestellt durch eine aleatorische Größe a , die alle Werte im Intervall $\alpha' \leq a \leq \alpha''$ annehmen kann; $\alpha^{(\nu)}$ endlich oder unendlich. Diese rein mathematische Idealisierung wollen wir übernehmen, zumal sie in allen praktisch interessanten Fällen unbedenklich ist. Es sei dann $F(\alpha; \theta)$ die Verteilungsfunktion von a unter der Hypothese θ ; $F(\alpha; \theta) = p_\theta(a \leq \alpha)$. $F(\alpha; \theta)$ hänge stetig von α und θ ab und falle bei festem α monoton von $F(\alpha; \theta') = 1$ auf $F(\alpha; \theta'') = 0$. Dann wird vorgeschrieben:

Nimmt bei Realisierung von H_1 das a den Wert α an, so sage man, θ sei verteilt wie eine aleatorische Größe b mit der Verteilungsfunktion $p(b \leq y) = \Phi(y; \alpha) = 1 - F(\alpha; y)$.

Wenn wir für θ überhaupt eine Verteilung angeben, so kann dies nur eine Verteilung sein, die unsere Unkenntnis über den zu benutzenden Wert von θ ausdrückt. Der FS gibt also eine Vorschrift, nach der eine bestimmte Bewertung ψ_α auf $\tilde{\mathfrak{N}}$ zu setzen ist, sobald H_1 für a den Wert α geliefert hat; nämlich

$$(27.3) \quad \psi_\alpha(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) = F(\alpha; \theta_1) - F(\alpha; \theta_2).$$

Diese Vorschrift ist dann gerechtfertigt, wenn ψ_α mit derjenigen Bewertung $\varphi \cdot \alpha$ übereinstimmt, die wir nach der Änderungsvorschrift zu benutzen hätten, wenn wir von einem φ ausgehen. Es ist daher die Frage, welche φ mit (27.3) verträglich sind und damit stillschweigend durch (27.3) akzeptiert werden.

Wir gehen nun von dem unbekannten φ aus. Im Falle des Eintretens von $\alpha < a \leq \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, erhalten wir hieraus $\varphi_{\alpha, \varepsilon}^*$ mit $d\varphi_{\alpha, \varepsilon}^* = I_{\alpha < a \leq \alpha + \varepsilon} \cdot d\varphi$. Damit ist für ein θ -Intervall $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$

$$\varphi_{\alpha, \varepsilon}^*(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [F(\alpha + \varepsilon; \theta) - F(\alpha; \theta)] d\varphi(\theta).$$

In (27.3) ist φ_α normiert, so daß wir entsprechend zu bilden haben:

$$(27.4) \quad \begin{cases} \varphi_\alpha(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} [F(\alpha + \varepsilon; \theta) - F(\alpha; \theta)] d\varphi(\theta)}{h(\alpha + \varepsilon) - h(\alpha)} \\ \text{bei } h(\alpha) = \int_{\alpha'}^{\alpha''} [F(\alpha; \theta) - F(\alpha_0; \theta)] d\varphi(\theta), \end{cases}$$

wo α_0 beliebig fest in $[\alpha', \alpha'']$ gewählt sei. Zu fordern ist also, daß φ_α gemäß (27.4) existiert und gleich (27.3) wird. Hier gilt nun

Satz 15: Die Anweisung des Fiduzialschlusses ist dann und nur dann in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Änderungsprinzip bei geeigneter Ausgangsbewertung φ , wenn sich Parameter θ und Statistik a monoton und stetig so in $\tau = \tau(\theta)$ und $t = t(a)$ transformieren lassen, daß gilt:

- a) die Verteilungsfunktion hängt nur von $t - \tau$ ab;
- b) die Ausgangsverteilung für τ ist die Gleichverteilung.

Dies wäre z. B. der Fall, wenn a einer Gaussverteilung mit fester Varianz und unbekanntem Zentralwert θ genügt, wobei θ über $-\infty < \theta < +\infty$ gleichverteilt ist.

Beweis: a) Es sei die Bedingung des Satzes erfüllt. Da der FS invariant gegen monotone, stetige Transformationen ist, können wir von vornherein annehmen:

$$F(\alpha; \theta) = L(\alpha - \theta); \quad d\varphi(\theta) = d\theta.$$

Nach den Voraussetzungen des FS wächst $L(\zeta)$ stetig in $-\infty < \zeta < +\infty$ von $L(-\infty) = 0$ bis $L(+\infty) = 1$. Wir benutzen nun die elementar zu verifizierende Umformung des Zählers in (27.4):

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{L(\alpha + \varepsilon - \theta) - L(\alpha - \theta)\} d\theta &= \varepsilon \cdot \{L(\alpha + \varepsilon - \theta_1) - L(\alpha + \varepsilon - \theta_2)\} - \\ &\quad - \int_{\zeta=0}^{\varepsilon} \zeta \cdot dL(\alpha - \theta_1 + \zeta) + \int_{\zeta=0}^{\varepsilon} \zeta \cdot dL(\alpha - \theta_2 + \zeta). \end{aligned}$$

Bei $\theta_1 \rightarrow -\infty$ nebst $\theta_2 \rightarrow +\infty$ verschwinden die Integrale auf der rechten Seite, so daß sich für den Nenner in (27.4) ergibt:

$$h(\alpha + \varepsilon) - h(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{L(\alpha + \varepsilon - \theta) - L(\alpha - \theta)\} d\theta = \varepsilon.$$

Damit erhalten wir aus (27.4):

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ L(\alpha + \varepsilon - \theta_1) - L(\alpha + \varepsilon - \theta_2) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta=0}^{\varepsilon} \zeta \cdot dL(\alpha - \theta_1 + \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\zeta=0}^{\varepsilon} \zeta \cdot dL(\alpha - \theta_2 + \zeta) \right\}. \end{aligned}$$

Da nun $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \zeta dG(\zeta) = 0$ für jedes stetige G ist, wird endlich

$$\varphi_x(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) = L(\alpha - \theta_1) - L(\alpha - \theta_2) = F(\alpha; \theta_1) - F(\alpha; \theta_2)$$

in Übereinstimmung mit (27.3).

b) Es existiere umgekehrt φ_x gemäß (27.4). Dann erhalten wir aus (27.4) die Beziehung

$$\int_{x=\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_x(\theta_1 < \theta \leq \theta_2) \cdot dh(x) = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} [F(\alpha_2; \theta) - F(\alpha_1; \theta)] d\varphi(\theta).$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir φ_x gemäß (27.3) einsetzen:

$$(27.5) \quad \int_{x=\alpha_1}^{\alpha_2} [F(\alpha; \theta_1) - F(\alpha; \theta_2)] dh(x) = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} [F(\alpha_2; \theta) - F(\alpha_1; \theta)] d\varphi(\theta)$$

als Funktionalgleichung für $F(\alpha; \theta)$.

$h(x)$ und $\varphi(\theta)$ sind definitionsgemäß monoton nicht-fallende Funktionen. Setzt man in (27.5) speziell $\theta_1 = \theta - 0$, $\theta_2 = \theta + 0$, so verschwindet die linke Seite; also kann φ keine Sprünge haben. Wäre weiter $\varphi(\theta_2) = \varphi(\theta_1)$ bei $\theta_2 > \theta_1$, so verschwände die rechte Seite für alle $\alpha_1 < \alpha_2$; also wäre $h(x)$ konstant. Dann wäre aber auch $d\varphi = 0$. Also ist $\varphi(\theta)$ stetig und monoton steigend. Aus (27.4) folgt dann dasselbe für $h(x)$.

Es sei nun θ_0 ein beliebiger Punkt in $[\theta', \theta'']$. Wir transformieren θ und α in τ und β gemäß

$$\beta = h(x) - h(\alpha_0) \quad \text{und} \quad \tau = \varphi(\theta) - \varphi(\theta_0).$$

τ ist dann gleichverteilt in $[\varphi(\theta') - \varphi(\theta_0), \varphi(\theta'') - \varphi(\theta_0)]$. Aus $F(\alpha; \theta)$ wird eine Funktion $G(\beta; \tau)$ mit den gleichen Eigenschaften wie F . Aus (27.5) erhalten wir speziell bei $\alpha_1 = \alpha_0$; $\theta_1 = \theta_0$; $\beta(\alpha_2) = x$; $\tau(\theta_2) = y$:

$$\int_0^x [G(\beta; 0) - G(\beta, y)] \cdot d\beta = \int_0^y [G(x; \tau) - G(0; \tau)] \cdot d\tau.$$

Für die Funktion

$$H(x, y) = \int_{\beta=0}^x \int_{\tau=0}^y G(\beta; \tau) d\beta d\tau$$

liefert dies eine Differentialgleichung vom Typus:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = m(x) + n(y).$$

Dabei sind H , $m(x)$ und $n(y)$ stetig differenzierbar bis zur ersten Ordnung; weiter ist $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = G(x, y)$ stetig. Also ist

$$H(x, y) = L(x - y) + M(x) + N(y)$$

mit stetig bis zur zweiten Ordnung differenzierbaren Funktionen L, M, N . Es folgt $G(x, y) = -L''(x - y)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Nach Abschluß der Arbeit möchte ich besonders den Herren B. L. VAN DER WAERDEN und FR. WECKEN meinen besten Dank für die zahlreichen kritischen Bemerkungen und Anregungen aussprechen, die sowohl den Aufbau der Theorie als auch die Darstellung wesentlich beeinflußt haben.

(Eingegangen am 13. Juni 1954.)

Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im Hilbertschen Raum.

Von

KONRAD JACOBS in München.

Es gibt gegenwärtig zwei verschiedene Theorien, welche die Existenz und Eindeutigkeit von Mittelwerten auf Gruppen oder auch Halbgruppen zum Gegenstande haben. Der allgemeinen *Ergodentheorie* (vgl. insbes. BIRKHOFF [1] und RIESZ [2]) steht die Mittelwerttheorie der *fastperiodischen* Funktionen gegenüber (vgl. insbes. MAAK [3]). HERR MAAK hat in seiner Abhandlung über „Integralmittelwerte auf Gruppen und Halbgruppen“ [4] die Vermutung ausgesprochen, daß es möglich sei, die Ergodentheorie (und damit auch Teile der GODEMENTschen Theorie der positiv-definiten Funktionen auf Gruppen [5]) in den Rahmen einer Mittelwerttheorie für verallgemeinerte fastperiodische Funktionen einzubeziehen. Dies ist für einen klassischen Fall der Ergodentheorie richtig: die Vektoren eines Hilbertraumes, in welchem eine unitäre Gruppe wirkt, sind in einem verallgemeinerten Sinne fastperiodisch (GODEMENT [5], MAAK [4]). Der von GODEMENT [5] für diese Tatsache gegebene Beweis ist recht kompliziert und bedient sich der *Ergodentheorie* von BIRKHOFF. Es ist bisher aber nicht gelungen, die BIRKHOFFsche Methode aus dem Beweis dieses Satzes wirklich zu eliminieren.

Die eigentliche Absicht bei diesen Untersuchungen lag darin, diejenigen Ergebnisse, die im Falle unitärer Gruppen im Hilbertraum mittels der Ergodentheorie gewonnen werden konnten (Existenz und Eindeutigkeit von Mittelwerten und einige andere Sätze), auch für beliebige beschränkte Gruppen im Hilbertraum herzuleiten. Ich habe nun untersucht, ob nicht gerade die BIRKHOFFsche Schlußweise es gestattet, diesen der Ergodentheorie bisher nicht in voller Allgemeinheit zugänglichen Fall (vgl. z. B. EBERLEIN [6], DAY [7]) zu behandeln. Eine bejahende Antwort auf diese Frage konnte nicht von vornherein vermutet werden, da das BIRKHOFFsche Verfahren seinem Wesen nach nur für Gruppen mit der Schranke 1 (das sind gerade die unitären Gruppen) anwendbar ist. Es zeigt sich aber, daß man in einem Hilbertraum, in welchem eine beschränkte Gruppe wirkt, eine neue Norm einführen kann, welche die zur Anwendung der BIRKHOFFschen Methode nötigen Eigenschaften besitzt. Man gewinnt so die Existenz von Mittelwerten. Mittels einer neuartigen Methode gelingt auch der Nachweis der Eindeutigkeit der Mittelwerte. Alle gewonnenen Sätze sind auch für Räume L^p ($1 < p < \infty$) richtig.

In einer weiteren Abhandlung werde ich zeigen, daß man auf ähnliche Weise auch einen „Aufspaltungssatz“ für beschränkte Gruppen beweisen kann, der für unitäre Gruppen in gewisser Hinsicht bereits von GODEMENT hergeleitet wurde. Aus diesem Satz kann man z. B. folgern, daß in einem Hilbertraum, in welchem eine beschränkte Gruppe wirkt, jeder Vektor in

einem verallgemeinerten Sinne fastperiodisch ist. Es bleibt offen, ob man diese Periodizitätseigenschaft auch direkt aus dem Begriff des Hilbertraumes und der beschränkten Gruppe herleiten kann.

§ 1. Beschränkte Gruppen linearer Transformation im Hilbertraum.

Sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \dots\}$ ein abstrakter Hilbertraum. Wir setzen, wie üblich, $|h| = \sqrt{(h, h)}$.

In \mathfrak{H} wirke eine Gruppe \mathfrak{G} von linearen Transformationen x, y, \dots, a, b, \dots .

Definition 1. Eine Menge \mathfrak{L} linearer Transformationen in \mathfrak{H} heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $\Gamma > 0$ gibt, derart, daß für jedes $h \in \mathfrak{H}$ und alle $x \in \mathfrak{L}$

$$|x h| \leq \Gamma |h|$$

gilt. Γ heißt dann eine *Schranke* von \mathfrak{L} .

Ein Kriterium für Beschränktheit liefert der

Satz 1. Eine Menge \mathfrak{L} linearer Transformationen in \mathfrak{H} ist dann und nur dann beschränkt, wenn für jede Wahl von $f, g \in \mathfrak{H}$ die für alle $x \in \mathfrak{L}$ erklärte Funktion

$$\varphi(x) = (x f, g)$$

beschränkt ist.

Für den Beweis vgl. z. B. NAGY [8], S. 9–10.

Vereinbarung. Von jetzt ab nehmen wir an, daß die in \mathfrak{H} wirkende Gruppe \mathfrak{G} *beschränkt sei mit der Schranke* $\Gamma > 0$.

Satz 2. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ und alle $x \in \mathfrak{G}$ gilt

$$\frac{1}{\Gamma} |h| \leq |x h| \leq \Gamma |h|.$$

Es ist also stets $\Gamma \geq 1$.

Beweis. Voraussetzungsgemäß gilt stets

$$(1) \quad |x h| \leq \Gamma |h|.$$

Setzt man $h = x^{-1} f$ mit beliebigem $f \in \mathfrak{H}$, so ergibt sich

$$|f| \leq \Gamma |x^{-1} f|.$$

Da x^{-1} die ganze Gruppe \mathfrak{G} durchläuft, wenn x dies tut, so gilt für jedes $f \in \mathfrak{H}$ und alle $x \in \mathfrak{G}$

$$(2) \quad \frac{1}{\Gamma} |f| \leq |x f|.$$

(1) und (2) ergeben zusammen die Behauptung.

Anmerkung. Die Abschätzung (2) der Gruppe \mathfrak{G} *nach unten* ist für unsere Untersuchung, insbesondere in § 3, entscheidend. Beim Beweis von Satz 2 wurde die Existenz der Inversen in \mathfrak{G} benützt. Man kann den Beweis also nicht auf beliebige beschränkte *Halbgruppen* übertragen. Satz 2 ist für beschränkte Halbgruppen trivialerweise falsch. Man kann daher die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse nicht ohne weiteres auch für beschränkte Halbgruppen beweisen.

Bekannte Beispiele beschränkter Gruppen liefern die unitären Gruppen. Genauer gilt der

Satz 3. Die Gruppe \mathfrak{G} gestattet dann und nur dann die Schranke $\Gamma = 1$, wenn sie unitär ist, d. h. wenn für jedes $x \in \mathfrak{G}$ und beliebige $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(3) \quad (x f, x g) = (f, g)$$

gilt.

Beweis. Daß jede unitäre Gruppe \mathfrak{G} die Schranke $\Gamma = 1$ gestattet, folgt aus (3). Daß jede Gruppe \mathfrak{G} , welche die Schranke $\Gamma = 1$ hat, unitär ist, folgt aus der leicht nachzurechnenden Identität

$$4(f, g) = (f + g, f + g) - (f - g, f - g) \\ + i(f + ig, f + ig) - i(f - ig, f - ig).$$

Daß nicht jede beschränkte Gruppe \mathfrak{G} die Schranke $\Gamma = 1$ hat, entnehmen wir aus folgendem

Beispiel. In einem Hilbertraum von abzählbarer Dimension sei

$$\dots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots$$

eine orthonormierte Basis. Eine beschränkte lineare Transformation t ist durch Angabe der Punkte

$$t e_\nu \quad (-\infty < \nu < +\infty)$$

schon eindeutig bestimmt; freilich kann man diese Punkte nicht beliebig vorschreiben, wenn man t als Element einer beschränkten Gruppe erhalten will.

Sei $\Gamma \geq 1$ beliebig gewählt. Man überzeugt sich leicht, daß durch die Vorschrift

$$t e_\nu = \begin{cases} e_{\nu+1} & \text{für } \nu \neq 0 \\ \Gamma e_{\nu+1} & \text{für } \nu = 0 \end{cases}$$

eine nichtsinguläre Transformation t in \mathfrak{H} definiert ist, welche eine unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{G} = \{t^n\}$ mit der Schranke Γ (und keiner kleineren) erzeugt.

§ 2. Formulierung des Hauptsatzes.

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

Definition 2. \mathfrak{R} sei die Menge aller linearen Transformationen

$$B = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n b_\nu,$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl und $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{G}$ ist.

Satz 1. \mathfrak{R} ist eine die Gruppe \mathfrak{G} enthaltende Halbgruppe. Sie ist beschränkt: Die Schranke Γ von \mathfrak{G} ist auch eine Schranke von \mathfrak{R} .

Der Beweis ist trivial.

Definition 3. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{R}(h)$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{Bh, B \in \mathfrak{R}\}$. Wir legen dabei, wie immer im folgenden, die durch die Norm $|h|$ in \mathfrak{H} gegebene Topologie zugrunde.

Satz 2. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{R}(h)$ eine abgeschlossene konvexe Menge in \mathfrak{H} . Ferner ist $\mathfrak{R}(h)$ invariant, d. h. es gilt für jedes $f \in \mathfrak{R}(h)$

$$xf \in \mathfrak{R}(h)$$

für jedes $x \in \mathfrak{G}$, wofür wir auch kurz

$$x\mathfrak{R}(h) \subseteq \mathfrak{R}(h)$$

schreiben wollen. Es ist $\mathfrak{R}(f) \subseteq \mathfrak{R}(h)$ für jedes $f \in \mathfrak{R}(h)$.

Beweis. Wir beweisen nur die beiden letzten Aussagen. Sei $f \in \mathfrak{R}(h)$. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $B \in \mathfrak{R}$ mit

$$|f - Bh| < \frac{\varepsilon}{I}$$

Daraus folgt für beliebiges $A \in \mathfrak{R}$

$$|Af - ABh| < \varepsilon.$$

Denn \mathfrak{R} hat nach Satz 1 die Schranke I . Weil \mathfrak{R} Halbgruppe ist, so ist stets $AB \in \mathfrak{R}$.

Somit ist $Af \in \mathfrak{R}(h)$ für jedes $A \in \mathfrak{R}$. Wählt man speziell $A \in \mathfrak{G}$, so folgt die Invarianz von $\mathfrak{R}(h)$.

Läßt man A die ganze Halbgruppe \mathfrak{R} durchlaufen, so folgt aus der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}(h)$, daß

$$\mathfrak{R}(f) \subseteq \mathfrak{R}(h)$$

gilt.

Definition 4. Der Punkt $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fixpunkt (bezüglich einer Menge \mathfrak{L} von linearen Transformationen), wenn für alle $x \in \mathfrak{L}$

$$xf = f$$

gilt. Ein Punkt $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fixpunkt des Punktes $h \in \mathfrak{H}$ (bezüglich der Gruppe \mathfrak{G}), wenn $f \in \mathfrak{R}(h)$ gilt und wenn f Fixpunkt (bezüglich \mathfrak{G}) ist. Nahezu trivial ist der

Satz 3. Die Fixpunkte in \mathfrak{H} bilden einen linearen Teilraum von \mathfrak{H} . Ist $h \in \mathfrak{H}$ Fixpunkt, so ist $Bh = h$ für jedes $B \in \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}(h)$ besteht aus dem einzigen Punkte h .

Anmerkung. Beispielsweise ist $0 \in \mathfrak{H}$ Fixpunkt jeder Menge von linearen Transformationen in \mathfrak{H} . Aber 0 braucht nicht Fixpunkt eines jeden Punktes $h \in \mathfrak{H}$ zu sein: Wenn \mathfrak{G} z. B. nur die Identität e enthält, so ist jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ Fixpunkt von \mathfrak{G} und hat sich selbst als einzigen Fixpunkt; insbesondere hat dann ein Punkt $h \neq 0$ den Punkt 0 nicht zum Fixpunkt.

Nummehr lautet unser Hauptsatz folgendermaßen:

Hauptsatz. Jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau einen Fixpunkt.

Wir zerlegen den Hauptsatz in einen

Existenzsatz. Jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt und einen

Eindeutigkeitssatz. Jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ besitzt höchstens einen Fixpunkt.

In § 3 werden wir den Existenzsatz beweisen (§ 3, Satz 5).

Zum Beweise des Eindeutigkeitssatzes sind einige Vorbereitungen und Umformungen nötig. Wir führen hier den Eindeutigkeitssatz auf eine andere

Aussage zurück, die wir dann in § 4 (unter Zuhilfenahme des in § 3 zu beweisenden Existenzsatzes) beweisen werden (§ 4, Satz 1).

Satz 4. Wenn $h \in \mathfrak{H}$ den Fixpunkt h_0 besitzt, so läßt sich h in der Form

$$h = h_0 + h_1$$

darstellen, wobei h_1 den Fixpunkt 0 hat, d. h. $0 \in \mathfrak{R}(h_1)$ gilt.

Beweis. Da $h_0 \in \mathfrak{R}(h)$ ist, so gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $B \in \mathfrak{R}$ mit

$$|Bh - h_0| < \varepsilon.$$

Da h_0 Fixpunkt ist, so gilt nach Satz 3

$$Bh_0 = h_0.$$

Es ist also

$$|B(h - h_0)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt $0 \in \mathfrak{R}(h - h_0)$. Setzt man $h_1 = h - h_0$, so folgt die Behauptung.

Definition 5. Es sei \mathfrak{N} die Menge aller $h \in \mathfrak{H}$ mit $0 \in \mathfrak{R}(h)$.

Satz 5. Enthält \mathfrak{N} mit zwei Punkten f, g stets auch deren Differenz $f - g$, so hat jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ höchstens einen Fixpunkt.

Beweis. Aus $f, g \in \mathfrak{N}$ folge $f - g \in \mathfrak{N}$. Sei nun $h \in \mathfrak{H}$ beliebig und seien h_0, h'_0 zwei Fixpunkte von h . Nach Satz 4 gibt es dann zwei Darstellungen

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1, & h_1 &\in \mathfrak{N} \\ h &= h'_0 + h'_1, & h'_1 &\in \mathfrak{N} \end{aligned}$$

von h . Durch Subtraktion erhält man

$$h_0 - h'_0 = h_1 - h'_1.$$

$h_0 - h'_0$ ist als Differenz zweier Fixpunkte nach Satz 3 wieder Fixpunkt. $h'_1 - h_1$ ist also auch Fixpunkt. Daher besteht nach Satz 3 die Menge $\mathfrak{R}(h'_1 - h_1)$ aus dem einzigen Punkt $h'_1 - h_1$. Andererseits ist voraussetzungsgemäß $h'_1 - h_1 \in \mathfrak{N}$, also $0 \in \mathfrak{R}(h'_1 - h_1)$. Daraus folgt $h'_1 - h_1 = 0$. Es ist also

$$h_0 = h'_0.$$

Damit ist der Eindeutigkeitssatz zurückgeführt auf folgende

Aussage A. \mathfrak{N} enthält mit zwei Punkten f, g auch deren Differenz $f - g$.

Wenn die Gruppe \mathfrak{G} abelsch ist, so kann man diese Aussage A ganz leicht folgendermaßen beweisen:

Zunächst sieht man leicht, daß auch die Halbgruppe \mathfrak{R} abelsch ist. Sei nun $f, g \in \mathfrak{N}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es wegen $0 \in \mathfrak{R}(f)$, $0 \in \mathfrak{R}(g)$ Transformationen $F, G \in \mathfrak{R}$ derart, daß

$$|Ff| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \qquad |Gg| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma}$$

gilt. Nun erhält man

$$\begin{aligned} |FG(f - g)| &\leq |FGf| + |FGg| \\ &= |GFf| + |FGg| \end{aligned}$$

letzteres, weil \mathfrak{R} abelsch ist. Man beachte jetzt, daß \mathfrak{R} die Schranke Γ hat

Es geht weiter:

$$\leq \Gamma |F f| + \Gamma |G g| < \varepsilon.$$

Also ist $0 \in \mathfrak{R}(f - g)$, d. h. $f - g \in \mathfrak{R}$.

Ist \mathfrak{G} aber *nicht-abelsch*, so kann man dies Verfahren der „simultanen Mittelung“ im allgemeinen nicht durchführen. Wir führen daher unsere Aussage \mathfrak{A} auf eine weitere Aussage zurück. Diese lautet:

Aussage \mathfrak{B} . Es sei \mathfrak{T} eine beschränkte Gruppe in einem Hilbertraum \mathfrak{R} , und es gebe eine Teilmenge \mathfrak{M} von \mathfrak{R} mit folgenden beiden Eigenschaften:

a) \mathfrak{R} ist die abgeschlossene, invariante, lineare Hülle von \mathfrak{M} .

b) Es gilt $0 \in \mathfrak{S}(f)$ für jedes $f \in \mathfrak{M}$, dabei ist \mathfrak{S} die Menge aller Transformationen

$$S = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n t_r \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{T})$$

und $\mathfrak{S}(f)$ ist die abgeschlossene Hülle der Menge $\{Sf; S \in \mathfrak{S}\}$.

Dann ist $0 \in \mathfrak{S}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$.

Satz 6. Aus der Aussage \mathfrak{B} folgt die Aussage \mathfrak{A} (und damit der Eindeutigkeitssatz).

Beweis. Die Aussage \mathfrak{B} sei richtig. Sei nun \mathfrak{R} die abgeschlossene, invariante, lineare Hülle von \mathfrak{M} . Dann ist \mathfrak{R} ein abgeschlossener invarianter Teilraum von \mathfrak{H} .

Die Gruppe \mathfrak{G} induziert in \mathfrak{R} die ebenfalls beschränkte Gruppe \mathfrak{T} . Setzt man noch $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$, so erfüllen $\mathfrak{R}, \mathfrak{T}, \mathfrak{M}$ die Voraussetzungen der Aussage \mathfrak{B} . Demnach ist $0 \in \mathfrak{S}(h) = \mathfrak{R}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$, d. h. es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Da \mathfrak{R} ein linearer Teilraum von \mathfrak{H} ist, so liegt mit f, g auch $f - g$ in \mathfrak{R} . Also ist auch die Aussage \mathfrak{A} richtig.

In § 4 werden wir die Aussage \mathfrak{B} beweisen (§ 4, Satz 1). Damit wird auch der Eindeutigkeitssatz bewiesen sein.

Aus dem Hauptsatz folgert man leicht den

Satz 7. Die Zuordnung $h \rightarrow h_0$, durch die jeder Punkt h in seinen eindeutig bestimmten Fixpunkt h_0 übergeht, ist linear und stetig.

Beim Beweis benütze man Satz 2.

§ 3. Existenz der Fixpunkte.

Wir geben nun den Beweis des Existenzsatzes: Jeder Punkt $h \in \mathfrak{H}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt h_0 . h_0 wird mittels eines der BIRKHOFFSchen Minimalmethode nachgebildeten Verfahrens gefunden.

Definition 6. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ sei

$$\|h\| = \sup_{x \in \mathfrak{G}} |x h|.$$

Satz 1. Für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ gilt

a) $|h| \leq \|h\| \leq \Gamma |h|$, also insbesondere $\|h\| < \infty$.

b) $\|x h\| = \|h\|$ für jedes $x \in \mathfrak{G}$.

c) $\|\alpha h\| = |\alpha| \cdot \|h\|$ für jede komplexe Zahl α .

Der Beweis ist trivial.

Satz 2. $\|h\|$ ist als Funktion von $h \in \mathfrak{H}$ gleichmäßig-stetig auf jeder Kugel $\{|f| \leq A\}$ (mit beliebigem $A > 0$).

Beweis. Wir gehen aus von der bekannten Identität

$$|f + g|^2 = |f|^2 + 2 \operatorname{Re} (f, g) + |g|^2.$$

Setzen wir $f + g = h$, so kommt

$$|h|^2 = |f|^2 + 2 \operatorname{Re} (f, h - f) + |h - f|^2$$

$$||h|^2 - |f|^2| \leq |h - f|^2 + 2 |f| |h - f|.$$

Ersetzen wir h, f durch xh, xf , so kommt

$$||xh|^2 - |xf|^2| \leq I^2 |h - f|^2 + 2 I^2 |f| |h - f|.$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir $\delta > 0$ derart,

daß für $|h - f| < \delta, |f| \leq A$ ($A > 0$ beliebig, fest)

sowohl $I^2 |h - f|^2 < \frac{\varepsilon}{4}$

als auch $2 I^2 |f| |h - f| < \frac{\varepsilon}{4}$

gilt. Dann haben wir

$$||xh|^2 - |xf|^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes $x \in \mathfrak{G}$. Wählen wir nun

1. x derart, daß $||xh|^2 - \|h\|^2| < \frac{\varepsilon}{2}$, so ist

$$||xf|^2 - \|h\|^2| < \varepsilon,$$

also gilt sicherlich

$$\|f\|^2 \geq \|h\|^2 - \varepsilon.$$

2. x derart, daß $||xf|^2 - \|f\|^2| < \frac{\varepsilon}{2}$, so ist

$$||xh|^2 - \|f\|^2| < \varepsilon,$$

also gilt sicherlich

$$\|h\|^2 \geq \|f\|^2 - \varepsilon.$$

Beides zusammen ergibt $||h\|^2 - \|f\|^2| < \varepsilon$.

Also hängt $\|h\|$ stetig von $h \in \mathfrak{H}$ ab, sogar gleichmäßig auf jeder Kugel $\{|h| \leq A\}$.

Satz 3. Für beliebige $f, g \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \frac{|f-g|^2}{4 I^2}.$$

Beweis. Wir gehen aus von der bekannten Identität

$$\left| \frac{f+g}{2} \right|^2 + \left| \frac{f-g}{2} \right|^2 = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}.$$

Ersetzen wir f, g durch xf, xg , so entsteht

$$\left| x \left(\frac{f+g}{2} \right) \right|^2 = \frac{|xf|^2 + |xg|^2}{2} - \frac{|x(f-g)|^2}{4}.$$

Nach § 1, Satz 2 ist

$$|x(f - g)| \geq \frac{1}{F} |f - g|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| x \left(\frac{f+g}{2} \right) \right|^2 &\leq \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \frac{|f-g|^2}{4F^2} \\ \left\| \frac{f+g}{2} \right\|^2 &\leq \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \frac{|f-g|^2}{4F^2}. \end{aligned}$$

Satz 4. Jede nichtleere konvexe abgeschlossene Menge $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{H}$ enthält genau einen Punkt h_0 mit *minimalem* $\|h_0\|$, d. h. mit

$$\|h_0\| \leq \|f\|$$

für alle $f \in \mathfrak{C}$.

Beweis. Sei $\sigma_0 = \inf_{f \in \mathfrak{C}} \|f\|$ und f_1, f_2, \dots eine Folge von Punkten aus \mathfrak{C} mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|f_v\| = \sigma_0.$$

Dann gilt nach Satz 3 für beliebige μ, v

$$\frac{|f_\mu - f_v|^2}{4F^2} \leq \frac{\|f_\mu\|^2 + \|f_v\|^2}{2} - \left\| \frac{f_\mu + f_v}{2} \right\|^2.$$

Weil \mathfrak{C} konvex ist, ist $\frac{f_\mu + f_v}{2} \in \mathfrak{C}$, also

$$\left\| \frac{f_\mu + f_v}{2} \right\|^2 \geq \sigma_0^2$$

und somit

$$\frac{|f_\mu - f_v|^2}{4F^2} \leq \frac{\|f_\mu\|^2 + \|f_v\|^2}{2} - \sigma_0^2.$$

Nun bestimmen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ derart, daß für $v > N$

$$\|f_v\|^2 < \sigma_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{4F^2}$$

gilt. Dann hat man für $\mu, v > N$ auch

$$\frac{\|f_\mu\|^2 + \|f_v\|^2}{2} - \sigma_0^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4F^2}$$

und somit

$$|f_\mu - f_v| < \varepsilon.$$

Die Folge f_1, f_2, \dots konvergiert also gegen ein Element $h_0 \in \mathfrak{H}$, das wegen der Abgeschlossenheit von \mathfrak{C} in \mathfrak{C} liegt.

Weil $\|h\|$ stetig von $h \in \mathfrak{H}$ abhängt, ist $\|h_0\| = \sigma_0$. h_0 ist also ein Element aus \mathfrak{C} mit minimalem $\|h_0\| = \sigma_0$. Angenommen, $h'_0 \in \mathfrak{C}$ hat ebenfalls $\|h'_0\| = \sigma_0$. Dann gilt nach Satz 3

$$\frac{|h_0 - h'_0|^2}{4F^2} \leq \frac{\|h_0\|^2 + \|h'_0\|^2}{2} - \left\| \frac{h_0 + h'_0}{2} \right\|^2.$$

Da \mathfrak{C} konvex ist, so liegt auch $\frac{h_0 + h'_0}{2}$ in \mathfrak{C} , also ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h_0 + h'_0}{2} \right\|^2 &\geq \sigma_0^2 \\ \frac{|h_0 - h'_0|^2}{4F^2} &\leq \frac{\sigma_0^2 + \sigma_0^2}{2} - \sigma_0^2 = 0, \end{aligned}$$

also $h'_0 = h_0$.

Satz 5. (Existenzsatz.) Jedes $h \in \mathfrak{H}$ hat mindestens einen Fixpunkt h_0 . Der nach Satz 4 in $\mathfrak{R}(h)$ vorhandene Punkt h_0 mit minimalem $\|h_0\|$ ist nämlich ein Fixpunkt.

Beweis. Sei h_0 der nach Satz 4 in $\mathfrak{R}(h)$ vorhandene, eindeutig bestimmte Punkt mit minimalem $\|h_0\|$. Für jedes $x \in \mathfrak{G}$ liegt auch $x h_0$ in $\mathfrak{R}(h)$ (§ 2, Satz 2). Nach Satz 1 ist nun für jedes x

$$\|x h_0\| = \|h_0\| = \inf_{f \in \mathfrak{R}(h)} \|f\| = \sigma_0.$$

Da h_0 aber in $\mathfrak{R}(h)$ der einzige Punkt mit $\|h_0\| = \sigma_0$ ist, so ist

$$x h_0 = h_0.$$

h_0 ist also Fixpunkt.

§ 4. Eindeutigkeit der Fixpunkte.

Wir geben nun den Beweis der Aussage \mathfrak{B} (§ 2). Nach § 2, Satz 6 ist dann der Eindeutigkeitssatz bewiesen und damit der Beweis des Hauptsatzes vollendet.

Sei \mathfrak{R} ein Hilbertraum und \mathfrak{P} eine beschränkte Gruppe linearer Transformationen in \mathfrak{R} . Bekanntlich gibt es zu jeder beschränkten linearen Transformation P in \mathfrak{R} genau eine Transformation P^* derart, daß für beliebige $f, g \in \mathfrak{R}$

$$(Pf, g) = (f, P^*g)$$

gilt. P^* ist beschränkt mit derselben Schranke wie P . Die Zuordnung $P \rightarrow P^*$ ist linear und überdies involutorisch: $(P^*)^* = P$. P^* heißt die zu P adjungierte Transformation.

Durchläuft P die Gruppe \mathfrak{P} , so durchläuft P^* eine beschränkte Gruppe \mathfrak{P}^* mit derselben Schranke wie \mathfrak{P} . Durchläuft P die Halbgruppe

$$\Omega = \left\{ P = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n p_r, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{P} \right\},$$

so durchläuft P^* die Halbgruppe

$$\Omega^* = \left\{ Q = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n q_r, q_1, \dots, q_n \in \mathfrak{P}^* \right\}.$$

Lemma. Sei \mathfrak{M}_0 eine Menge in \mathfrak{R} mit folgenden beiden Eigenschaften:
a) \mathfrak{R} ist die abgeschlossene, lineare, invariante (bezüglich der Gruppe \mathfrak{P}) Hülle von \mathfrak{M}_0 .

b) $0 \in \Omega(f)$ für jedes $f \in \mathfrak{M}_0$. Dabei ist $\Omega(f)$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{Pf, P \in \Omega\}$.

Dann gibt es in \mathfrak{R} bezüglich der adjungierten Gruppe \mathfrak{P}^* keinen von 0 verschiedenen Fixpunkt.

Beweis. Sei $h_0 \in \mathfrak{R}$ Fixpunkt bezüglich der Gruppe \mathfrak{P}^* . Dann ist h_0 auch Fixpunkt bezüglich der Halbgruppe Ω^* . Es gilt also $P^* h_0 = h_0$ für jedes $P^* \in \Omega^*$.

Sei nun $f \in \mathfrak{M}_0$ beliebig. Wegen $0 \in \Omega(f)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P \in \Omega$ mit

$$\|Pf\| < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$|(f, h_0)| = |(f, P^* h_0)| = |(Pf, h_0)| \leq \varepsilon \cdot |h_0|.$$

Es ist also $(f, h_0) = 0$ für jedes $f \in \mathfrak{M}_0$. Da für beliebiges $p \in \mathfrak{P}$

$$(pf, h_0) = (f, p^* h_0) = (f, h_0)$$

gilt, so ist $(pf, h_0) = 0$ für jedes $f \in \mathfrak{M}_0$ und alle $p \in \mathfrak{P}$. Die Linearkombinationen von je endlichvielen Punkten pf ($f \in \mathfrak{M}_0$, $p \in \mathfrak{P}$) liegen aber dicht in \mathfrak{R} (wegen a)). Daher gilt $(h, h_0) = 0$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$. Setzt man $h = h_0$, so ergibt sich $h_0 = 0$.

Satz 1 (Aussage \mathfrak{B}). Sei \mathfrak{T} eine beschränkte Gruppe in einem Hilbertraum \mathfrak{R} und es gebe eine Teilmenge \mathfrak{M} von \mathfrak{R} mit folgenden beiden Eigenschaften:

- a) \mathfrak{R} ist die abgeschlossene lineare invariante Hülle von \mathfrak{M} .
- b) $0 \in \mathfrak{S}(f)$ für jedes $f \in \mathfrak{M}$. Dabei ist

$$\mathfrak{S} = \left\{ S = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n t_r, t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{T} \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(h)$$

die abgeschlossene Hülle der Menge $\{Sh, S \in \mathfrak{S}\}$. Dann ist $0 \in \mathfrak{S}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$.

Beweis. Wir wenden das Lemma zweimal an.

I. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{T}$. Dann ist $\mathfrak{Q}(h) = \mathfrak{S}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$ und wir können $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ setzen. Aus dem Lemma folgt nun: 0 ist der *einzige Fixpunkt* bezüglich \mathfrak{T}^* in \mathfrak{R} .

Sei $\mathfrak{S}^* = \{S^*, S \in \mathfrak{S}\}$ und $\mathfrak{S}^*(h)$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{S^*h, S^* \in \mathfrak{S}^*\}$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$. Dann folgt aus dem Existenzsatz (§ 3, Satz 5): Für jedes $h \in \mathfrak{R}$ enthält $\mathfrak{S}^*(h)$ *mindestens einen Fixpunkt* bezüglich \mathfrak{T}^* . Also ist $0 \in \mathfrak{S}^*(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$.

II. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{T}^*$. Dann ist $\mathfrak{Q}(h) = \mathfrak{S}^*(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$ und wir können $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}_0$ setzen. Es ist $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{T}$. Aus dem Lemma folgt nun: 0 ist der *einzige Fixpunkt* bezüglich \mathfrak{T} in \mathfrak{R} .

Nach dem Existenzsatz enthält jedes $\mathfrak{S}(h)$ *mindestens einen Fixpunkt* bezüglich \mathfrak{T} . Also ist $0 \in \mathfrak{S}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{R}$.

Literatur.

- [1] G. BIRKHOFF: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **25** (1939), S. 625—627. — [2] F. RIESZ: Some mean ergodic theorems. Journal London Math. Soc. **8** (1938), S. 274—278. — [3] W. MAAK: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950. — [4] W. MAAK: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. Journal f. d. reine und angewandte Mathematik **190** (1952), S. 34—48. — [5] R. GODEMENT: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), S. 1—84. — [6] W. F. EBERLEIN: Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), S. 217—240. — [7] M. M. DAY: Means for the bounded functions and Ergodicity of the bounded representations of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), S. 276—291. — [8] B. v. SZ.-NAGY: Spektraldarstellung linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes. Berlin 1942.

(Eingegangen am 2. Mai 1954.)

Normal Families and Dimension Theory for Metric Spaces.

By

KIITI MORITA in Tokyo.

§ 1. Introduction.

As is well known the theory of normal families (Normalbereiche) which is due to W. HUREWICZ [3] simplifies greatly the deduction of fundamental theorems of dimension theory for separable metric spaces. Although this theory seems to make full use of separability, yet it is possible to generalize the theory of normal families to the case of non-separable metric spaces so that it may be applied to dimension theory for metric spaces.

We shall say that a family \mathfrak{M} of metric spaces is a normal family, if the following two conditions are satisfied:

a) If Y is a subspace of a space X and $X \in \mathfrak{M}$, then $Y \in \mathfrak{M}$.

b) If $\{A_\alpha\}$ is a locally countable closed covering of a space X and each subspace $A_\alpha \in \mathfrak{M}$, then $X \in \mathfrak{M}$;

where $\{A_\alpha\}$ is called locally countable if for each point p of X there exists a neighbourhood V of p such that V intersects only a countable number of sets of $\{A_\alpha\}$.

For any (normal) family \mathfrak{M} we shall define a new family \mathfrak{M}' of metric spaces as follows: A space X is a member of \mathfrak{M}' if for any pair of a closed subset F and an open subset G satisfying $F \subset G$ there exists an open set U such that

$$F \subset U \subset G, \mathfrak{B}(U) \in \mathfrak{M},$$

where $\mathfrak{B}(U)$ means the boundary of a set U : $\mathfrak{B}(U) = \bar{U} - U$.

As is easily seen, these definitions are equivalent to the original definitions of HUREWICZ so far as separable metric spaces are concerned. Our main theorems concerning normal families are as follows: (1) If \mathfrak{M} is a normal family, so is \mathfrak{M}' and (2) a space X belongs to \mathfrak{M}' if and only if there exist two subspaces Y and Z such that $X = Y \cup Z$, $Y \in \mathfrak{M}$ and $\dim Z \leq 0$.

We proceed to the notion of dimension. We put $\text{ind dim } X = -1$ if X is the empty set, and define inductively $\text{ind dim } X \leq n$ for $n \geq 0$ by the requirement that for any pair of a closed subset F and an open subset G with $F \subset G$ there exist an open set U such that

$$F \subset U \subset G, \text{ ind dim } \mathfrak{B}(U) \leq n - 1.$$

If we take as \mathfrak{M} the family consisting of the empty set alone, then we obtain the notion of the inductive dimension defined above as follows: $\text{ind dim } X \leq n$ if $X \in \mathfrak{M}^{(n+1)}$, where $\mathfrak{M}^{(k+1)} = (\mathfrak{M}^{(k)})'$, $k = 1, 2, \dots$. Thus the theorems on normal families are applicable to this case and we have the sum

and decomposition theorems of dimension theory for metric spaces as usual (§ 5). The notion of rational dimension may also be introduced (§ 6).

There is another definition of dimension known as the LEBESGUE dimension. We write $\dim X \leq n$ if for any finite open covering of X there exists an open refinement of order $\leq n + 1$. By extending the method previously developed by the author ([5], [6]) the equivalence of the LEBESGUE dimension and the inductive dimension is proved for metric spaces (§ 8). The decomposition theorem is obtained also by this method in a general form. However, to prove the product theorem it seems convenient to utilize the notion of inductive dimension (§ 7).

In § 10 it will be shown that any zero-dimensional space can be imbedded in a generalized BAIRE's zero-dimensional space which is homeomorphic to the topological product of a countable number of discrete spaces.

Thus for the dimension of metric spaces we can establish an analogous theory as in the case of separable metric spaces.

Finally it will be shown that the LEBESGUE dimension and the inductive dimension due to MENGER-URYSOHN are equivalent for those metric spaces which can be expressed as a countable sum of closed subspaces with the star-finite property.

All spaces considered in the present paper will be assumed to be metric spaces unless the contrary is explicitly stated.

§ 2. A Fundamental Lemma.

Lemma 2.1. The conditions a) and b) for \mathfrak{M} to be a normal family (cf. § 1) are equivalent to a) and b)', b)'':

b)' If $\{A_i\}$ is a countable closed covering of X and each $A_i \in \mathfrak{M}$, then $X \in \mathfrak{M}$.

b)'' If $\{A_\alpha\}$ is a locally finite closed covering of X and each $A_\alpha \in \mathfrak{M}$, then $X \in \mathfrak{M}$.

Proof. Since it is obvious that b) implies b)' and b)'', we have only to prove that a), b)' and b)'' imply b). Let $\{A_\alpha\}$ be a locally countable closed covering of a space X . Then for each point p of X there exists a neighbourhood $V(p)$ of p such that $V(p)$ intersects only a countable number of sets of $\{A_\alpha\}$. Therefore by a theorem of A. H. STONE [8] we can find a locally finite open covering $\{G_\gamma\}$ such that each \bar{G}_γ intersects a countable number of sets of $\{A_\alpha\}$. By a) and b)' we see that each $\bar{G}_\gamma \in \mathfrak{M}$. Hence we have $X \in \mathfrak{M}$ by b)''. \square

Lemma 2.2. Let X be a space and $\{\mathfrak{U}_i\}$ a countable collection of locally finite systems \mathfrak{U}_i of open sets in X such that $\mathfrak{U} = \{U | U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X . Let \mathfrak{M} be a normal family (cf. § 1). If $\mathfrak{B}(U)$ belongs to \mathfrak{M} for each open set U of \mathfrak{U} , then X belongs to \mathfrak{M}' ; that is, for any pair of a closed set F and an open set G with $F \subset G$ there exists an open set V such that

$$F \subset V \subset G, \quad \mathfrak{B}(V) \in \mathfrak{M}.$$

Proof. Let F and G be as above. Then by the normality of X there exists an open set L such that $F \subset L, \bar{L} \subset G$. Let $\mathfrak{U}_i = \{U(i, \alpha) | \alpha \in \Omega_i\}$. For each

point p of X we can find an open set U of \mathfrak{U} such that U contains p and

$$(1) \quad \bar{U} \subset G, \text{ in case } p \in \bar{L},$$

$$(2) \quad \bar{U} \cap \bar{L} = 0, \text{ in case } p \notin \bar{L},$$

and we denote such U by $U(i(p), \alpha(p))$. Let H_j be the union of those $U(i(p), \alpha(p))$ for which $i(p) = j$ and $p \in \bar{L}$, and K_j the union of those $U(i(p), \alpha(p))$ for which $i(p) = j$ and $p \notin \bar{L}$. Then H_j and K_j are open sets and we have

$$\mathfrak{B}(H_j) \subset \cup \{ \mathfrak{B}(U(i(p), \alpha(p))) \mid i(p) = j, p \in \bar{L} \},$$

$$\mathfrak{B}(K_j) \subset \cup \{ \mathfrak{B}(U(i(p), \alpha(p))) \mid i(p) = j, p \notin \bar{L} \},$$

since \mathfrak{U}_j is locally finite. From the properties a) and b)' it follows that

$$(3) \quad \mathfrak{B}(H_j) \in \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{B}(K_j) \in \mathfrak{M}.$$

Now let us put

$$\begin{aligned} P_1 &= H_1, \quad Q_1 = K_1 - \bar{H}_1, \\ P_i &= H_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j, \quad Q_i = K_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} H_j, \quad i = 2, 3, \dots; \\ P &= \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \quad Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i. \end{aligned}$$

Then we have

$$(4) \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{P}_j \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{Q}_j \right),$$

$$(5) \quad P \cap Q = 0, \quad \bar{P}_j \subset G, \quad Q \cap \bar{L} = 0,$$

$$(6) \quad \mathfrak{B}(P_j) \in \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{B}(Q_j) \in \mathfrak{M}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

(5) follows from (1) and (2), and (6) follows from (3). Finally we put

$$V = X - \bar{Q}.$$

Then, since $Q \cap \bar{L} = 0$ by (5) and \bar{L} is open, we have $\bar{Q} \cap \bar{L} = 0$ and hence $F \subset L \subset V$. On the other hand, since $V = X - \bar{Q} \subset X - \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{Q}_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{P}_i \subset G$, we have $V \subset G$ and hence

$$(7) \quad F \subset V \subset G.$$

Since $\bar{P}_i = P_i \cup \mathfrak{B}(P_i)$, $\bar{Q}_i = Q_i \cup \mathfrak{B}(Q_i)$, we have from (4)

$$(8) \quad X = P \cup Q \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}(P_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}(Q_i) \right).$$

From (5) and the openness of P it follows that $P \cap \bar{Q} = 0$. Hence $P \cap \mathfrak{B}(Q) = 0$. Therefore we have

$$\mathfrak{B}(Q) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}(P_i) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}(Q_i) \right)$$

by considering the intersection of $\mathfrak{B}(Q)$ with both sides of (8). From the properties a) and b)' we obtain $\mathfrak{B}(Q) \in \mathfrak{M}$ and hence

$$(9) \quad \mathfrak{B}(V) \in \mathfrak{M}.$$

Thus the lemma is proved by (7) and (9).

§ 3. Zero-dimensional Spaces.

If for any pair of a closed set F and an open set G with $F \subset G$ there exists an open set U such that $F \subset U \subset G$, $U = \bar{U}$, we have $\text{ind dim } X \leq 0$ by definition. The following lemma is well known and is easily proved (e.g. cf. [4]).

Lemma 3.1. The two statements $\text{dim } X \leq 0$ and $\text{ind dim } X \leq 0$ are equivalent.

Lemma 3.2. Let A be a subset of a space X . If $\text{dim } A \leq 0$, then for any pair of a closed set F and an open set G with $F \subset G$ there exists an open set V such that

$$F \subset V \subset G, \quad \mathfrak{B}(V) \cap A = 0.$$

Proof. We take open sets L and M such that $F \subset L$, $\bar{L} \subset M$, $\bar{M} \subset G$. Since $\text{dim } A \leq 0$ there exists an open and closed set U_0 of the subspace A such that $\bar{L} \cap A \subset U_0 \subset M \cap A$. Then $F \cup U_0$ and $(X - G) \cup (A - U_0)$ are easily shown to be separated sets. Since X is completely normal, there exists an open set V of X such that $F \cup U_0 \subset V$, $\bar{V} \cap \{(X - G) \cup (A - U_0)\} = 0$, and consequently we have $F \subset V \subset G$, $(\bar{V} - V) \cap A = 0$. This completes the proof.

Applying Lemma 2.2 to the case in which \mathfrak{M} is the family consisting of the empty set alone, we obtain

Lemma 3.3. Let $\{\mathfrak{U}_i\}$ be a countable collection of locally finite systems \mathfrak{U}_i of open sets of a space X such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X and each set U of \mathfrak{U} is open and closed. Then we have $\text{dim } X \leq 0$.

Lemma 3.4. Let A be a subset of a space X and $\text{dim } A \leq 0$. Then there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{U}_i such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of X and $(\bar{U} - U) \cap A = 0$ for each $U \in \mathfrak{U}$.

This is a special case of Lemma 7.1 in § 7.

Theorem 3.5. The set \mathfrak{M}_0 of those spaces X for which $\text{dim } X \leq 0$ forms a normal family (cf. § 1).

The conditions a), b)' and b)'' for \mathfrak{M}_0 are proved respectively in [2], [2] (cf. also [4], [5]) and [6]. But for our case a) follows immediately from Lemmas 3.3 and 3.4. To give another proof of b)'' let $\{A_\alpha\}$ be a locally finite closed covering of X and let $\text{dim } A_\alpha \leq 0$ for each α . Then by b)' there exists a neighbourhood of dimension ≤ 0 for each point of X . By a theorem of A. H. STONE we see the existence of an open basis with the properties mentioned in Lemma 3.3 and hence we have $\text{dim } X \leq 0$.

§ 4. Main Theorems on Normal Families.

Let \mathfrak{M} be a normal family (cf. § 1). We shall first prove

Lemma 4.1. If a space X belongs to \mathfrak{M}' (as for the definition of \mathfrak{M}' cf. § 1), then there exist two subspaces Y and Z such that $X = Y \cup Z$, $Y \in \mathfrak{M}$, $\text{dim } Z \leq 0$.

Proof. By a theorem of A. H. STONE [8] there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{V}_i of X such that $\{S(p, \mathfrak{V}_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p , where $S(p, \mathfrak{V}_i)$ denotes the union

of all the sets of \mathfrak{B}_i containing p . Let $\mathfrak{B}_i = \{V_{i\alpha} | \alpha \in \Omega_i\}$. Then there exists a closed covering $\{C_{i\alpha} | \alpha \in \Omega_i\}$ such that $C_{i\alpha} \subset V_{i\alpha}$. By the assumption that $X \in \mathfrak{M}'$ there exist open sets $U_{i\alpha}$ such that

$$C_{i\alpha} \subset U_{i\alpha} \subset V_{i\alpha}, \quad \mathfrak{B}(U_{i\alpha}) \in \mathfrak{M}.$$

Then each $\mathfrak{U}_i = \{U_{i\alpha} | \alpha \in \Omega_i\}$ is a locally finite open covering and $\{U | U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of X . Let us put

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in \Omega_i} \mathfrak{B}(U_{i\alpha}), \quad Z = X - Y.$$

Then by condition b) for \mathfrak{M} we have $Y \in \mathfrak{M}$. Since $\mathfrak{B}_i = \{U_{i\alpha} \cap Z | \alpha \in \Omega_i\}$ is a locally finite open covering of Z and $\{W | W \in \mathfrak{B}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is an open basis of Z and

$$\mathfrak{B}_i(U_{i\alpha} \cap Z) \subset \mathfrak{B}(U_{i\alpha}) \cap Z = 0,$$

where $\mathfrak{B}_i(W)$ means the boundary of W in the subspace Z , we have $\dim Z \leq 0$ by Lemma 3.3.

Lemma 4.2. If Y and Z are subspaces of a space X such that $X = Y \cup Z$, $Y \in \mathfrak{M}$, $\dim Z \leq 0$, then $X \in \mathfrak{M}'$.

Proof. For any pair of a closed set F and an open set G satisfying $F \subset G$ there exists, by Lemma 3.2, an open set V such that $F \subset V \subset G$, $\mathfrak{B}(V) \cap Z = 0$. Hence we have $\mathfrak{B}(V) \subset Y$. By condition a) for \mathfrak{M} we see that $\mathfrak{B}(V) \in \mathfrak{M}$. This shows that $X \in \mathfrak{M}'$.

Thus we have proved the following theorem.

Theorem 4.3. Let \mathfrak{M} be a normal family. Then a space X belongs to \mathfrak{M}' if and only if there exist subspaces Y and Z such that

$$X = Y \cup Z, \quad Y \in \mathfrak{M}, \quad \dim Z \leq 0.$$

Theorem 4.4. If \mathfrak{M} is a normal family, then \mathfrak{M}' is also a normal family.

Proof. Let $X \in \mathfrak{M}'$ and $Y \subset X$. By Lemma 4.1 there exist subsets A and C such that $X = A \cup C$, $A \in \mathfrak{M}$ and $\dim C \leq 0$. Then we have $Y = (A \cap Y) \cup (C \cap Y)$, $A \cap Y \in \mathfrak{M}$ and $\dim(C \cap Y) \leq 0$ from Theorem 3.5 and condition a) for \mathfrak{M} . This shows by Lemma 4.2 that $Y \in \mathfrak{M}'$. Thus condition a) is proved for \mathfrak{M}' .

To prove condition b)'' let $\{A_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ be a locally finite closed covering of a space X and let $A_\alpha \in \mathfrak{M}'$ for each $\alpha \in \Omega$. We shall assume that the set of indices α is well-ordered and put $K_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ for each α . Then K_α is an F_σ -set. We decompose K_α into the sum of two sets L_α and M_α such that

$$L_\alpha \cap M_\alpha = 0, \quad L_\alpha \in \mathfrak{M}, \quad \dim M_\alpha \leq 0$$

and put

$$L = \bigcup_{\alpha} L_\alpha, \quad M = \bigcup_{\alpha} M_\alpha.$$

Then we have $L \in \mathfrak{M}$ and $\dim M \leq 0$. Because $L_\alpha = L \cap K_\alpha$ and $M_\alpha = M \cap K_\alpha$ and hence L_α, M_α are F_σ -sets of L and M respectively, and consequently there exist closed sets $L_{\alpha i}, M_{\alpha i}$ of L and M respectively such that $L_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_{\alpha i}$,

$M_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{\alpha i}$. Then $\{L_{\alpha i} \mid \alpha \in \Omega, i = 1, 2, \dots\}$ and $\{M_{\alpha i} \mid \alpha \in \Omega, i = 1, 2, \dots\}$ are locally countable closed coverings of L and M respectively. Thus by Theorem 3.5 and condition b) for \mathfrak{M} we see that $L \in \mathfrak{M}$ and $\dim M \leq 0$. Therefore by Lemma 4.2 we have $X \in \mathfrak{M}'$. The condition b)' is proved similarly. Thus we have proved the theorem by Lemma 2.1.

§ 5. The Sum and Decomposition Theorems.

Let \mathfrak{Q} be the family consisting of the empty set alone. Then $\text{ind dim } X \leq n$ if and only if $X \in \mathfrak{Q}^{(n+1)}$, where $\mathfrak{Q}^{(k+1)} = (\mathfrak{Q}^{(k)})'$, $k = 1, 2, \dots$. Hence we have the following theorems by Theorems 4.3 and 4.4 and Lemma 3.1. It is to be noted that as will be proved in § 8, the statements $\text{ind dim } X \leq n$ and $\dim X \leq n$ are equivalent.

Theorem 5.1. If Y is a subspace of a space X and $\text{ind dim } X \leq n$, then $\text{ind dim } Y \leq n$.

Theorem 5.2. If $\{A_\alpha\}$ is a locally countable closed covering of a space X and $\text{ind dim } A_\alpha \leq n$ for each α , then we have $\text{ind dim } X \leq n$.

Theorem 5.3. Let X be a space. Then $\text{ind dim } X \leq n$ if and only if X is expressed as the sum of $n+1$ subspaces of dimension ≤ 0 .

Theorem 5.4. Let $X = Y \cup Z$. If $\text{ind dim } Y \leq m$ and $\text{ind dim } Z \leq n$, then we have $\text{ind dim } X \leq m + n + 1$.

This follows immediately from Theorem 5.3.

Theorem 5.5. Let A be a subset of a space X . If $\text{ind dim } A \leq n$, then for any pair of a closed set F and an open set G satisfying $F \subset G$ there exists an open set V such that

$$F \subset V \subset G, \quad \text{ind dim } \mathfrak{B}(V) \cap A \leq n - 1.$$

Proof. For the case $n = 0$ the theorem is reduced to Lemma 3.2. Let $n > 0$. By Theorem 5.3 there exist subsets P and Q of A such that $A = P \cup Q$, $\text{ind dim } P \leq n - 1$, $\text{ind dim } Q \leq 0$. From Lemma 3.2 it follows that there exists an open set V such that $F \subset V \subset G$, $\mathfrak{B}(V) \cap Q = 0$. Hence we have $\text{ind dim } \mathfrak{B}(V) \cap A \leq n - 1$, since $\mathfrak{B}(V) \cap A \subset P$.

We shall now prove a generalization of TUMARKIN's theorem.

Theorem 5.6. Let A be a subset of a space X and let $\text{ind dim } A = n$. Then there exists a G_δ -set H such that

$$A \subset H, \quad \text{ind dim } A = \text{ind dim } H.$$

Proof. 1) In case $n = 0$ there exists by Lemma 3.4 a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{U}_i such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X and $\mathfrak{B}(U) \cap A = 0$ for each $U \in \mathfrak{U}$. If we put $H = X - \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \mathfrak{B}(U)$, then H is a G_δ -set. If we put $\mathfrak{W} = \{U \cap H \mid U \in \mathfrak{U}\}$, then \mathfrak{W} is a basis of open sets of H and $\mathfrak{B}_H(U \cap H) \subset \mathfrak{B}(U) \cap H = 0$. Hence we have $\dim H \leq 0$ by Lemma 3.3.

2) In case $n > 0$, by Theorem 5.3 there exist $n+1$ subsets A_0, A_1, \dots, A_n such that $A = \bigcup_{i=0}^n A_i$ and $\dim A_i \leq 0$ for each i . By 1) there exist G_δ -sets H_i

such that $A_i \subset H_i$, $\dim H_i \leq 0$. If we put $H = \bigcup_{i=0}^n H_i$, then H is a G_δ -set of X and we have $A \subset H$, $\text{ind } H = n$.

§ 6. The Rational Dimension.

A space is said to be locally countable if for each point of the space there exists a neighbourhood which consists of a countable number of points. Let us denote by \mathfrak{R} the family of all spaces X such that X is a countable sum of closed subspaces which are locally countable.

Theorem 6.1. \mathfrak{R} is a normal family.

Proof. Conditions a) and b)' are obvious. To prove b)'' let $\{A_\alpha\}$ be a locally finite closed covering of X and let $A_\alpha \in \mathfrak{R}$ for each α . Then there exist locally countable closed sets $A_{\alpha i}$ such that $A_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\alpha i}$. Clearly $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha i}$ is locally countable for each i . Thus we have $X \in \mathfrak{R}$. This completes the proof by Lemma 2.1.

We shall say that the rational dimension of a space X is at most n if $X \in \mathfrak{R}^{(n)}$, where $n \geq 0$ and $\mathfrak{R}^{(0)} = \mathfrak{R}$. The theorems corresponding to those of § 5 except Theorems 5.6 and 5.3 are valid for rational dimension. Corresponding to Theorem 5.3 we have

Theorem 6.2. The rational dimension of a space X is at most n if and only if X is the sum of $n+1$ sets of dimension ≤ 0 , at least one of which is a countable sum of its closed sets which are locally countable.

If a separable space is locally countable, it is necessarily countable. Therefore our notion of rational dimension coincides with the original notion of MENGER for separable metric spaces.

§ 7. The Product Theorem.

Lemma 7.1. Let A be a subset of a space X and let $\text{ind } \dim A \leq n$. Then there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{U}_i such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X and $\text{ind } \dim \mathfrak{B}(U) \cap A \leq n-1$ for each $U \in \mathfrak{U}$.

Proof. By a theorem of A. H. STONE there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{V}_i such that $\{S(p, \mathfrak{V}_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p of X . Then for every i there exists a closed covering $\{C_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i\}$ such that $C_{i\alpha} \subset V_{i\alpha}$, where $\mathfrak{V}_i = \{V_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i\}$.

By Theorem 5.5 there exist open sets $U_{i\alpha}$ such that

$$C_{i\alpha} \subset U_{i\alpha} \subset V_{i\alpha}, \quad \text{ind } \dim \mathfrak{B}(U_{i\alpha}) \cap A \leq n-1.$$

Then the covering $\mathfrak{U}_i = \{U_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i\}$ is clearly locally finite and $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of X , since \mathfrak{U}_i is a refinement of \mathfrak{V}_i and hence $\{S(p, \mathfrak{U}_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p of X .

Theorem 7.2. Let X and Y be two spaces. Then we have

$$\text{ind } \dim (X \times Y) \leq \text{ind } \dim X + \text{ind } \dim Y.$$

Proof. We shall carry out the proof by induction with respect to $k = \text{ind dim } X + \text{ind dim } Y$. In case $k = -1$, we have either $\text{ind dim } X = -1$ or $\text{ind dim } Y = -1$ and the theorem clearly holds. Now we assume that the theorem holds for the case when $\text{ind dim } X + \text{ind dim } Y < k$. Let $\text{ind dim } X = m$, $\text{ind dim } Y = n$ and $k = m + n$. Then by Lemma 7.1 there exist two countable collections of locally finite open coverings \mathcal{U}_i and \mathcal{V}_i of X and Y respectively such that $\mathcal{U} = \{U \mid U \in \mathcal{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ and $\mathcal{V} = \{V \mid V \in \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \dots\}$ are bases for open sets of X and Y respectively, and

$$\text{ind dim } \mathfrak{B}(U) \leq m - 1, \quad \text{ind dim } \mathfrak{B}(V) \leq n - 1$$

for each $U \in \mathcal{U}$ and each $V \in \mathcal{V}$.

We put

$$\mathfrak{B}_{ij} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}_i, V \in \mathcal{V}_j\}.$$

Then \mathfrak{B}_{ij} is a locally finite open covering of the product space $X \times Y$ and $\mathfrak{B} = \{W \mid W \in \mathfrak{B}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of $X \times Y$. Now we have

$$\mathfrak{B}(U \times V) = \mathfrak{B}(U) \times \overline{V} \cup \overline{U} \times \mathfrak{B}(V)$$

and, since each summand is closed and has inductive dimension $\leq m + n - 1$ by the assumption of induction, we see that $\text{ind dim } \mathfrak{B}(U \times V) \leq m + n - 1$. Since the family of all spaces Z for which $\text{ind dim } Z \leq m + n - 1$ forms a normal family (§ 5), we have $\text{ind dim } (X \times Y) \leq m + n$ by virtue of Lemma 2.2. This completes our proof.

Remark. If Y is a locally finite polytope, the equality sign holds in Theorem 7.2 ([7]).

Theorem 7.3. The topological product of a countable number of spaces of dimension ≤ 0 has dimension ≤ 0 .

Proof may be carried out similarly as for the above theorem.

§ 8. The Equivalence of the LEBESGUE Dimension and the Inductive Dimension.

In a previous paper [6] we have proved the following important theorem.

Theorem 8.1. Let $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ be a locally finite system of open sets in a space X and $\{F_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ a system of closed sets such that $F_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$. If the LEBESGUE dimension of a closed subset A of X is not greater than n , then there exist two systems $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ and $\{V_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ of open sets of X such that

- 1) $F_\alpha \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$,
- 2) the order of $\{(\overline{U_\alpha} - V_\alpha) \cap A \mid \alpha \in \Omega\} \leq n$.

Remark. The theorem is proved for any normal spaces and the local-finiteness of $\{G_\alpha\}$ may be replaced by the local-finiteness of $\{G_\alpha - F_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$.

For the sake of convenience we shall introduce the following notation. We shall write $D(X) \leq n$ if there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathcal{U}_i of X such that $\mathcal{U} = \{U \mid U \in \mathcal{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X and the order of $\{\overline{U} - U \mid U \in \mathcal{U}\}$ is not greater than n .

Lemma 8.2. Let $D(X) \leq n$ and let \mathcal{U} be an open basis of X having the property described in the definition of " $D(X) \leq n$ ". Then we have $D(\bar{U} - U) \leq n - 1$ for each $U \in \mathcal{U}$ or more generally, $D\left[\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{B}(U_j)\right] \leq n - r$ for each finite system of distinct sets U_1, \dots, U_r of \mathcal{U} .

Proof. Let $A = \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{B}(U_j)$. Then $\mathfrak{B}_i = \{U' \cap A \mid U' \in \mathcal{U}_i\}$ is a locally finite open covering of the subspace A where we exclude the empty set from \mathfrak{B}_i , and $\mathfrak{W} = \{W \mid W \in \mathfrak{B}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is an open basis of A . Since $\mathfrak{B}_A(U' \cup A) \subset \mathfrak{B}(U') \cap A \subset \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{B}(U_j) \cap \mathfrak{B}(U')$, the order of $\{\mathfrak{B}_A(W) \mid W \in \mathfrak{W}\}$ is not greater than $n - r$. This proves that $D(A) \leq n - r$.

Lemma 8.3. If $\dim X \leq n$, then we have $D(X) \leq n$.

Proof (cf. [6]). There exists a countable collection of locally finite open coverings $\mathfrak{B}_i = \{W_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i\}$ such that $\{S(p, \mathfrak{B}_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p of X . Then for each i we can find a closed covering $\{C_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i\}$ such that $C_{i\alpha} \subset W_{i\alpha}$.

Now apply Theorem 8.1 to $\{W_{i\alpha}, C_{i\alpha}\}$ and we have open sets $U_{1\alpha}^1, V_{1\alpha}^1$ ($\alpha \in \Omega_1$) such that

$$(10) \quad C_{1\alpha} \subset U_{1\alpha}^1, \quad \bar{U}_{1\alpha}^1 \subset V_{1\alpha}^1 \subset W_{1\alpha},$$

$$(11) \quad \text{the order of } \{\bar{V}_{1\alpha}^1 - U_{1\alpha}^1 \mid \alpha \in \Omega_1\} \leq n.$$

By an inductive process we can construct successively open sets $U_{k\alpha}^i, V_{k\alpha}^i$, $k = 1, 2, \dots, i$ such that

$$(12) \quad C_{i\alpha} \subset U_{i\alpha}^i, \quad \bar{U}_{i\alpha}^i \subset V_{i\alpha}^i \subset W_{i\alpha}, \quad \alpha \in \Omega_i,$$

$$(13) \quad \bar{U}_{k\alpha}^{i-1} \subset U_{k\alpha}^i, \quad \bar{U}_{k\alpha}^i \subset V_{k\alpha}^i \subset V_{k\alpha}^{i-1}, \quad \alpha \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, i-1,$$

$$(14) \quad \text{the order of } \{\bar{V}_{k\alpha}^i - U_{k\alpha}^i \mid \alpha \in \Omega_k, k = 1, 2, \dots, i\} \leq n.$$

If we put

$$U_{k\alpha} = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_{k\alpha}^i, \quad \alpha \in \Omega_k,$$

then we see easily that

$$(15) \quad C_{k\alpha} \subset U_{k\alpha} \subset W_{k\alpha},$$

$$(16) \quad \text{the order of } \{\mathfrak{B}(U_{k\alpha}) \mid \alpha \in \Omega_k, k = 1, 2, \dots\} \leq n.$$

Thus we have $D(X) \leq n$.

Lemma 8.4. If $D(X) \leq n$, then we have $\text{ind dim } X \leq n$.

Proof. In case $n = 0$ our lemma is reduced to Lemma 3.3. Now we shall assume that the lemma holds for $n - 1$. Let $D(X) \leq n$. Then there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathcal{U}_i of X such that $\mathcal{U} = \{U \mid U \in \mathcal{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of X and the order of $\{\mathfrak{B}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ is not greater than n . By Lemma 8.2 we have $D(\mathfrak{B}(U)) \leq n - 1$ for each $U \in \mathcal{U}$. From the assumption of induction it follows that $\text{ind dim } \mathfrak{B}(U) \leq n - 1$. Since the family of all spaces Y for which $\text{ind dim } Y \leq n - 1$ is a normal family as was shown in § 5, we have $\text{ind dim } X \leq n$ by Lemma 2.2.

Lemma 8.5. If $\text{ind dim } X \leq n$, then $\text{dim } X \leq n$.

This lemma is well known and holds for any normal space X . However, so far as metric spaces are concerned Lemma 8.5 is proved by Theorem 5.3 and Lemma 3.1 as usual (cf. [4]).

Summarizing these results we obtain the following theorem.

Theorem 8.6. The two statements $\text{dim } X \leq n$ and $\text{ind dim } X \leq n$ are equivalent.

Thus we may write "dim" instead of "ind dim" in the theorems of §§ 5 and 7. At the same time we have proved

Theorem 8.7. Let X be a space. Then $\text{dim } X \leq n$ if and only if $D(X) \leq n$.

Remark. Since the family of those spaces for which $\text{dim } X \leq n-1$ is shown to be a normal family (cf. [6]), we can prove Theorem 8.7 and hence Theorem 8.6 without using the results of § 5.

§ 9. Generalizations of the Decomposition and Covering Theorems.

Theorem 9.1. Let A_i , $i = 1, 2, \dots$ be a countable number of finite dimensional closed sets of a space X . Let $\{G_{i\gamma} | \gamma \in \Gamma_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ be a countable number of locally finite systems of open sets and $\{F_{i\gamma} | \gamma \in \Gamma_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ systems of closed sets such that $F_{i\gamma} \subset G_{i\gamma}$. Then there exists a system of open sets $H_{i\gamma}$, $\gamma \in \Gamma_i$, $i = 1, 2, \dots$ such that

$$1) F_{i\gamma} \subset H_{i\gamma} \subset G_{i\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$2) \dim \left[\bigcap_{v=1}^r \mathcal{B}(H_{i_v \gamma_v}) \cap A_j \right] \leq \dim A_j - r \text{ for any system of } r \text{ distinct pairs } (i_v, \gamma_v), v = 1, 2, \dots, r.$$

Proof. There exists a countable collection of locally finite open coverings $\mathfrak{W}_i = \{W_{i\alpha} | \alpha \in \Omega_i\}$ such that $\{S(p, \mathfrak{W}_i) | i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of neighbourhoods at each point p of X . Then there is for each i a closed covering $\{C_{i\alpha} | \alpha \in \Omega_i\}$ such that $C_{i\alpha} \subset W_{i\alpha}$. By repeated applications of Theorem 8.1, we can construct successively those open sets $H_{k\gamma}^i, L_{k\gamma}^i, U_{k\alpha}^i, V_{k\alpha}^i$ ($k = 1, 2, \dots, i$; $\gamma \in \Gamma_k$, $\alpha \in \Omega_k$) which satisfy the following conditions (17), (18), (19) as well as (12), (13) in § 8:

$$(17) \quad F_{i\gamma} \subset H_{i\gamma}^i, H_{i\gamma}^i \subset L_{i\gamma}^i \subset G_{i\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma_i,$$

$$(18) \quad H_{k\gamma}^{i-1} \subset H_{k\gamma}^i, H_{k\gamma}^i \subset L_{k\gamma}^i \subset L_{k\gamma}^{i-1}, \quad \gamma \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, i-1,$$

$$(19) \text{ the order of } \{(\bar{L}_{k\gamma}^i - H_{k\gamma}^i) \cap A_j, (\bar{V}_{k\alpha}^i - U_{k\alpha}^i) \cap A_j | \gamma \in \Gamma_k, \alpha \in \Omega_k, k = 1, 2, \dots, i\} \leq \dim A_j \text{ for } j = 1, 2, \dots, i.$$

If we put

$$H_{k\gamma} = \bigcup_{i=k}^{\infty} H_{k\gamma}^i, \quad U_{k\alpha} = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_{k\alpha}^i,$$

then each system $\{\mathcal{B}(H_{i\gamma}) \cap A_j, \mathcal{B}(U_{i\alpha}) \cap A_j | \gamma \in \Gamma_i, \alpha \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots\}$ has

order $\leq \dim A_j$ for $j = 1, 2, \dots$. Since $\{U_{i\alpha} \mid \alpha \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X , we have

$$D \left[\bigcap_{r=1}^r \mathfrak{B}(H_{i_r \gamma_r}) \cap A_j \right] \leq \dim A_j - r$$

for r distinct pairs (i_r, γ_r) , $r = 1, 2, \dots, r$. Therefore our theorem 9.1 is proved by Theorem 8.7.

In the above proof the following theorem is included.

Theorem 9.2. Let A_i , $i = 1, 2, \dots$ be a countable number of finite dimensional closed sets of a space X . Then there exists a countable collection of locally finite open coverings \mathfrak{U}_i of X such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis for open sets of X and

$$\dim \left[\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{B}(U_j) \cap A_i \right] \leq \dim A_i - r$$

for r distinct sets U_1, \dots, U_r of \mathfrak{U} .

Now let us put, by using the open basis \mathfrak{U} with the property in Theorem 9.2,

$$P_r = K_r - K_{r+1}, \quad K_r = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{B}(U_i), \quad r = 0, 1, \dots; \quad K_0 = X,$$

$$P_\infty = \bigcap_{r=1}^{\infty} K_r,$$

where the sum is taken over all systems of r distinct sets U_1, \dots, U_r of \mathfrak{U} .

Then we have $D \left[\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{B}(U_i) - K_{r+1} \right] \leq 0$ and hence $\dim P_r \leq 0$ by Lemma 3.3 and Theorem 3.5. Thus we obtain the following theorem which is a generalization of the decomposition theorem 5.3.

Theorem 9.3. Let A_i , $i = 1, 2, \dots$, be a countable number of finite dimensional closed sets of a space X . Then there exist a countable number of sets P_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, of dimension ≤ 0 and a set P_∞ such that

$$1) \quad X = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i \cup P_\infty,$$

$$2) \quad A_j = \bigcup_{i=0}^{n_j} (A_j \cap P_i), \quad \text{where } n_j = \dim A_j;$$

the set P_∞ is not necessarily zero-dimensional.

From Theorem 9.1 we obtain also the following theorem.

Theorem 9.4. Let A_i , $i = 1, 2, \dots$ be a countable number of finite dimensional closed sets of a space X and $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ a locally finite open covering of X . Then there exists a closed covering $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ which consists of the closures of open sets H_α and satisfies the conditions:

$$1) \quad H_\alpha \subset G_\alpha, \quad \alpha \in \Omega,$$

$$2) \quad \dim \left[\bigcap_{i=0}^r H_{\alpha_i} \cap A_j \right] \leq \dim A_j - r \text{ for any } r+1 \text{ distinct indices } \alpha_0, \dots, \alpha_r \text{ of } \Omega.$$

§ 10. An Imbedding Theorem for Zero-dimensional Spaces.

Let Ω be a non-empty abstract set. For any two sequences of elements from Ω : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, $\alpha_i, \beta_i \in \Omega$, we define $p(\alpha, \beta)$ as follows.

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{k} \text{ if } \alpha_i = \beta_i \text{ for } i < k \text{ and } \alpha_k \neq \beta_k; \quad p(\alpha, \alpha) = 0.$$

Then the set of all sequences of elements from Ω turns out to be a metric space which shall be denoted by $N(\Omega)$. We shall call $N(\Omega)$ a generalized BAIER's zero-dimensional space, since $N(\Omega)$ is known as BAIER's zero-dimensional space in case Ω is the set of all natural numbers.

Lemma 10.1. $N(\Omega)$ is a complete metric space of dimension zero.

Proof. It follows from Theorem 7.3 that $\dim N(\Omega) \leq 0$, since $N(\Omega)$ is homeomorphic to the product of a countable number of spaces each of which is a discrete space whose points are elements of Ω . The completeness is easily verified.

Theorem 10.2. Let X be a space of dimension zero. If Ω is a set whose cardinal number is not less than the cardinal number of a basis of open sets of X , then X is homeomorphic to a subset of $N(\Omega)$.

Proof. Let $\dim X = 0$. Then there exists a countable collection of open coverings \mathfrak{U}_n of X such that $\mathfrak{U} = \{U \mid U \in \mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots\}$ is a basis of open sets of X and

$$(20) \quad \mathfrak{U}_n = \{U(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$(21) \quad U(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cap U(\beta_1, \dots, \beta_n) = \emptyset \text{ for } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

$$(22) \quad U(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \bigcup_{\beta \in \Omega} U(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta)$$

where it is not assumed that $U(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ are not empty.

For every point p of X and any n there exists only one non-empty set $U(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ of \mathfrak{U}_n which contains p . Hence we can define a mapping of X into $N(\Omega)$ by

$$f(p) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

where $p \in U(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ for $n = 1, 2, \dots$. It is easily shown that f is a topological mapping of X onto a subset of $N(\Omega)$. Thus we have the theorem.

Theorem 10.2 is a corollary to the following theorem; its proof is left to the reader.

Theorem 10.3. A space with the star-finite property is homeomorphic to a subset of the product space $N(\Omega) \times I^\omega$, where I^ω denotes the fundamental parallelootope in HILBERT space and Ω is a set having the same property as in Theorem 10.2.

§ 11. The Inductive Dimension Due to Menger and Urysohn.

Menger's original definition of dimension is as follows. Ind $\dim^* X = -1$ if X is empty; for $n \geq 0$ ind $\dim^* X \leq n-1$ is inductively defined by the requirement that for any point p of X and its any neighbourhood U there exist a neighbourhood V such that $p \in V \subset U$, ind $\dim^* \mathfrak{B}(V) \leq n-1$. We

shall say that a space X is an S_σ -space if X is expressed as a countable sum of closed subspaces with the star-finite property. Then we have

Theorem 11.1. Let X be an S_σ -space. Then the three statements: $\dim X \leq n$, $\text{ind dim } X \leq n$ and $\text{ind dim}^* X \leq n$ are equivalent.

Proof. By assumption there exists a countable closed covering $\{A_i\}$ of X such that each A_i has the star-finite property. Let $\text{ind dim}^* X \leq n$. Then we have $\text{ind dim}^* A_i \leq n$ and hence $\dim A_i \leq n$ by a theorem in [6]. Therefore by the sum theorem we see that $\dim X \leq n$. This proves the theorem.

The minimal normal family which includes separable spaces is shown to be composed of all spaces X such that X is a countable sum of closed sets which are locally separable (cf. the proof of Theorem 6.1). A space of this type is called K -separable by G. H. BUTCHER [1]. Any K -separable space is an S_σ -space but not conversely; indeed $N(\Omega)$ defined in § 10 is an S_σ -space without being K -separable in case the cardinal number of Ω is not countable.

References.

- [1] G. H. BUTCHER: An extension of the sum theorem of dimension theory. *Duke Math. Jour.* 18, 859—874 (1951). — [2] E. ČECH: Sur la dimension des espaces parfaitement normaux. *Bull. Acad. Bohême* 33, 38—55 (1932). — [3] W. HUREWICZ: Normalbereiche und Dimensionstheorie. *Math. Ann.* 96, 736—764 (1927). — [4] W. HUREWICZ and H. WALLMAN: Dimension theory. Princeton 1941. — [5] K. MORITA: On the dimension of normal spaces I. *Jap. Jour. Math.* 20, 5—36 (1950). — [6] K. MORITA: On the dimension of normal spaces II. *Jour. Math. Soc. Japan* 2, 16—33 (1950). — [7] K. MORITA: On the dimension of product spaces. *Amer. Jour. Math.* 75, 205—223 (1953). — [8] A. H. STONE: Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 977—982 (1948).

(Eingegangen am 30. Mai 1954.)

Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes.

Von

HANFRIED LENZ in München.

Einleitung.

In zwei vorangegangenen Arbeiten^{1) 2)} wurden in die auf Grund einfacher Inzidenz- und Parallelenaxiome definierten projektiven und affinen Räume beliebiger Dimensionszahl $n > 2$ nach bekannten Vorbildern (s. die in BAG angegebene Literatur) Koordinaten eingeführt. Weitere Postulate über Polarität und Orthogonalität führten in Räumen endlicher Dimensionszahl (kurz Dimension) zur Einführung einer absoluten Polarität als wesentlichem Bestandteil der verschiedenen metrischen Geometrien. Dabei ist der klassische Begriff der Polarität im Sinne des grundlegenden Buches von REINHOLD BAER zu verallgemeinern³⁾. Der Gedanke, Orthogonalitätsaxiome zur Begründung der Metrik zu nehmen, wurde von PRÜFER⁴⁾ übernommen.

In der vorliegenden Arbeit wird die axiomatische Polarentheorie auf Räume beliebiger Dimensionszahl erweitert. Mit Hilfe des Begriffs der konjugierten Punkte läßt sich im projektiven Raum bzw. in der uneigentlichen Hyperebene des affinen Raumes auf einfache Weise eine noch etwas verallgemeinerte Polarität („Quasipolarität“) einführen. Will man bei nichteuklidischer Metrik vom Begriff senkrechter Geraden ausgehen, so wird der Aufbau schon in dem Fall, daß isotrope Geraden ausgeschlossen sind, etwas weniger einfach.

§ 1. Zusammenstellung benötigter Vorkenntnisse^{1) 2) 3)}.

Die projektive analytische Geometrie des Raumes von mindestens drei Dimensionen über einem beliebigen, nicht notwendig kommutativen Körper läßt sich auf Grund folgender vier Axiome begründen (vgl. etwa BAG):

G_p I: Je zwei Punkte A, B haben eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade \overline{AB} .

G_p II: Haben die Geraden \overline{AB} und \overline{CD} einen Punkt gemein, so auch \overline{AC} und \overline{BD} .

G_p III: Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.

G_p IV: Es gibt zwei punktfremde Geraden.

¹⁾ H. LENZ: Herleitung von Dimensionsformeln der projektiven Geometrie aus eingeschränkten Verknüpfungsaxiomen. Sitzgber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1953, S. 81—87. [In der Folge mit (D) zitiert.]

²⁾ H. LENZ: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Ebenda 1954, S. 17—72. (In der Folge mit BAG zitiert.)

³⁾ R. BAER: Linear algebra and projective geometry. New York 1952.

⁴⁾ H. PRÜFER: Projektive Geometrie. Leipzig 1935, Verl. R. Noske oder Leipzig 1939, Akad. Verl.-Ges.

Entsprechend läßt sich die *affine analytische Geometrie* wie folgt begründen:

Die Menge der Geraden wird in paarweise elementefremde Teilmengen eingeteilt, die sog. *Parallelbündel*. Gerade heißen *parallel*, wenn und nur wenn sie demselben Parallelbündel angehören. Dabei sollen folgende Axiome gelten:

$G_a I a$: Je zwei Punkte A, B haben eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade \overline{AB} .

$G_a I b$: Zu jedem Punkt A und jeder Geraden a gibt es genau eine Parallele zu a , die A enthält.

$G_a II a$ (Trapezaxiom): Ist $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $P \in \overline{AC}$, so ist entweder $P \in \overline{CD}$ oder \overline{AB} und \overline{PD} haben einen Punkt gemein.

$G_a II b$ (Parallelogrammaxiom): Hat keine Gerade mehr als zwei Punkte und ist $C \notin \overline{AB}$, so schneiden sich die Parallelen zu \overline{AB} durch C und zu \overline{AC} durch B .

$G_a III$: Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

$G_a IV$: Es gibt zwei punktfremde und nicht parallele Geraden.

Alle diese Axiome, sowie die meisten in dieser Arbeit vorkommenden Beweise, lassen sich leicht durch einfache Figuren veranschaulichen.

Jeder *affine Raum* \mathfrak{R}_a , der den Axiomen $G_a I a$ bis $G_a IV$ genügt, läßt sich als *Linksvektorraum* \mathfrak{V} über einem Körper K darstellen. Die Punkte sind einfach die Elemente von \mathfrak{V} . \mathfrak{V} und damit auch \mathfrak{R}_a ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch K und die Dimension n , die eine beliebige Kardinalzahl > 2 sein kann. Die Elemente von \mathfrak{V} werden am einfachsten durch n *inhomogene Koordinaten* aus K (etwa in wohlgeordneter Folge) dargestellt, von denen jeweils nur endlich viele von Null verschieden sind.

Jeder *projektive Raum* \mathfrak{R}_p der Dimension n , der den Axiomen $G_p I$ bis $G_p IV$ genügt, läßt sich ebenfalls durch einen Linksvektorraum \mathfrak{V} darstellen, dessen Dimension $1 + n$ ist und dessen ein-, zwei-, k -gliedrige Linksmoduln die Punkte, Geraden, $(k - 1)$ -dimensionalen Unterräume sind.

Eine Abbildung einer Menge \mathfrak{A} in eine Menge \mathfrak{A}' heiße *umkehrbar eindeutig*, wenn zu jedem Punkt $A \in \mathfrak{A}$ genau ein Bildpunkt $A' \in \mathfrak{A}'$ gehört und wenn jeder Punkt $A' \in \mathfrak{A}'$ Bildpunkt *höchstens* eines Punktes $A \in \mathfrak{A}$ ist. Eine Abbildung der Menge \mathfrak{A} in die Menge \mathfrak{A}' heiße *Abbildung auf* die Menge \mathfrak{A}' , wenn jeder Punkt von \mathfrak{A}' Bildpunkt *mindestens* eines Punktes aus \mathfrak{A} ist.

Die *Parallelkollineationen*, d. h. die umkehrbar eindeutigen, umkehrbar geradentreuen und die Parallelenbeziehungen erhaltenden Abbildungen eines affinen Raumes in einen anderen lassen sich darstellen durch Gleichungen

$$(1) \quad \xi'_j = J(\xi_i) a_j^i + b_j \quad (j = 1, 2, \dots; \text{über die } \xi_i \text{ — etwa wohlgeordnete — Menge der } i \text{ ist zu summieren})$$

zwischen den inhomogenen Koordinaten ξ_i, ξ'_j des gegebenen Raumes und des Bildraumes. Dabei sind nur endlich viele b_j und für jedes i nur endlich viele a_j^i von Null verschieden. J ist ein Isomorphismus des Koordinatenkörpers K des gegebenen Raumes in den Koordinatenkörper K' des Bildraumes. Die Matrix a_j^i ist

von rechts nichtsingulär über $J(K)$, d. h. aus $c_i a_j^i = 0$ für alle j mit $c_i \in J(K)$, wobei nur endlich viele c_i nicht verschwinden dürfen, folgt $c_i = 0$ für alle i .

Die *Kollineationen*, d. h. die umkehrbar eindeutigen und umkehrbar geradentreuen Abbildungen eines projektiven Raumes in einen anderen, lassen sich darstellen durch Isomorphismen der zugehörigen Vektorräume, d. h. durch Gleichungen

$$(2) \quad x'_j = J(x_i) a_j^i \quad (j = 0, 1, \dots)$$

für die homogenen Koordinaten x_i des gegebenen Raumes und x'_j des Bildraumes. Über die Matrix a_j^i und J gilt dasselbe wie bei den Gleichungen (1). Wird eine Gerade des Raumes auf eine Gerade des Bildraumes abgebildet, so ist J ein Isomorphismus auf K' und umgekehrt.

Die Gleichung einer allgemeinen Hyperebene ist

$$(3) \quad x_i u^i = 0,$$

wobei nicht alle u^i verschwinden. Von den Hyperebenenkoordinaten u^i dürfen im Gegensatz zu den Punktkoordinaten x_i mehr als endlich viele von Null verschieden sein. Die Folgen der Hyperebenenkoordinaten bilden, wenn man die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ hinzufügt, einen *Rechtsvektorraum* $\hat{\mathfrak{V}}$, dessen Dimension nur für endliches n gleich der Dimension $1 + n$ von \mathfrak{V} ist [vgl. BAER²⁾ S. 25ff.]. $\hat{\mathfrak{V}}$ stellt analytisch den *dualen Raum* dar, dessen „Punkte“ die Hyperebenen und dessen „Geraden“ die Hyperebenenbüschel des gegebenen Raumes sind.

Unter *Korrelationen* verstehen wir, abweichend von BAG, Kollineationen des Raumes in den dualen Raum. Eine Korrelation führt eine Basis des Raumes über in eine Basis des Bildbereichs im dualen Raum und läßt sich daher darstellen durch Gleichungen

$$(4) \quad u^j = g^{ij} J(x_i),$$

wobei J ein *Antisomorphismus* des Koordinatenkörpers K in sich ist. Die Matrix g^{ij} ist von links nichtsingulär über dem Körper $\bar{J}(K)$, d. h. aus $g^{ij} y_j = 0$ für alle i , $y_j \in \bar{J}(K)$, $y_j \neq 0$ nur für endlich viele j folgt $y_j = 0$ für alle j . Die g^{ij} brauchen nicht $\bar{J}(K)$, sondern nur K anzugehören.

§ 2. Die Polaritätspostulate.

Definition: Eine Abbildung eines projektiven Raumes in seinen dualen Raum heiße eine *Quasipolarität*, wenn sie den folgenden Forderungen genügt:

- P I: Zu jedem Punkt A gibt es genau eine *Polarhyperebene* $\pi(A) = a$. Statt *Polarhyperebene* sagen wir auch kurz „*Polare*“.
- P II: Zu jeder Hyperebene b gibt es höchstens einen *Pol*, d. h. einen Punkt, dessen *Polare* b ist.
- P III: Liegt A auf $b = \pi(B)$, so liegt B auf $a = \pi(A)$.
Ersetzt man P II durch
- P II': Zu jeder Hyperebene gibt es genau einen *Pol*,
so heiße die Quasipolarität eine *Polarität* (vgl. BAG § 8).

Satz 1: Jede Quasipolarität ist eine Korrelation, die sich durch Gleichungen

$$(5) \quad x^i = g^{ik} \bar{A}(x_k) = g^{ik} \bar{x}_k$$

darstellen läßt. Dabei ist \bar{A} ein involutorischer Antiautomorphismus des Koordinatenkörpers K , d. h. \bar{A}^2 ist die Identität. Die Matrix g^{ik} ist von links nicht-singulär.

Ferner ist für alle Punkte x_i, y_i

$$(6) \quad \overline{x_i y^i} = y_i x^i$$

und entweder

$$(7) \quad g^{ik} = \overline{g^{ki}}$$

oder K ist kommutativ, \bar{A} die Identität und

$$(8) \quad g^{ik} = -g^{ki}.$$

Die Bedingung $x_i y^i = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Punkt mit den Koordinaten x_i auf der Polaren des Punktes mit den Koordinaten y_i liegt.

Der Beweis verläuft in enger Anlehnung an den des entsprechenden Satzes über Polaritäten [BAER³), BAG S. 49ff.], läßt sich aber doch nicht so wörtlich übernehmen, daß er hier entbehrlich wäre.

I. Hilfssatz 1: Liegen die Punkte A, B, C in einer Geraden, so liegen ihre Polaren in einem Büschel.

Beweis: Es sei $C \in \overline{AB}$ und D ein beliebiger Punkt aus $a \cap b$. Nach P III ist $\pi(D) = d \supset \overline{AB} \ni C$, also $D \in c = \pi(C)$. Weil D in $a \cap b$ ganz beliebig gewählt war, folgt $c \supset a \cap b$, w.z.b.w.

Hilfssatz 2: Sind a und b Polaren zweier Punkte A und B und ist c eine Hyperebene durch den Durchschnitt $a \cap b$, so ist c Polare eines Punktes $C \in \overline{AB}$.

Beweis: Es sei $c \supset a \cap b$ und $P \in c$, $P \notin a \cap b$. Die Polare p von P enthält die Gerade \overline{AB} nicht, denn sonst wäre $P \in a \cap b$. Es sei Q der Schnittpunkt von p und \overline{AB} . [Seine Existenz folgt z. B. aus den in (D) bewiesenen Dimensionsbeziehungen.] Die Polare q von Q enthält nach Hilfssatz 1 den Durchschnitt $a \cap b$ und nach P III den Punkt P . Daher ist $q = c$, w.z.b.w.

II. Die Quasipolarität bildet also den Raum geradentreu und umkehrbar eindeutig in den dualen Raum ab. Jede Gerade wird auf eine „Gerade“ des dualen Raumes, d. h. auf ein Hyperebenenbüschel abgebildet. Die Abbildung ist also eine Korrelation im Sinne des § 1 und läßt sich daher durch Gleichungen (5) darstellen, wobei \bar{A} ein Antiisomorphismus von K auf sich, also ein Antiautomorphismus ist. Die Matrix g^{ik} ist von links nichtsingulär. (Der Zusatz „über $\bar{A}(K) = K$ “ ist hier überflüssig.) Denn sonst hätte man sofort einen Widerspruch gegen P II. Aus $x_i y^i = x_i g^{ik} \bar{A}(y_k) = 0$ folgt nach P III $y_k x^k = 0$ oder (nach Anwendung von \bar{A}^{-1})

$$x_i \bar{A}^{-1}(g^{ki}) \bar{A}^{-1}(y_k) = 0.$$

Daraus folgt, wenn man den Punkt (x_i) die Polare des festen Punktes (y_k) durchlaufen läßt, daß für ein geeignetes $\alpha \neq 0$

$$g^{ik} \bar{A}(y_k) = \bar{A}^{-1}(g^{ki}) \bar{A}^{-1}(y_k) \bar{A}^{-1}(x)$$

oder

$$(9) \quad \alpha y_k g^{ki} = \bar{A}^2(y_k) \bar{A}(g^{ik})$$

sein muß.

III. α hängt scheinbar von dem Vektor $y = (y_k)$ aus dem Vektorraum \mathfrak{V} ab. Wählen wir für y speziell die Grundvektoren $\overset{j}{y}$ mit den Koordinaten

$$\overset{j}{y}_k = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}$$

und schreiben $\overset{j}{\alpha}$ für $\alpha(\overset{j}{y})$, so wird aus (9), wenn wir den Index j wieder durch k ersetzen,

$$(10) \quad \overset{k}{\alpha} g^{ki} = \bar{A}(g^{ik}).$$

Dabei ist auf der linken Seite nicht über k zu summieren. Setzt man (10) in (9) ein, so wird

$$\alpha(y) y_k \overset{k}{\alpha} \bar{A}(g^{ik}) = \bar{A}^2(y_k) \bar{A}(g^{ik}).$$

Weil die Matrix g^{ik} von links, die Matrix $\bar{A}(g^{ik})$ also von rechts nichtsingulär ist, folgt koordinatenweise

$$\alpha(y) y_k = \bar{A}^2(y_k) \overset{k}{\alpha}.$$

Für je zwei Vektoren y, y' , die in der k -ten von Null verschiedenen Koordinate übereinstimmen, wird daher $\alpha(y) = \alpha(y')$. Das ist nur möglich, wenn α allgemein von y unabhängig ist. \bar{A}^2 ist also ein innerer Automorphismus und

$$(11) \quad \bar{A}(x_i y^i) = \alpha y_i x^i.$$

IV. Wenn es einen Punkt z_i gibt, der nicht auf seiner Polaren liegt, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, den willkürlichen Rechtsfaktor von x^i in (5) so zu wählen, daß $z_i z^i = 1$ wird. Dann wird nach (11) (für $x_i = y_i = z_i$) $\alpha = 1$ und die Formeln (6), (7) sind bewiesen. Liegt aber jeder Punkt auf seiner Polaren, so gilt identisch

$$0 = (x_i + y_i)(x^i + y^i) = x_i y^i + y_i x^i,$$

d. h. es ist $\alpha = -1$ und \bar{A} die Identität, was nur in kommutativen Körpern möglich ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

In Räumen endlicher Dimension ist jede Quasipolarität eine Polarität, weil das Bündel der Polarperebenen dieselbe Dimension hat wie der gegebene Raum und daher mit dem ganzen dualen Raum übereinstimmt. Es hätte also in BAG genügt, an Stelle der dort aufgestellten Forderung P II (hier mit P II' bezeichnet), die hier aufgestellte abgeschwächte Forderung P II zu verlangen. Umgekehrt sind Polaritäten nur in Räumen endlicher Dimension möglich, weil nur dann der duale Raum dieselbe Dimension hat wie der gegebene [vgl. BAER³⁾, S. 95 ff.].

Man sieht leicht, daß umgekehrt eine Abbildung des Raumes in den dualen Raum, die sich analytisch durch die in Satz 1 angegebenen Gleichungen darstellen läßt, die Forderungen P I bis P III befriedigt und daher eine Quasipolarität ist.

§ 3. Konjugierte Punkte.

Zwei Punkte heißen in der klassischen Polarentheorie bekanntlich konjugiert, wenn der eine auf der Polaren des anderen liegt. Diese Definition

übertragen wir auf die Quasipolaritäten des vorigen Paragraphen. Die Beziehung „ A ist konjugiert zu B “ sei mit $A \wedge B$ bezeichnet. Wir erhalten aus P I bis P III unmittelbar die folgenden Eigenschaften konjugierter Punkte:

K I: Ist $A \wedge B$, so ist $B \wedge A$.

K II: Aus $A \wedge B, A \wedge C, D \in \overline{BC}$ folgt $A \wedge D$.

K III: Sind A, B, C beliebige Punkte, so liegt auf \overline{BC} ein zu A konjugierter Punkt.

K IV: Kein Punkt ist zu allen Punkten konjugiert.

Sonderfälle von K III sind

K IIIa: Ist A nicht zu sich selbst konjugiert, so liegt auf jeder A enthaltenden Geraden ein zu A konjugierter Punkt.

K IIIb: Ist A zu sich selbst konjugiert, so liegt auf jeder A nicht enthaltenden Geraden ein zu A konjugierter Punkt.

Umgekehrt gilt

Satz 2: Sind in einem projektiven Raum konjugierte Punkte so definiert, daß die Forderungen K I, K II, K IIIa, K IIIb, K IV gelten, so gibt es eine Quasipolarität von der Eigenschaft, daß der Ort aller zu einem beliebigen Punkt A konjugierten Punkte die Polare a von A ist.

Beweis:

I. Die Menge \mathfrak{R}_A der zu A konjugierten Punkte ist nach K II ein Unterraum, und zwar nach K IV ein echter. Nach K IIIa (falls A nicht zu sich selbst konjugiert ist) bzw. nach K IIIb (falls $A \wedge A$) ist \mathfrak{R}_A eine Hyperebene, die wir mit $\pi(A)$ bezeichnen. Aus $B \in \pi(A)$ folgt nach K I, daß auch $A \in \pi(B)$ ist. Also gelten die Polaritätspostulate P I und P III und die verschärfte Forderung K III.

II. Wären A, B zwei Punkte mit derselben Polaren $\pi(A) = \pi(B) = a$, so wäre nach Forderung K II jeder Punkt von a zu jedem Punkt der Geraden \overline{AB} konjugiert. Zu einem beliebigen Punkt $Q \notin a$ gibt es nach K III einen Punkt $P \in \overline{AB}$ mit $P \wedge Q$. Nach K II müßte also P zu jedem Punkt des Raumes konjugiert sein, was K IV widerspricht. Also gilt auch P II und Satz 2 ist bewiesen.

Setzt man endliche Dimension des Raumes voraus und dualisiert man die Forderungen K I, K II, K III und K IV, so erhält man genau die in BAG eingeführten Axiome über *senkrechte Hyperebenen*. Die im letzten Paragraphen von BAG durchgeführte Einführung einer absoluten Polarität auf Grund von Axiomen über senkrechte Hyperebenen ist also nichts anderes als eine Anwendung unseres Satzes 2.

Der Begriff der konjugierten Punkte ermöglicht aber weiter eine besonders einfache Einführung einer absoluten Quasipolarität, also des wesentlichen Teiles einer nichteuklidischen Metrik in verallgemeinertem Sinn. Allerdings ist der Begriff der konjugierten Punkte nicht mehr der unmittelbaren geometrischen Anschauung entnommen. Wegen der Möglichkeit dieses Einwandes wird in § 5 ein Aufbau einer verallgemeinerten elliptischen Metrik auf Grund von Axiomen über senkrechte Geraden durchgeführt (vgl. BAG § 10). Weiter wird sich aber nach der Betrachtung der affin-metrischen Geometrie im

nächsten Paragraphen zeigen, daß der Begriff der konjugierten Punkte das Wesen der nichteuklidischen Metrik doch besser trifft als der der senkrechten Geraden.

§ 4. Die affin-metrische Geometrie.

Gegeben sei ein affiner Raum im Sinne des § 1. In ihm sei das *Senkrechtstehen* von zwei Geraden a, b so erklärt, daß die gleich folgenden *affinen Rechtwinkelaxiome* gelten. Dabei sei *nicht* gefordert, daß senkrechte Gerade einen Punkt gemeinsam haben müssen. Eine auf sich selbst senkrechte Gerade heiße *isotrop*. Als Axiome über senkrechte Geraden stellen wir die folgenden auf:

$R_a I a$: Aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$.

$R_a I b$: Aus $a \perp b$ und $b \parallel c$ folgt $a \perp c$.

$R_a II$: Ist $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, $D \in \overline{BC}$, $D \neq O$, so ist $\overline{OA} \perp \overline{OD}$.

Bemerkung: Es genügt offenbar, $R_a II$ für einen ein für allemal festgehaltenen Punkt O zu fordern.

$R_a III a$: Ist die Gerade \overline{AB} nicht isotrop, so liegt auf jeder von \overline{AB} verschiedenen Geraden durch B , die nicht auf \overline{AB} senkrecht steht, ein Punkt C mit $\overline{AC} \perp \overline{AB}$.

$R_a III b$: Ist die Gerade \overline{AB} isotrop, so liegt auf jeder \overline{AB} nicht schneidenden und nicht auf \overline{AB} senkrechten Geraden ein Punkt C mit $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

$R_a IV$: Keine Gerade steht auf allen Geraden senkrecht.

Aus $R_a I b$ folgt, daß das Senkrechtstehen zweier Geraden nur von ihren uneigentlichen Punkten abhängt. Axiom $R_a III$ sagt, wenn $R_a I a$, $R_a I b$ vorausgesetzt werden, einfach aus, daß sich auf einer nicht isotropen Geraden in jeder sie enthaltenden Ebene Lote errichten lassen. Axiom $R_a III b$ sagt aus, daß zu einer isotropen Geraden in jeder sie *nicht* enthaltenden Ebene Lote existieren. Bezeichnet man nun zwei uneigentliche Punkte als konjugiert, wenn ihre Verbindungsgeraden mit einem (also jedem) eigentlichen Punkt aufeinander senkrecht stehen, so sieht man, daß die Rechtwinkelaxiome $R_a I a$ bis $R_a IV$ nichts anderes sind als die Forderungen $K I$, $K II$, $K III a$, $K III b$, $K IV$ für die uneigentlichen Punkte. Wir haben damit

Satz 3: Die affinen Rechtwinkelaxiome $R_a I a$ bis $R_a IV$ reichen zur Einführung einer absoluten Quasipolarität in der uneigentlichen Hyperebene hin.

Das gilt auch im dreidimensionalen Raum, obwohl dann die uneigentliche Ebene kein projektiver Raum im Sinne des § 1 ist. Denn in ihr gilt jedenfalls der Satz von DESARGUES und unter dieser Voraussetzung gelten die in § 1 angeführten Sätze über Kollineationen und Korrelationen und daher auch Satz 1 des § 2 unverändert.

Die Bedingung dafür, daß zwei Vektoren des affin-metrischen Raumes aufeinander senkrecht stehen, ist, daß ihre uneigentlichen Punkte konjugiert sind; also

$$(12) \quad \xi_i \eta^i = \xi_i g^{ik} \bar{\eta}_k = 0,$$

wobei ξ_i, η_i die inhomogenen Koordinaten der beiden Vektoren bedeuten. $\xi_i \eta^i$ ist die sinngemäße Verallgemeinerung des üblichen Skalarprodukts

zweier Vektoren. Man kommt so auf die *metrischen Räume* im Sinne von WITT⁵⁾). Unter *Ähnlichkeitstransformationen* wird man Parallelkollineationen verstehen, die alle rechten Winkel erhalten, unter *Bewegungen* solche Parallelkollineationen, die alle Skalarprodukte fest lassen. Spezielle Bewegungen sind die *Spiegelungen*, die dadurch entstehen, daß man von einer Zerlegung des Vektorraumes in zwei zueinander senkrechte Teilräume ausgeht und jedem Vektor des ersten Teilraumes sich selbst, jedem Vektor des zweiten Teilraumes den entgegengesetzten Vektor als Bildvektor zuordnet. Doch gehört die nähere Untersuchung der metrischen Räume nicht in die vorliegende Arbeit.

§ 5. Verallgemeinerte elliptische Räume.

Man kann bekanntlich eine nichteuklidische Metrik wie folgt definieren: Man betrachte wie üblich die Punkte des n -dimensionalen projektiven Raumes \mathbb{R}_n als Strahlen durch den Nullpunkt eines affinen $(1+n)$ -dimensionalen Erweiterungsraumes \mathbb{R}_n und führe in diesem eine euklidische oder pseudoeuklidische Metrik ein, was in größter Allgemeinheit etwa durch die Rechtwinkelaxiome des vorigen Paragraphen geschehen kann. *Dadurch wird in \mathbb{R}_p eine nicht-euklidische Metrik induziert.* Senkrechte Geraden in \mathbb{R}_p sind „einfach“ senkrechte Ebenen in \mathbb{R}_n , die durch den Ursprung gehen. Das ist im dreidimensionalen Raum sehr anschaulich, in höherdimensionalen Räumen erscheint aber die Definition senkrechter Ebenen schon nicht mehr so einfach wie die der senkrechten Geraden, denen in \mathbb{R}_p eben gerade die konjugierten Punkte entsprechen. Es erscheint mir daher die in § 3 gegebene Einführung einer nichteuklidischen Metrik mit Hilfe des Grundbegriffs der konjugierten Punkte als die natürlichste.

Trotzdem soll noch eine Begründung einer verallgemeinerten *elliptischen* Metrik auf Grund von Axiomen über senkrechte Geraden gegeben werden, und zwar wie in BAG § 10 unter Ausschluß isotroper Geraden; nicht, weil mir ein solcher Ausschluß von der Sache her geboten erschiene, sondern weil ohne ihn Schwierigkeiten auftreten.

Wir führen jetzt die folgenden Rechtwinkelaxiome über Geraden des verallgemeinerten elliptischen Raumes ein, die außer den projektiven Inzidenzaxiomen $G_p I$ bis $G_p IV$ gelten sollen:

$R_p I a$: Aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$.

$R_p I b$: Aus $a \perp b$ folgt, daß $a \cap b$ ein Punkt ist.

$R_p II$: Ist $C \notin \overline{AB}$ und steht AC nicht senkrecht auf \overline{AB} , so geht durch C höchstens eine zu \overline{AB} senkrechte Gerade.

$R_p III$: Ist $C \in \overline{AB}$, so gibt es auf \overline{AC} zwei von A verschiedene Punkte, von denen aus sich (nicht notwendig verschiedene) Lote auf \overline{AB} fallen lassen.

$R_p IV$: Ist $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, $C \notin \overline{OB}$, so ist $\overline{OA} \cap \overline{BC}$ leer.

$R_p V$: Ist $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$ und steht \overline{AB} nicht senkrecht auf \overline{OB} , so steht auch \overline{AC} nicht senkrecht auf \overline{OC} .

⁵⁾ E. WITT: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. Journ. f. Math. 176, 31–44 (1937).

⁶⁾ M. EICHLER: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

Wir definieren nun:

Ein Punkt P heißt *Pol* einer Geraden g , wenn P nicht auf g liegt und wenn durch P zwei Lote auf g gehen. Nach R_p II ist dann jede g schneidende Gerade durch P ein Lot auf g .

Ein Punkt B heiße *konjugiert* zu einem Punkt A (in Zeichen $B \wedge A$), wenn B Pol einer A enthaltenden Geraden ist.

Hilfssatz 1: Ist g eine Gerade in einer Ebene γ , so enthält γ genau einen Pol von g .

Beweis:

I. Es sei $C \in \gamma$, $C \notin g$. Entweder ist C Pol von g oder es gibt einen Punkt $A \in g$, so daß \overline{AC} nicht auf g senkrecht steht. Auf \overline{AC} liegen zwei von A verschiedene Punkte, von denen aus sich Lote auf g fllen lassen. Ihr Schnittpunkt muß ein Pol von g sein; denn er kann wegen R_p IV nicht auf g liegen.

II. Wir nehmen an, es gebe in γ zwei Pole P, Q von g . Es sei A der Schnittpunkt von \overline{PQ} mit g und B ein weiterer Punkt von g . Dann ist $\overline{PB} \perp g$ und $\overline{QB} \perp g$, was R_p IV widerspricht. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2: Aus $B \wedge A$ folgt $A \wedge B$.

Beweis: B sei Pol der Geraden \overline{AC} und P sei Pol der Geraden \overline{AB} in der Ebene \overline{ABC} . P liegt auf \overline{AC} (wegen R_p IV). Dann ist A Pol von \overline{BP} , w.z.b.w.

Hilfssatz 3: Ist $B \wedge A$, so ist B Pol aller Lote, die sich in A auf \overline{AB} errichten lassen.

Das folgt unmittelbar aus R_p V.

Hilfssatz 4: Ist $B \wedge A$ und $B \wedge C$, so ist $B \notin \overline{AC}$ und B Pol von \overline{AC} .

Beweis:

I. Wäre $B \in \overline{AC}$, so sei P der Pol von \overline{AC} in irgendeiner \overline{AC} enthaltenden Ebene. Nach Hilfssatz 3 wären \overline{PA} und \overline{PC} Lote auf \overline{BP} in derselben Ebene, was R_p IV widerspricht.

II. In der Ebene \overline{ABC} läßt sich in A ein Lot auf \overline{AB} errichten, dessen Pol nach Hilfssatz 3 B ist. Wäre der Schnittpunkt dieses Lotes mit \overline{BC} von C verschieden, so lgen auf \overline{BC} zwei zu B konjugierte Punkte im Widerspruch zu dem bereits bewiesenen ersten Teil des Hilfssatzes. Also ist B Pol von \overline{AC} , w.z.b.w.

Aus Hilfssatz 4 folgt nun unmittelbar:

Ist $A \wedge B$, $A \wedge C$, $D \in \overline{BC}$, so ist $A \wedge D$, und weiter:

Kein Punkt ist zu allen Punkten konjugiert. Denn auf jeder Geraden durch einen Punkt A liegt höchstens ein zu A konjugierter Punkt.

Auf jeder A enthaltenden Geraden a liegt ein zu A konjugierter Punkt. Um ihn zu finden, braucht man nämlich nur den Pol eines auf a in A errichteten Lotes \overline{AB} in der Ebene aB zu suchen.

Damit ist gezeigt, daß die Forderungen K I, K II, K IIIa, K IV sämtlich gelten. Weil kein Punkt zu sich selbst konjugiert ist, ist durch die Beziehung des Senkrechtstehens zwischen den Geraden des Raumes gemäß den Axiomen R_p Ia bis R_p V eine *absolute Quasipolarität* bestimmt.

Wir müssen jedoch noch zeigen, daß die Rechtwinkelaxiome dieses Paragraphen widerspruchsfrei sind. Dazu werden wir zeigen, daß sie bei geeigneter Definition der Rechtwinkligkeit in jedem projektiven Raum erfüllt sind, in

dem eine absolute Quasipolarität im Sinne von § 3 gegeben ist, bei der kein Punkt auf seiner Polaren liegt.

Wir definieren: Gegeben ist ein projektiver Raum mit absoluter Quasipolarität. Kein Punkt liege auf seiner Polaren. Eine Gerade b heiße auf einer Geraden a *senkrecht*, wenn erstens der Durchschnitt $a \cap b$ ein Punkt P ist und zweitens auf a ein Punkt B liegt, der zu zwei (also allen) Punkten von b konjugiert ist. Auf b liegt dann nach K IIIa ein zu P konjugierter Punkt. Er ist auch zu B konjugiert. *Daraus folgt, daß auch $a \perp b$ ist, d. h. $R_p I a$ und $R_p I b$ gelten.*

Nun seien \overline{AB} und \overline{AC} zwei verschiedene, nicht aufeinander senkrechte Gerade, d. h. der auf \overline{AC} liegende, zu A konjugierte Punkt P sei nicht zu B konjugiert. Eine Gerade g in der Ebene \overline{ABC} steht dann und nur dann auf \overline{AB} senkrecht, wenn sie einen zu A und zu B konjugierten Punkt enthält. Die Gesamtheit der zu A und B konjugierten Punkte ist Durchschnitt zweier Hyperebenen und hat also mit der Ebene \overline{ABC} mindestens einen Punkt gemein; aber auch nicht mehr Punkte, weil sonst ein solcher Punkt auf \overline{AB} läge und daher zu sich selbst konjugiert wäre. Es sei also $Q \in \overline{ABC}$, $Q \perp A$, $Q \perp B$. Von jedem von Q verschiedenen und nicht auf \overline{AB} liegenden Punkt $D \in \overline{ABC}$ läßt sich dann genau ein Lot auf \overline{AB} fallen, d. h. die Forderungen $R_p II$ und $R_p III$ sind erfüllt.

Auch $R_p IV$ gilt. Denn sei $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$. Auf \overline{OA} liegt dann ein von O verschiedener Punkt P , der zu O und B konjugiert ist, sowie ein Punkt Q , der zu O und C konjugiert ist. Das ist nur möglich für $P = Q$, weil sonst nach K II $O \wedge O$ sein müßte. $P = Q$ muß also auch zu einem eventuellen Schnittpunkt $D = \overline{OA} \cap \overline{BC}$ konjugiert sein. Das kann aber nur sein, wenn $D = O$ ist, weil sonst $P \wedge P$ folgen würde.

$R_p V$ ergibt sich wie folgt: Es sei $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{AB} \perp \overline{OB}$, d. h. auf \overline{OA} und auf \overline{AB} liege je ein Punkt, der zu O und zu B konjugiert ist. Diese beiden Punkte müssen zusammenfallen, denn andernfalls würde ihre Verbindungsgerade aus \overline{OB} einen zu sich selbst konjugierten Punkt ausschneiden. Also ist $A \wedge O$, $A \wedge B$. Ist nun $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, so existiert ein Punkt $P \in \overline{OA}$ mit $P \wedge O$, $P \wedge C$. Für $P \neq A$ ist aber $P \wedge O$ unmöglich, also gilt $R_p V$. Wir haben damit

Satz 4: Die Gültigkeit der Rechtwinkelaxiome $R_p I a$ bis $R_p V$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Rechtwinkligkeit durch eine absolute Quasipolarität erzeugt wird, bei der kein Punkt auf seiner Polaren liegt.

Die in diesem Paragraphen durchgeführte Einführung einer absoluten Quasipolarität aus Axiomen für senkrechte Geraden unterscheidet sich von der in BAG § 10 gegebenen in folgenden Punkten:

I. Die Beweise sind einfacher. II. Das in BAG verwendete Axiom $R_r IV$ (BAG, S. 59) hat sich als entbehrlich herausgestellt. Benötigt wird nur das schwächere Axiom $R_p IV$ dieses Paragraphen. III. Die Beschränkung auf Räume endlicher Dimension fällt weg.

(Eingegangen am 30. Juni 1954.)

Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen.

(II. Mitteilung.)

Von

HEINZ OTTO CORDES in Göttingen.

Unter den Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die zu Entwicklungssätzen für willkürliche Funktionen führen, zeichnet sich die Klasse der separierbaren Operatoren durch besondere Einfachheit des Auffindens der Eigenwerte und Eigenfunktionen aus. An die Frage der Entwicklungsmöglichkeit nach Eigenfunktionen und Eigenpaketen überhaupt schließt sich für solche Probleme gleich die weitere Frage der Möglichkeit der Entwicklung nach solchen Eigenfunktionen und Eigenpaketen, die dem Produktansatz zugänglich sind. Die Behandlung dieses Themas war Gegenstand der ersten Mitteilung dieser Arbeit.

Bereits dort hatte uns die Notwendigkeit, mit den Hilfsmitteln der allgemeinen Spektraltheorie zu arbeiten, dazu geführt, eine abstrakte Definition des separierbaren Operators A in \mathfrak{A} zugrunde zu legen. Wir hatten im folgenden Sinne definiert: Zwischen den Elementen u^1 und u^2 zweier Hilberträume \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 sei ein Produkt $u^1 u^2$ erklärt, das als Vektor eines neuen HILBERTSchen Raumes \mathfrak{H} gedeutet werde, der von solchen Produkten und ihren endlichen Linearkombinationen sowie gewissen idealen Elementen gebildet sei. Das Skalarprodukt von \mathfrak{H} sei für $u = u^1 u^2$ aus \mathfrak{H} , $v = v^1 v^2$ aus \mathfrak{H} definiert durch

$$(u, v) = (u^1, s^1 v^1) (u^2, s^2 v^2) + (u^1, t^1 v^1) (u^2, t^2 v^2)$$

mit linearen, beschränkten, hermiteschen, positiv definiten Operatoren s^j, t^j der Räume \mathfrak{H}^j in sich, für die gilt $s^j + t^j = 1$, $j = 1, 2$. Die Operatoren s^j, t^j können durch $s^1 (u^1 u^2) = (s^1 u^1) u^2$ usw. auch als beschränkte Operatoren des Raumes \mathfrak{H} erklärt werden. A^1 in \mathfrak{A}^1 und A^2 in \mathfrak{A}^2 seien zwei hypermaximale Operatoren der Räume \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 in sich. Dann sei definiert

$$A u = (s^1 s^2 + t^1 t^2)^{-1} (A^1 u^1 s^2 u^2 + t^1 u^1 A^2 u^2)$$

für $u = u^1 u^2$ aus \mathfrak{A} : u^1 aus \mathfrak{A}^1 ; u^2 aus \mathfrak{A}^2 ;

$$(A^1 u^1 s^2 u^2 + t^1 u^1 A^2 u^2) \text{ aus } \mathfrak{D}_{(s^1 s^2 + t^1 t^2)^{-1}},$$

dem Definitionsbereich der Reziproken $(s^1 s^2 + t^1 t^2)^{-1}$.

In vorliegender Mitteilung wird die Möglichkeit des abstrakten Aufbaues der zum Eigenwertproblem $A \varphi = \lambda \varphi$ gehörigen Entwicklung aus den Lösungen der separierten Gleichungen $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0$, $(A^2 - \lambda t^2 - \mu s^2) \varphi^2 = 0$ studiert. Namentlich beim kontinuierlichen Spektrum wird dabei der in § 8 der ersten Mitteilung gewählte Weg prinzipiell ungangbar, da es nicht mehr

möglich ist, den Begriff der nicht-quadratisch-integrierbaren Lösungen obiger Gleichungen in sinnvoller Weise auf diesen abstrakten Fall zu verallgemeinern. Insbesondere fehlt dazu, wie man auch solche Lösungen definieren würde, ein Konvergenzbegriff, der es erlaubt, über Produkte von Lösungen nach den Separationsparametern zu integrieren. Wir entscheiden uns daher für ein anderes Verfahren. Im ersten Teil war gezeigt worden, daß es tunlich ist, das Eigenwertproblem $A\varphi = \lambda\varphi$ zu ersetzen durch das Simultaneigenwertproblem $A\varphi = \lambda\varphi$, $\tilde{A}\varphi = \mu\varphi$, wo \tilde{A} ein zweiter, separierbarer Operator ist, der mit A kommutiert. Satz 6 gibt zunächst eine Approximationsaussage für Abschnitte von Simultaneigenpaketen der Operatoren A und \tilde{A} durch Produkte von Eigenpaketen der Operatoren $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$ und $(A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2)$. Diese erlaubt uns z. B. zu schließen (Satz 7), daß unter den allgemeinsten, in der ersten Mitteilung zugelassenen Voraussetzungen das Simultanspektrum von A und \tilde{A} , in einer λ, μ -Ebene betrachtet, überall dort leer ist, wo wenigstens einer der Operatoren $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)^{-1}$ und $(A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2)^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Die Approximationsaussage läßt sich verschärfen (Hilfsatz 10), wenn wir die zusätzliche Voraussetzung machen, daß A^1 in \mathfrak{H}^1 ein diskretes Spektrum besitzt (über A^2 in \mathfrak{H}^2 braucht dann außer der Hypermaximalität nichts vorausgesetzt zu werden). Diese verschärfte Aussage gestattet den Beweis einer *Integraldarstellung der Spektralschar E_λ des Operators A durch die Spektralscharen der Operatoren $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$ und $(A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2)$* (Satz 8). Wir schreiben dafür

$$E_{\lambda_0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\substack{\mathfrak{H}_\nu^1 \\ \lambda \leq \lambda_0}} (C E_p^1 E_{d,p}^2)^{-1} E_p^1 E_{d,p}^2 C (t_{d,p}^2)^{-1}.$$

Satz 8 muß als das Hauptresultat des Teiles 2 der Arbeit betrachtet werden. Von dem für den Spezialfall von HILB [7] ausgesprochenen Integraldarstellungssatz unterscheidet er sich im wesentlichen dadurch, daß in der Integraldarstellung willkürlicher Funktionen

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \psi_{\lambda_\nu(\sigma), \mu_\nu(\sigma)}^1 \psi_{\lambda_\nu(\sigma), \mu_\nu(\sigma)}^2 d\xi_\nu(\sigma)$$

der Ausdruck $\psi_{\lambda_\nu(\sigma), \mu_\nu(\sigma)}^2 d\xi_\nu(\sigma)$, wo $\psi_{\lambda_\nu(\sigma), \mu_\nu(\sigma)}^2$ eine Wellenfunktion, d. h. eine nicht quadratisch integrierbare Lösung der Eigenwertdifferentialgleichung, $d\xi_\nu(\sigma)$ ein skalares Differential bedeute, ersetzt ist durch ein Eigendifferential $d v_\sigma$.

Die §§ 13 und 14 befassen sich vorwiegend mit dem Punktspektrum des Operators A in \mathfrak{H} , bei dem die oben aufgezeigten Schwierigkeiten natürlich nicht auftreten, bei dem sich aber im abstrakten Falle eine andere Komplikation ergibt.

Fast alle in der ersten und zweiten Mitteilung ausgesprochenen Sätze fußen auf gewissen Selbstadjungiertheitsbedingungen für die Operatoren A und \tilde{A} , den Bedingungen (1_a), (1_t), (2_a) und (2_t), die wir in § 5 näher unter-

sucht haben. Diese Bedingungen werden in § 15 für den Fall analysiert, daß A^1 und A^2 singuläre STURM-LIOUVILLE-Differentialoperatoren sind.

§ 16 behandelt als Anwendungsbeispiel die Separation der Wellengleichung des quantenmechanischen Starkeffektes in parabolischen Koordinaten. Satz 5 aus der ersten und Satz 8 aus vorliegender Mitteilung führen zu zwei Formen von Entwicklungssätzen.

Von gewissem Interesse außerhalb des hier behandelten Problemkreises ist vielleicht Hilfssatz 8: Für die beschränkten, hermiteschen Operatoren P^{-1} , Q gelte $\|P^{-1}\| \|Q\| \leq 1$; $W = (1 - Q^2/\|Q\|^2)^{-1}$ existiere in einem dichten Definitionsbereich \mathfrak{D}_W ; V sei beschränkt. Behauptung: Es gibt genau eine Lösung der Gleichung $PX - XQ = V$, die einer Abschätzung $\|Xv\| \leq c\|W^{1/2}v\|$ genügt und diese genügt für jedes κ mit $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ der Abschätzung $\|Xv\| \leq \|P^{-1}\| \|V\| c(\kappa) \|W^{1+\kappa}v\|$, in der $c(\kappa)$ eine von P, Q, V unabhängige Funktion ist. Der Hilfssatz steht in engem Zusammenhang mit einem Lemma von E. HEINZ¹⁾.

Der Integraldarstellungssatz erfordert mehrfach einen Vergleich zwischen den Projektionen F_I und $G_I = E_{\lambda'}^1(\lambda, \mu) E_{\lambda''}^2(\lambda, \mu)$. Die dazu notwendige Umnormierung von F_I und G_I zu Orthogonalprojektionen in bezug auf dasselbe Skalarprodukt regelt Hilfssatz 9.

Eine spezielle Schwierigkeit beim Beweis der Integraldarstellung von E_λ (Satz 8) entsteht dadurch, daß das in dieser Darstellung auftretende Operator-Differential $H_b = (C_{E_{p^*}^1, E_{p'^*}^2})^{-1} E_{p^*}^1 E_{p'^*}^2 C(t_{p', p''}^2)^{-1}$ (b ein Kurvenbogen in der λ, μ -Ebene) zwar Projektion ist, daß jedoch nicht mehr gilt $H_b \cdot H_{b'} = 0$, falls b und b' fremd sind. Es gilt nur noch eine Gleichung der Form

$$H_b H_{b'} = \frac{1}{\lambda - \lambda'} H_b (M_b^* N_{b'} - N_b^* M_{b'}) H_{b'}$$

wo λ, λ' die λ -Koordinaten zweier Punkte von b und b' sind und die Abschätzungen $\|M_b Z_b\| \leq c l_b$, $\|N_b Z_b\| \leq c'$ gelten (l_b sei die Bogenlänge von b). Daß der Grenzwert $\int H_{db}$ trotzdem existiert, hängt zusammen mit der Aussage von Hilfssatz 12: Unter Voraussetzung der Gültigkeit obiger Formel für $H_b H_{b'}$ bleibt der Operator $\sum_b H_b$ gleichmäßig beschränkt für jede Wahl von Zerlegungen eines Bogens b mit eindeutiger Projektion auf die λ -Achse in Teilbögen b_v , bei der das Verhältnis des längsten Teilbogens b_v zum kürzesten zwischen zwei positiven Schranken liegt. Hilfsmittel zum Beweis dieser Behauptung ist folgendes Lemma: Für die n Zahlen $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ gelte

$$0 < a \leq \alpha_k - \alpha_{k-1} \leq b.$$

Dann besitzt die Matrix $((a_{jk}))$ mit $a_{jk} = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_k}$, $j \neq k$, $a_{jj} = 0$ die Schranke $\frac{4\pi + 2b}{a}$. Zur Herleitung dieses Lemmas benutzen wir wesentlich die Be-

schränktheit des Integralkernes $\frac{1}{x-y}$, die durch HILBERT nachgewiesen wurde.

Die §§ 1–6 der Arbeit bauen aufeinander auf, dagegen knüpfen die beiden Abschnitte § 7–8, § 9–12 sowie die §§ 13, 14, 15 und 16 je für sich an § 4 oder § 6 an; sie können daher unabhängig voneinander gelesen werden.

¹⁾ [6], Satz 5.

§ 9. Approximation von $F_K f$ durch Eigenpakete der Operatoren $A_{p_0}^j$ und Folgerungen.

Wir knüpfen wieder an § 6 an und bezeichnen im folgenden die Spektralscharen der Operatoren $A_{p_0}^1 = A^1 - \lambda_0 s^1 - \mu_0 t^1$, $A_{p_0}^2 = A^2 - \lambda_0 t^2 + \mu_0 s^2$ mit $E_{\alpha}^j(p_0)$, $j = 1, 2$, (α sei der Eigenwertparameter) und setzen

$$(9.1) \quad \begin{aligned} E_{\alpha}^1 &= E_{\alpha}^1(p_0) = E_{\alpha'}^1(p_0) - E_{\alpha'}^1(p_0), \quad \alpha' < \alpha'', \\ E_{\beta}^2 &= E_{\beta}^2(p_0) = E_{\beta''}^2(p_0) - E_{\beta''}^2(p_0), \quad \beta' < \beta''. \end{aligned}$$

Ist I das Rechteck der λ, μ -Ebene

$$\alpha' < \frac{\lambda - \lambda_0}{2} + \frac{\mu - \mu_0}{2} \leq \alpha'', \quad \beta' < \frac{\lambda - \lambda_0}{2} - \frac{\mu - \mu_0}{2} \leq \beta''$$

(dessen Seiten zu den Winkelhalbierenden $\lambda = \pm \mu$ des Koordinatenkreuzes parallel sind), so wollen wir das Produkt $E_{\alpha}^1 E_{\beta}^2$ mit $G_I = G_I(p_0)$ bezeichnen.

Die Zuordnung gerade dieses Rechteckes I zu der Projektion $E_{\alpha}^1 E_{\beta}^2$ wird durch folgendes nahegelegt: Ein Eigenvektor φ^1 mit $A_{p_0}^1 \varphi^1 = \alpha \varphi^1$, $\alpha' < \alpha \leq \alpha''$, für den also gilt $E_{\alpha}^1 \varphi^1 = \varphi^1$, stellt eine Lösung von $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0$ dar für die speziellen Parameterwerte $\lambda = \lambda_0 + \alpha$, $\mu = \mu_0 + \alpha$. Dies läßt es sinnvoll erscheinen, der Projektion E_{α}^1 in der λ, μ -Ebene die Strecke $\lambda = \lambda_0 + \alpha$, $\mu = \mu_0 + \alpha$, $\alpha' < \alpha \leq \alpha''$ zuzuordnen. Ebenso wird man E_{β}^2 und die Strecke $\lambda = \lambda_0 + \beta$, $\mu = \mu_0 - \beta$, $\beta' < \beta \leq \beta''$ einander zuordnen. Obiges Rechteck I ist nun so gewählt, daß es diese beiden Strecken einrahmt.

Durch diese Festsetzung und durch die Definition von F_I in § 4 haben wir insbesondere eine zweifache Deutung derselben λ, μ -Ebene vorgenommen: einmal als Ebene der Parameter λ, μ des Simultanspektrums von \underline{A} und \tilde{A} , zum anderen als Ebene der Parameter λ, μ , die in den Gleichungen

$$(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0, \quad (A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2) \varphi^2 = 0$$

vorkommen. Die Gleichungen (6.2) erlauben folgende Approximationsaussage.

Satz 6: Es sei K ein regulärer Bereich des Simultanspektrums und p_0 ein beliebiger Punkt dieses Bereiches. Δ_{α} und Δ_{β} mögen so ausgewählt sein, daß das mit ihrer Hilfe wie oben definierte Rechteck I den Bereich K ganz im Innern enthält, insbesondere sei also $p_0 \in I$, d. h. $\alpha' < 0 < \alpha''$, $\beta' < 0 < \beta''$.

Behauptung: Für f aus \mathfrak{H} gilt

$$(9.2) \quad \|F_K f - G_I F_K f\|_0 \leq c(I, K) \|F_K f\|$$

mit

$$c(I, K) = 4 \sqrt{2} c(K) \frac{\max_{p \in K} \overline{p p_0}}{\min_{p \in I} \overline{p p_0}} = 4 c(K) \frac{\max_{p \in K} \overline{p p_0}}{\min \{|\alpha'|, |\alpha''|, |\beta'|, |\beta''|\}}$$

($c(K)$ sei die in (6.1) auftretende Konstante.)

Beweis: Für den Bereich K sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, es gelten daher für den Operator F_K die Gleichungen (6.2). Wir benutzen sie speziell für den Fall $\vartheta = 0$ und multiplizieren die erste Gleichung von links

mit $(1 - E_{A_\alpha}^1(p_0))$. Wegen der Vertauschbarkeit von $A_{p_0}^1$ mit seiner Spektralschar ergibt sich

$$(1 - E_{A_\alpha}^1(p_0)) F_K f = (A_{p_0}^1)^{-1} (1 - E_{A_\alpha}^1(p_0)) [s^1 \underline{A}_{p_0} F_K f + t^1 \tilde{\underline{A}}_{p_0} F_K f].$$

Dabei muß noch bemerkt werden, daß $(A_{p_0}^1)^{-1}$ hier als die Reziproke des Operators $A_{p_0}^1$ im Raum $(1 - E_{A_\alpha}^1(p_0)) \mathfrak{H}_0$ aufzufassen ist, also auch dann einen Sinn hat, wenn die Reziproke von $A_{p_0}^1$ in \mathfrak{H}_0 nicht existiert.

Somit folgt

$$(9.3) \quad \|(1 - E_{A_\alpha}^1(p_0)) F_K f\|_0 \leq \frac{2c(K) \max_{p \in K} \overline{p p_0}}{\min\{|\alpha'|, |\alpha''|\}} \|F_K f\|,$$

wobei $c(K)$ die in (6.1) vorkommende Konstante ist. Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (6.2):

$$(9.4) \quad \|(1 - E_{A_\beta}^2(p_0)) F_K f\|_0 \leq \frac{2c(K) \max_{p \in K} \overline{p p_0}}{\min\{|\beta'|, |\beta''|\}} \|F_K f\|.$$

Es ist $1 - G_I = (1 - E_{A_\alpha}^1) + E_{A_\alpha}(1 - E_{A_\alpha}^2)$, also ergibt sich durch Zusammenfassung der Relationen (9.3) und (9.4) die Abschätzung (9.2) und der Satz ist bewiesen.

Satz 4 gibt eine Schranke für den Fehler der besten möglichen Approximation von $F_K f$ durch Elemente der Form $G_I u$. Man wird erwarten, daß man das Element $f_K = F_K f$, je mehr der Bereich K zu einem Punkt zusammenschrumpft, immer besser durch Linearkombinationen von Produkten $d E^1(p_0) v^1 \cdot d E^2(p_0) v^2$ der zu diesem Punkt gehörigen Eigendifferentiale wird approximieren können. Dies ist auch tatsächlich der Fall, sogar wenn man den relativen Fehler betrachtet, denn es folgt $\lim c(I, K) = 0$ jedenfalls, wenn I und K so gegen den Punkt p_0 konvergieren, daß der Durchmesser von K gegenüber der Entfernung des Punktes p_0 vom Rande des Rechteckes I in der Grenze beliebig klein wird.

Jedoch bemerkt man auch sofort, daß diese Abschätzung zur Gewinnung einer „Integraldarstellung“ $F_I = \lim_{r=1}^m G_{I_r} u_r$, wo die Rechtecke I_r das Rechteck I lückenlos und einfach überdecken sollen, nicht ausreicht, da die Abmessungen des approximierenden Rechteckes I im Verhältnis zu den Abmessungen von K in Abschätzung (9.2) unendlich groß werden müssen, damit der Fehler beliebig klein wird.

Es ist daher von entscheidender Bedeutung, daß der tatsächlich auftretende Fehler bei dieser Approximation eine nicht wesentlich kleinere Größenordnung haben kann, wie sie die oben angegebene Schranke besitzt. Das erkennt man z. B. schon an dem trivialen Beispiel

$$A^1 = A^2 = 1, \quad s^1 = t^1 = \frac{1}{2}, \quad s^2 = \frac{1}{3}, \quad t^2 = \frac{2}{3}.$$

Setzt man $\lambda_1 = \frac{5}{3}$, $\mu_1 = \frac{1}{3}$ und wählt man als Rechteck I das Rechteck

$$-\alpha < \frac{\lambda - \lambda_1}{2} + \frac{\mu - \mu_1}{2} \leq 0, \quad -\frac{1}{6}\alpha < \frac{\lambda - \lambda_1}{2} - \frac{\mu - \mu_1}{2} \leq \frac{1}{6}\alpha, \quad \alpha > 0$$

und schließlich den Punkt $p_0: \lambda_0 = \lambda_1 - \frac{3}{4}\alpha$, $\mu_0 = \mu_1 - \frac{3}{4}\alpha$, so ergibt sich für

jedes f die Relation $F_I f = f$, aber $G_I F_I f = 0$, also ist eine Approximation solcher $F_I f$ nicht durch ein Element der Form $G_I u$, u aus \mathfrak{D}_0 möglich.

Will man eine schärfere Abschätzung als die Abschätzung (9.2), so muß man den Anstieg der Seiten des Rechtecks I , für das F_I approximiert werden soll, geeigneter wählen. Wir werden das in § 11 unter schärferen Voraussetzungen über die Operatoren A^1 und A^2 durchführen. Eine weitere Folge aus dem Approximationssatz ist

Satz 7: Wenn $A_{p_0}^1$ oder $A_{p_0}^2$ für ein $p_0 = \{\lambda_0, \mu_0\}$ eine beschränkte, überall in \mathfrak{H}^1 bzw. \mathfrak{H}^2 erklärte Reziproke besitzt, so ist das Simultanspektrum von A und \tilde{A} in diesem Punkte leer, d. h. es gibt ein Rechteck I , welches p_0 im Innern enthält, so daß $F_I = 0$ ist.

Beweis: Wir können uns auf den Fall beschränken, daß $(A_{p_0})^{-1}$ beschränkt ist. Dann ist p_0 nach § 6 ein regulärer Punkt, denn es gilt nach Hilfssatz 5 für $\alpha = \mu_0$ die Bedingung (1_s) und für $\alpha = \lambda_0$ die Bedingung (1_t).

Es gilt ferner $E_{\Delta_\alpha}^1(p_0) = E_\alpha^1(p_0) - E_{-\alpha}^1(p_0) = 0$ für $0 < \alpha \leq \alpha_0$, weil die Spektralschar $E_\alpha^1(p_0)$ in einer Umgebung von $\alpha = 0$ konstant ist. Daher folgt $G_I = 0$ für diese Δ_α und also nach (9.2) die Abschätzung $\|F_K f\| \leq c(I, K) \|F_K f\|$ für jedes K , das innerhalb von I liegt und den Punkt p_0 enthält. Wählt man K als hinreichend kleines Rechteck I' , so kann man stets erreichen, daß $c(I, K) < 1$ wird. Dann folgt aber aus obiger Abschätzung $F_{I'} f = 0$, $f \in \mathfrak{H}$. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 10. Ein Hilfssatz über Lösungen der Gleichung $X - P X Q = V$.

Es sei \mathfrak{R} ein (separabler) Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (u, v) und D in $\mathfrak{D}_D \subseteq \mathfrak{R}$ hypermaximal; es sei $D \geq d > 0$. Mit Hilfe von D bilde man die Form $(u, v)_d = (u, D v)$, $u, v \in \mathfrak{D}_D$ und ergänze den Bereich \mathfrak{D}_D durch ideale Elemente zu einem hinsichtlich $(u, v)_d$ vollständigen Hilbertraum \mathfrak{R}_d . Man folgert leicht, daß \mathfrak{R}_d separabel ist und als dichter Unterraum von \mathfrak{R} gedeutet werden kann; für u aus \mathfrak{R}_d gilt $\|u\|_d \geq d^{\frac{1}{2}} \|u\|$ mit $\|u\|_d = [(u, u)_d]^{\frac{1}{2}}$.

Hilfssatz 8: Es sei P in \mathfrak{R}_d beschränkt und hermitesch in bezug auf $(u, v)_d$, Q in \mathfrak{R} beschränkt und hermitesch in bezug auf (u, v) . Für u aus \mathfrak{R}_d , v aus \mathfrak{R} gelte

$$(10.1) \quad \|P u\|_d \leq \gamma \|u\|_d, \quad \|Q v\| \leq (\gamma)^{-1} \|v\|.$$

Die Reziproke $W = (1 - (\gamma Q)^2)^{-1}$ möge als (möglicherweise unbeschränkter) Operator in einem dichten Unterraum \mathfrak{D}_W des Raumes \mathfrak{R} existieren. Der Operator V möge überall in \mathfrak{R} erklärt sein; für v aus \mathfrak{R} sei $V v$ aus \mathfrak{R}_d und es gelte

$$(10.2) \quad \|V v\|_d \leq c_V \|v\|.$$

Behauptung: Die Operatorengleichung

$$(10.3) \quad X - P X Q = V$$

besitzt eine Lösung X , die in der Vereinigungsmenge \mathfrak{D}_X aller Definitionsbereiche $\mathfrak{D}_{W^{1+\kappa}}$ (κ beliebig aus $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$) erklärt und durch die im Sinne der Metrik $\|u\|_d$ konvergente Reihe

$$(10.4) \quad X v = \sum_{n=0}^{\infty} P^n V Q^n v, \quad v \text{ aus } \mathfrak{D}_X,$$

darstellbar ist. Es liegt Xv in \mathfrak{R}_d für jedes v aus \mathfrak{D}_X und es gilt die Abschätzung

$$(10.5) \quad \|Xv\|_d \leq c_Y c(\kappa) \|W^{1+\kappa} v\| \quad \text{für } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{W^{1+\kappa}}, 0 < \kappa \leq \frac{1}{2}.$$

Dabei ist eine mögliche Schranke $c(\kappa)$ gegeben durch

$$(10.6) \quad c(\kappa) = 2 + 2e^{\frac{1}{2}-\kappa} \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa) [1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} (\frac{1}{2} - \kappa) \{\zeta(1 + 2\kappa)\}^{\frac{1}{2}}]$$

($\zeta(z)$ die RIEMANNsche ζ -Funktion), insbesondere also die Wahl von $c(\kappa)$ unabhängig von allen weiteren Eigenschaften der Operatoren P , Q und V möglich.

Jede Lösung Y in \mathfrak{D}_Y von (10.3), deren Definitionsbereich \mathfrak{D}_Y einen Bereich \mathfrak{D}_{W^κ} für ein spezielles reelles κ_0 enthält und diesen Bereich in einen Teilbereich von \mathfrak{R}_d transformiert, ist in $\mathfrak{D}_{W^{\kappa_0}} \mathfrak{D}_X$ mit X identisch, sofern sie dort nur einer Abschätzung

$$(10.7) \quad \|Yv\| \leq c_Y \|W^{\kappa_0} v\|$$

mit beliebigem c_Y genügt.

Beweis: Wir können uns offenbar auf den Fall $\gamma = 1$ beschränken, denn um diesen zu erreichen, brauchen wir nur P durch $(\gamma)^{-1}P$ und Q durch γQ zu ersetzen; dadurch ändern sich W und die Formeln (10.2) bis (10.7) nicht.

Zunächst zeigen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P^n V Q^n v$ für v aus $\mathfrak{D}_{W^{1+\kappa}}, 0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$. Für reelles x mit $|x| < 1$ und für $\kappa > 0$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=n}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{r} x^r \right| &\leq |x|^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{r} |x|^r = |x|^n (1 - |x|)^{-\frac{1}{2}+\kappa} \\ &\leq 2 |x|^n (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}+\kappa}, \\ \left| \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{r} x^r \right| &\leq 2 |x|^n (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}+\kappa}. \end{aligned}$$

Daher existieren

$$\begin{aligned} Z_n^- &= \sum_{r=n}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{r} Q^r \\ &\quad \text{für } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{(1-Q)^{-\frac{1}{2}+\kappa}}, \\ Z_n^+ &= \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{r} Q^r, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

und es gilt

$$(10.8) \quad \|Z_n^\pm v\| \leq \| |Q|^n W^{\frac{1}{2}+\kappa} v \|.$$

Wir setzen ferner $a_n^- = \left[\binom{-\frac{1}{2}+\kappa}{n} \right]^{-1}$, $a_n^+ = (-1)^n a_n^-$.

Es gilt die Abschätzung

$$(10.9) \quad |a_n^\pm| \leq c_1(\kappa) (n+1)^{\frac{1}{2}-\kappa},$$

wo etwa $c_1(\kappa) = e^{\frac{1}{2}-\kappa} \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa)$ gewählt werden kann.

Endlich benötigen wir noch die Ungleichung $\|Q^n(1-Q^2)^{\frac{1}{2}}v\| \leq (n+1)^{-\frac{1}{2}}\|v\|$, $v \in \mathfrak{R}$, die man aus der durch Differentiation zu verifizierenden Formel $|x|^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \leq (n+1)^{-\frac{1}{2}}$, $|x| \leq 1$, folgert.

Zerlege nun P in einen positiven und einen negativen Bestandteil:
 $P = P_+ + P_-$; $(u, P_+ u)_d \geq 0$; $(u, P_- u)_d \leq 0$; dann wird

$$\sum_{n=0}^N P^n V Q^n = \sum_{n=0}^N (P_+)^n V Q^n + \sum_{n=0}^N (P_-)^n V Q^n;$$

für v aus $\mathfrak{D}_{W^{1+\kappa}}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (P_+)^n V Q^n v &= \sum_{n=0}^N (P_+)^n V a_n^+ (Z_{n+1}^+ - Z_n^+) v = -a_0^+ V Z_0^+ v + \\ &+ a_N^+ (P_+)^N V Z_{N+1}^+ v - \sum_{n=1}^N [a_{n-1}^+ (P_+)^{n-1} - a_n^+ (P_+)^n] V Z_n^+ v \\ &= -a_0^+ V Z_0^+ v + a_N^+ (P_+)^N V Z_{N+1}^+ v - \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ (P_+)^n (1 - P_+) V Z_{n+1}^+ v - \\ &- \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ \left(1 - \frac{a_{n+1}^+}{a_n^+}\right) (P_+)^{n+1} V Z_{n+1}^+ v. \end{aligned}$$

Es folgt zunächst $\|a_0^+ V Z_0^+ v\|_d \leq c_V \|W^{\frac{1}{2}+\kappa} v\| \leq c_V \|W^{1+\kappa} v\|$ und weiter

$$\begin{aligned} \|a_N^+ (P_+)^N V Z_{N+1}^+ v\|_d &\leq c_1(\kappa) (N+1)^{\frac{1}{2}-\kappa} c_V \| |Q|^{N+1} W^{\frac{1}{2}+\kappa} v \| \\ &\leq c_1(\kappa) (N+1)^{\frac{1}{2}-\kappa} (N+2)^{-\frac{1}{2}} c_V \|W^{1+\kappa} v\|, \end{aligned}$$

also gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N^+ (P_+)^N V Z_{N+1}^+ v = 0$.

Man hat für u aus \mathfrak{R}_d :

$$\begin{aligned} &\left\| u, \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ (P_+)^n (1 - P_+) V Z_{n+1}^+ v \right\|_d^2 \\ &\leq c_V^2 \sum_{n=0}^{N-1} |a_n^+|^2 \|(P_+)^n (1 - P_+) u\|_d^2 \sum_{n=0}^{N-1} \| |Q|^{n+1} W^{\frac{1}{2}+\kappa} v \|^2 \\ &\leq c_V^2 (c_1(\kappa))^2 \left((1 - P_+) u, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{1-2\kappa} (P_+)^{2n} (1 - P_+) u \right)_d (W^{\frac{1}{2}+\kappa} v, (1 - Q^2)^{-1} W^{\frac{1}{2}+\kappa} v) \\ &\leq c_V^2 (c_1(\kappa))^2 \|u\|_d^2 \|W^{1+\kappa} v\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, indem man $u = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ (P_+)^n (1 - P_+) V Z_{n+1}^+ v$ einsetzt,

$$(10.10) \quad \left\| \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ (P_+)^n (1 - P_+) V Z_{n+1}^+ v \right\|_d \leq c_1(\kappa) c_V \|W^{1+\kappa} v\|.$$

Endlich gilt für u aus \mathfrak{R}_d :

$$\begin{aligned} &\left\| u, \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ \left(1 - \frac{a_{n+1}^+}{a_n^+}\right) (P_+)^{n+1} V Z_{n+1}^+ v \right\|_d^2 \\ &\leq \frac{(2\kappa-1)^2}{2} c_V^2 (c_1(\kappa))^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1-2\kappa} \|u\|_d^2 \|W^{1+\kappa} v\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} a_n^+ \left(1 - \frac{a_{n+1}^+}{a_n^+}\right) (P_+)^{n+1} V Z_{n+1}^+ v \right\|_d \leq c_2(\kappa) c_V \|W^{1+\kappa} v\|$$

mit

$$c_2(\kappa) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) c_1(\kappa) [\zeta(1 + 2\kappa)]^{\frac{1}{2}}.$$

Zusammenfassend hat man einerseits die Konvergenz obiger Reihe im Sinne der Metrik $\|u\|_d$, ihr Grenzelement liegt also in \mathfrak{R}_d , andererseits gilt

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (P_+)^n V Q^n v \right\|_d \leq \frac{1}{2} c(\kappa) c_V \|W^{1+\kappa} v\|$$

mit $\frac{1}{2} c(\kappa) = 1 + e^{\frac{2}{3}-\kappa} \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa) [1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} (\frac{1}{2} - \kappa) \{\zeta(1 + 2\kappa)\}^{\frac{1}{2}}]$.

Genau dieselbe Abschätzung erzielt man unter Verwendung von a_n^- und Z_n^- statt a_n^+ und Z_n^+ für $\sum_{n=0}^{\infty} (P_-)^n V Q^n v$.

Infolgedessen ist durch (10.4) der Operator X für alle v aus $\mathfrak{D}_{W^{1+\kappa}}$, $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ erklärt; es liegt Xv in \mathfrak{R}_d und genügt der Ungleichung (10.5). Zuzufolge der Beschränktheit von P in \mathfrak{R}_d gilt

$$P X Q v = \sum_{n=1}^{\infty} P^n V Q^n v = (X - V) v;$$

X genügt also Gleichung (10.3).

Ist umgekehrt Y eine Lösung von Gleichung (10.3), die für irgendein κ_0 mindestens in $\mathfrak{D}_{W^{\kappa_0}}$ erklärt ist und einer Abschätzung (10.7) genügt, für die ferner Yv in \mathfrak{R}_d liegt, so folgt durch n -fache Iteration der Gleichung (10.3) die Beziehung

$$Yv = \sum_{r=0}^{n-1} P^r V Q^r v + P^n Y Q^n v.$$

Es gilt

$$\|P^n Y Q^n v\|_d \leq C_Y \| |Q|^n W^{1+\kappa_0} v \| \quad \text{für } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{W^{\kappa_0}},$$

und da wegen der Existenz von $W = (1 - Q^2)^{-1}$ die Punkte $\lambda = \pm 1$ nicht Punkteigenwerte von Q sind, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n Y Q^n v\|_d = 0$; also gilt $Yv = \sum_{n=1}^{\infty} P^n V Q^n v$ für v aus $\mathfrak{D}_{W^{\kappa_0}}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung: Es ist nicht möglich, die Aussage des Hilfssatzes auch auf den Fall $\kappa = 0$ auszudehnen. Zum Beispiel gibt es für den Operator $X(1 - Q^2)$ weder eine Schranke, die unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 8 von der speziellen Auswahl der Operatoren P und Q unabhängig ist, noch kann man überhaupt nur die Beschränktheit von $X(1 - Q^2)$ bei beliebigem P, V, Q beweisen.

Denn fassen wir etwa den Spezialfall ins Auge, daß P und Q bezüglich irgendeines orthogonalen, normierten Koordinatensystems in \mathfrak{R} gegeben sind durch die Matrizen $P = \left(\left(\sum_i \mu_i u_{il}^{-1} u_{ik} \right) \right)$, $Q = ((\lambda_i \delta_{ik}))$, $|\lambda_i|, |\mu_i| < 1$, wo $U = ((u_{ik}))$ die Matrix irgendeines in \mathfrak{R} beschränkten Operators sei, der in \mathfrak{R} auch eine beschränkte Reziproke $U^{-1} = ((u_{ik}^{-1}))$ besitzt, so folgt

$$X(1 - Q) = \left(\left(\sum_i u_{il}^{-1} u_{ik} \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k \mu_i} \right) \right).$$

Hierbei ist die Matrix U im Rahmen obiger Voraussetzungen noch beliebig wählbar, denn wir können durch $(u, v)_d = (u, U^* U v)$ stets eine positiv definite Metrik angeben, mit der P hermitesch und $\|P\|_d \leq 1$ wird und bei der sogar $V = 1$ gesetzt werden kann. Soll nun hier $X(1 - Q^2)$ immer beschränkt sein, so müßte auch die Matrix $\left(\left(u_{ik} \frac{1 - \lambda_k^2}{1 - \lambda_k \mu_i} \right) \right)$ für jede Auswahl von λ_i, μ_k, u_{ik} im Rahmen obiger Voraussetzungen beschränkt sein. Man kann sich aber mit Hilfe des von I. SCHUR [12] eingeführten Begriffes der Multiplikatorensysteme beschränkter Bilinearformen überlegen, daß das nicht der Fall ist.

Dagegen gilt die Aussage des Hilfssatzes 8 für $\kappa = 0$ einschließlich, sofern man die Voraussetzungen (10.1) abändert in

$$(10.11) \quad \|P u\|_d \leq \gamma_P \|u\|_d, \quad \|Q v\| \leq \gamma_Q \|v\|, \quad \gamma_P \cdot \gamma_Q < 1.$$

In diesem Fall dürfen sogar die Voraussetzungen über Hermitezität von P und Q fallengelassen werden. Wir haben daher

Hilfssatz 8a: Für den (nicht notwendig hermiteschen) beschränkten Operator P des Raumes \mathfrak{R}_d und den (nicht notwendig hermiteschen) beschränkten Operator Q des Raumes \mathfrak{R} sollen die Abschätzungen (10.11) erfüllt sein. Der Operator V sei überall in \mathfrak{R} erklärt, für v aus \mathfrak{R} sei Vv aus \mathfrak{R}_d , und es gelte die Abschätzung (10.2).

Behauptung: Es gibt eine und nur eine beschränkte Lösung der Gleichung $X - P X Q = V$; für diese gilt die Entwicklung $X = \sum_{n=0}^{\infty} P^n V Q^n$ und demgemäß die Abschätzung

$$(10.12) \quad \|X v\|_d \leq \frac{c_V}{1 - \gamma_P \gamma_Q} \|v\|, \quad v \in \mathfrak{R}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß die Reihe $X = \sum_{n=0}^{\infty} P^n V Q^n$ durch die unter obiger Voraussetzung $\gamma_P \gamma_Q < 1$ konvergente geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_P \gamma_Q)^n$ majorisiert wird.

Es ist möglich, den von E. HEINZ [6] über die beschränkten Lösungen der Gleichung $A X + X B = Q$ ausgesprochenen Satz²⁾ mitsamt der dort hergeleiteten Abschätzung elementar aus Hilfssatz 8a zu folgern.

§ 11. Verbesserung der Abschätzungen des § 9 im Falle, daß A^1 ein diskretes Spektrum besitzt.

In den nachfolgenden beiden Paragraphen soll für die Operatoren A^1 in \mathfrak{H}^1 und A^2 in \mathfrak{H}^2 stets die (schärfere) Voraussetzung gelten, daß einer von ihnen ein diskretes Spektrum besitze. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden wir das von A^1 annehmen. Die Bedingungen (1_s) und (1_t) sind dann für alle α erfüllt, es sind alle endlichen Bereiche der λ, μ -Ebene reguläre Mengen des Simultanspektrums, ohne daß über A^2 außer der Hypermaximalität irgend etwas gefordert werden muß. Für A^1 gelten die Aussagen 1) bis 5) des

²⁾ Satz 5, S. 427.

§ 5. Satz 7 liefert also, daß das Simultanspektrum von A und \tilde{A} in allen Punkten leer ist, die nicht auf mindestens einer der Kurven \mathfrak{C}_ν^1 , $\nu = 1, 2, \dots$, liegen.

Ist b ein abgeschlossener Kurvenbogen auf einem der \mathfrak{C}_ν und sind K und K' zwei Bereiche der λ, μ -Ebene, die von den Punkten der Kurven \mathfrak{C}_ν^1 genau diesen Bogen b enthalten, so gilt offenbar $F_K = F_{K'}$. Das berechtigt uns, anstatt der Bezeichnung F_K die Bezeichnung F_b zu verwenden. Wir wollen für diese Projektionen F_b und damit für die Spektralscharen E_λ und \tilde{E}_μ von \underline{A} und $\tilde{\underline{A}}$ eine Darstellung durch Integrale angeben, in denen die Spektralscharen $E_\alpha^1(p_0)$; $E_\beta^2(p_0, \theta)$ der Operatoren $A_{p_0}^1 = A^1 - \lambda_0 s^1 - \mu_0 t^1$ bzw.

$$A_{p_0, \theta}^2 = (t_\theta^2)^{-1} A_{p_0}^2 = (-s^2 \sin \theta + t^2 \cos \theta)^{-1} (A^2 - \lambda_0 t^2 + \mu_0 s^2)$$

als Differentiale auftreten. Der Operator $A_{p_0, \theta}^2$ ist dabei für $-\pi/2 < \theta < 0$ erklärt und in bezug auf das positiv definite Skalarprodukt $(u^2, v^2)_\theta = (u^2, t_\theta^2 v^2)$ hermitesch, ja sogar hypermaximal, das kann man aus der Beschränktheit von t_θ^2 und $(t_\theta^2)^{-1}$ für diese θ folgern. $E_\beta^2(p_0, \theta)$ besteht also aus Projektionsoperatoren, die in bezug auf die zu (u^2, v^2) äquivalente Metrik $(u^2, v^2)_\theta$ orthogonal projizieren. Daher ergibt sich die Notwendigkeit, das Produkt der Differentiale $dE_\alpha^1 dE_\beta^2$ zu einer Orthogonalprojektion in bezug auf (u, v) umzueichen.

Hilfssatz 9: Es sei P eine Orthogonalprojektion in bezug auf das (positiv definite) Skalarprodukt $(u, v)_\theta = (u, t_\theta^2 v)_\theta$, $-\pi/2 < \theta < 0$, d. h. es sei $P^2 = P$, $(Pu, v)_\theta = (u, Pv)_\theta$, u, v aus \mathfrak{H}_0 . Der Raum $\mathfrak{R}_P = P \mathfrak{H}_0$ sei auch in bezug auf die Metrik $\|u\|$ des Raumes \mathfrak{H} abgeschlossen. Ist dann C_P der durch die Gleichung

$$(u, C_P v)_\theta = (u, v) = (u, C(t_\theta^2)^{-1} v)_\theta$$

für u, v aus \mathfrak{R}_P definierte Operator des Raumes \mathfrak{R}_P in sich, so berechnet sich der Operator Q , der den Raum \mathfrak{H} hinsichtlich seines Skalarproduktes (u, v) orthogonal auf \mathfrak{R}_P projiziert, nach der Gleichung $Q = (C_P)^{-1} P C(t_\theta^2)^{-1}$.

Beweis: Für jedes v aus \mathfrak{H} ist Cv ein Element aus \mathfrak{H}_0 . Aus der vorausgesetzten Abgeschlossenheit des Raumes \mathfrak{R}_P hinsichtlich der Metrik $\|v\|$ folgt die Beschränktheit des Operators $(C_P)^{-1}$, das kann man durch eine kleine Überlegung zeigen. Also ist der Operator $Q = (C_P)^{-1} P C(t_\theta^2)^{-1}$ in ganz \mathfrak{H} erklärt. Für v aus \mathfrak{R}_P gilt $C_P v = P C(t_\theta^2)^{-1} v$, denn es ist $P C(t_\theta^2)^{-1} v$ aus \mathfrak{R}_P und für u aus \mathfrak{R}_P folgt

$$(u, P C(t_\theta^2)^{-1} v)_\theta = (u, C(t_\theta^2)^{-1} v)_\theta = (u, v).$$

Daher gilt $Qv = (C_P)^{-1} P C(t_\theta^2)^{-1} v = v$.

Dagegen ergibt sich für ein v mit $(v, u) = 0$, u aus \mathfrak{R}_P die Relation

$$(P C(t_\theta^2)^{-1} v, u)_\theta = (C(t_\theta^2)^{-1} v, u)_\theta = (v, u) = 0, u \text{ aus } \mathfrak{R}_P.$$

Da $P C(t_\theta^2)^{-1} v$ selbst aus \mathfrak{R}_P ist, folgt daraus $P C(t_\theta^2)^{-1} v = 0$, also

$$Qv = (C_P)^{-1} P C(t_\theta^2)^{-1} v = 0.$$

Für u, v aus \mathfrak{H} schließlich gilt

$$\begin{aligned}(u, Qv) &= (C(t_\theta^2)^{-1}u, (C_P)^{-1}P C(t_\theta^2)^{-1}v)_\theta \\ &= ((C_P)^{-1}P C(t_\theta^2)^{-1}u, C(t_\theta^2)^{-1}v)_\theta = (Qu, v).\end{aligned}$$

Also ist Q in bezug auf (u, v) hermitesch und projiziert \mathfrak{H} auf \mathfrak{R}_P . Das ist die Behauptung des Hilfssatzes.

Sei nun b ein Bogenstück einer Kurve \mathfrak{C}_ν^1 mit den Endpunkten p' und p'' . Da die Kurve \mathfrak{C}_ν^1 streng monoton fällt, besitzt die Bogensehne $\overline{p'p''}$ eine Parameterdarstellung

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha \cos \vartheta_0, \quad \mu = \mu_0 + \alpha \sin \vartheta_0, \quad -\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_0$$

mit einem ϑ_0 aus $-\frac{\pi}{2} < \vartheta_0 < 0$. $p_0 = \{\lambda_0, \mu_0\}$ ist dabei der Mittelpunkt der Sehne $\overline{p'p''}$, α_0 der Abstand $\overline{p'p_0}$. Es existiert also der zu Anfang des Paragraphen definierte Operator A_{p_0, α_0}^2 und seine Spektralschar $E_\alpha^2(p_0, \vartheta_0)$. Wir ordnen der am linken, oberen Ende offenen, am rechten unteren Ende abgeschlossenen Sehne $\overline{p'p''}$ die Projektion $E_{\overline{p'p''}}^2 = E_{\alpha_0}^2(p_0, \vartheta_0) - E_{-\alpha_0}^2(p_0, \vartheta_0)$ zu. Ist p^* ferner irgendein Punkt des Bogens b , so sei $E_{p^*}^1$ die in bezug auf (u^1, v^1) orthogonale Projektion von \mathfrak{H}^1 auf den Nullraum von $A_{p^*}^1$.

Wir definieren $G_b = E_{p^*}^1 \cdot E_{\overline{p'p''}}^2$. Nach Hilfssatz 9 können wir die zu G_b äquivalente Orthogonalprojektion H_b in bezug auf (u, v) darstellen in der Form $H_b = (C_{G_b})^{-1} G_b C(t_\theta^2)^{-1}$. Wir wollen nun zeigen, daß der Operator H_b für kleine Bögen b eine gute Approximation des Operators F_b darstellt, wenn wir jetzt unter b auch das links oben offene, rechts unten abgeschlossene Bogenstück verstehen und F_b demgemäß erklären. Da wir einer Gleichmäßigkeitsaussage für die Güte der Approximation bedürfen, wollen wir uns im folgenden stets beschränken auf Bögen b , die Teilbögen eines endlichen, abgeschlossenen Bogens \hat{b} einer der Kurven \mathfrak{C}_ν^1 sind, welcher frei von Schnittpunkten der Kurve \mathfrak{C}_ν^1 mit anderen Kurven $\mathfrak{C}_{\nu'}^1$, $\nu' \neq \nu$ ist. Auch soll die Länge $2\alpha_0$ der Bogensehne stets unterhalb einer festen Zahl $2\hat{\alpha}$ liegen, die noch näheren Bestimmungen unterworfen werden wird. \hat{I} sei ein beliebiges, aber für den Beweis zunächst festgehaltenes, achsenparalleles Rechteck, das den Bogen \hat{b} umschließt.

Hilfssatz 10: Es mögen die Enden p', p'' des Bogens b beide nicht simultane Punkteigenwerte von A und \tilde{A} sein und es werde gesetzt $W_b = (\alpha_0)^2 |A_{p', \alpha_0} A_{p'', \alpha_0}|^{-1}$. Dann gilt für jedes g aus \mathfrak{H} , \hat{f} aus $\mathfrak{D}_{W_b}^*$ und für $\alpha_0 < \hat{\alpha}$, $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$(11.1) \quad |(g, (F_b - H_b) F_{\hat{I}} f)| \leq \alpha^{1/2} c(\kappa, \hat{I}) \{ \|g\| \|W_b^* F_b f\| + \|H_b g\| \|f\| + \|W_b^* f\| \}$$

mit einer Konstanten $c = c(\kappa, \hat{I})$, die nicht von der speziellen Lage von b auf \hat{b} abhängt.

Der Beweis wird in einer oft wiederholten Anwendung der Formeln (6.2) und des Hilfssatzes 8 bestehen. Um dies zu erleichtern, wollen wir folgendes vorausbemerken.

Wir zeichnen in der λ, μ -Ebene für beliebiges $p_1 = \{\lambda_1, \mu_1\}$ und ϑ_1 die Gerade $\lambda = \lambda_1 + \alpha \cos \vartheta_1$, $\mu = \mu_1 + \alpha \sin \vartheta_1$. b_1 sei ein beliebiger abgeschlossener

Kurvenbogen (s. Fig. 2). Die senkrechte Projektion von b auf die Gerade g_{p_1, θ_1} sei begrenzt durch die Punkte q_1', q_1'' . β sei der größte, β_m der kleinste der Abstände aller Punkte der Strecke $q_1' q_1''$ von p_1 , ebenso γ der größte, γ_m der kleinste der Abstände aller Punkte p des Bogens b von der Geraden g_{p_1, θ_1} , und schließlich δ der größte, δ_m der kleinste der spitzen Winkel zwischen $p p_1$ und g_{p_1, θ_1} , wenn p alle Punkte von b durchläuft. Dann gelten für A_{p_1, θ_1} und $\tilde{A}_{p_1, \theta_1}$ die Abschätzungen

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \beta_m \|F_b u\| &\leq \|A_{p_1, \theta_1} F_b u\| \leq \beta \|F_b u\| \\ \gamma_m \|F_b u\| &\leq \|\tilde{A}_{p_1, \theta_1} F_b u\| \leq \gamma \|F_b u\| \\ \operatorname{tg} \delta_m \|F_b u\| &\leq \|\tilde{A}_{p_1, \theta_1} (A_{p_1, \theta_1})^{-1} F_b u\| \leq \operatorname{tg} \delta \|F_b u\|. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt dabei nur, falls $(A_{p_1, \theta_1})^{-1}$ existiert. Wir bezeichnen mit c_1, c_2, \dots positive Konstanten, die nicht von der speziellen Lage von b auf \tilde{b} abhängen.

Endlich werde verabredet, daß wir in diesem Paragraphen, auch wenn die Reziproke eines der Operatoren $A_p^1; A_{p, \theta}^2; A_{p, \theta}; \tilde{A}_{p, \theta}$ usw. im strengen Sinne als Operator von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{H}_0 nicht existiert, wir doch z. B. $(A_p^1)^{-1} u$ schreiben wollen für den Fall, daß u aus $(1 - E_p^1) \mathfrak{H}_0$ ist. Wir meinen dann die (sicher existierende) Reziproke von A_p^1 in dem auf seinem Nullraum orthogonalen Raum. Entsprechend $(A_{p, \theta}^2)^{-1}$ usw. Es werde folgende Konstruktion verwendet (Fig. 3):

Zunächst sei $\hat{\alpha} < 1$ vorausgesetzt. Auf der Geraden g_{p_0, θ_0} errichte man in den Abständen $k \cdot (\alpha_0)^{\frac{1}{2}}, k = 1, 2, \dots, r$ und $k = -1, -2, \dots, -r$ die Lote und bezeichne ihre Schnittpunkte mit der Kurve \mathfrak{C}_1^1 mit p_k', p_k , $k = 1, \dots, r$. Die natürliche Zahl r sei dabei so gewählt, daß gilt $(r-1)(\alpha_0)^{\frac{1}{2}} < (\alpha_0)^{\frac{1}{2}} \leq r(\alpha_0)^{\frac{1}{2}}$. Wir bezeichnen die Bögen $p' p_1, p_1 p_2', \dots, p_{r-1}' p_r'$ bzw. $p'' p_1', p_1' p_2', \dots, p_{r-1}' p_r'$, bei denen wir immer den rechten unteren Randpunkt noch zum Bogen rechnen, den linken oberen jedoch nicht, mit b_k' bzw. $b_k'', k = 1, \dots, r$. Wählt man $\hat{\alpha}$ hinreichend klein, so kann man immer den ganzen Bogen $p' p_r'$ in ein achsenparalleles, rechts und oben abgeschlossenes, links und unten offenes Rechteck \tilde{I} einspannen, so daß der Abstand des Punktes p_0 vom Rande dieses Rechtecks größer ist als $c_1(\alpha_0)^{1/2}$ und daß keine anderen Punkte der Kurven \mathfrak{C}_1^1 in \tilde{I} enthalten sind.

Mit diesen Festsetzungen wird nun

$$(11.3) \quad (F_b - H_b) F_{\tilde{I}} = (1 - H_b) F_b - H_b (F_{\tilde{I}} - F_{\tilde{I}}) - \sum_{k=2}^r H_b (F_{b_k'} + F_{b_k''}) - H_b (F_{b_1'} + F_{b_1''}).$$

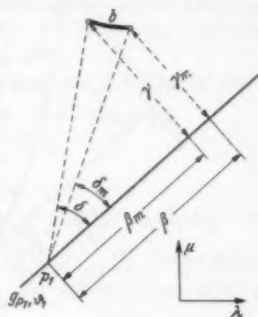


Fig. 2

Zur Gewinnung von (11.1) schätzen wir die rechts auftretenden vier Terme einzeln ab.

1. Es ist $H_b G_b = G_b$, daher folgt $(1 - H_b) F_b = (1 - H_b) (1 - G_b) F_b$,

$$\|(1 - H_b) F_b f\| \leq \sqrt{2} \|(1 - G_b) F_b f\|_0 \leq \sqrt{2} \|(1 - E_{p^*}^1) F_b f\|_0 + \\ + \sqrt{2} \|E_{p^*}^1 (1 - E_{p^*}^2) F_b f\|_0.$$

Es gilt $\|(A_{p^*}^1)^{-1} (1 - E_{p^*}^1) u\| \leq c_2 \|u\|$, aus (6.2) ergibt sich also unter Beachtung der Regeln (11.2):

$$\|(1 - E_{p^*}^1) F_b f\|_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \|(A_{p^*}^1)^{-1} (1 - E_{p^*}^1) \left[\underline{A_{p^*, \frac{1}{2}}} + (t^1 - s^1) \tilde{\underline{A_{p^*, \frac{1}{2}}}} \right] F_b f\|_0 \\ \leq c_3 \alpha_0 \|F_b f\|.$$

Für den Operator $X = (1 - E_{p^*}^2) F_b W_b$ folgt aus (6.2) die Gleichung

$$X - (A_{p_0, \theta_0}^2)^{-1} X A_{p_0, \theta_0} F_b = - (A_{p_0, \theta_0}^2)^{-1} (1 - E_{p^*}^2) (t_{\theta_0}^2)^{-1} s_{\theta_0}^2 \tilde{\underline{A_{p_0, \theta_0}}} W_b F_b.$$

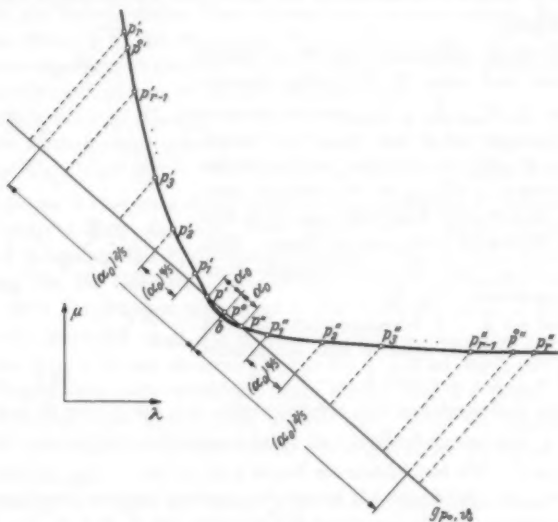


Fig. 3

Es sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 8 erfüllt, insbesondere folgt aus (11.2): $\| - (A_{p_0, \theta_0}^2)^{-1} (1 - E_{p^*}^2) (t_{\theta_0}^2)^{-1} s_{\theta_0}^2 \tilde{\underline{A_{p_0, \theta_0}}} W_b F_b v \| \leq c_4 \alpha_0 \|v\|$, denn man hat $\|(A_{p_0, \theta_0}^2)^{-1} (1 - E_{p^*}^2) u\| \leq (\alpha_0)^{-1}$, aber $\|\underline{A_{p_0, \theta_0}} W_b F_b\| \leq c_5 (\alpha_0)^2$. Die Lösung X erfüllt überdies die Voraussetzung (10.7) mit $W = W_b F_b$ und $x_0 = 1$, daher hat man

$$\|X v\|_0 \leq \alpha_0 c_4 c(\kappa) \|W_b^{1+\kappa} F_b v\|$$

für v aus $\mathfrak{D}_{(W_b F_b)^{1+\kappa}}$, also

$$\|(1 - E_{p^*}^1) F_b f\|_0 \leq \alpha_0 c_4 c(\kappa) \|W_b^\kappa F_b f\|$$

für f aus $\mathfrak{D}_{(W_b)^\kappa}$.

Insgesamt ergibt sich somit $\|(1 - H_b) F_b f\| \leq \alpha_0 c_6 c(\kappa) \|W_b^n F_b f\|, 0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$.

2. Es gibt Zahlen $\lambda', \lambda'', \mu', \mu''$, so daß gilt $F_{\tilde{\lambda}} = E_{\lambda'} \tilde{E}_{\tilde{\lambda}}$ mit $E_{\lambda'} = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$, $\tilde{E}_{\tilde{\lambda}} = \tilde{E}_{\mu''} - \tilde{E}_{\mu'}$, mit diesen folgt

$$H_b(F_{\tilde{\lambda}} - F_{\tilde{\lambda}}) = H_b(1 - E_{\lambda'}) F_{\tilde{\lambda}} + H_b(1 - \tilde{E}_{\tilde{\lambda}}) E_{\lambda'} F_{\tilde{\lambda}}.$$

Man setze in den Gleichungen (6.2) $K = \tilde{I}, \vartheta = 0$ und löse sie dann nach \underline{A}_{p_0} und $\tilde{\underline{A}}_{p_0}$ auf; es folgt

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \underline{A}_{p_0} F_{\tilde{\lambda}} &= B(A_{p_0}^1 s^2 + t^1 A_{p_0}^2) F_{\tilde{\lambda}} \\ \tilde{\underline{A}}_{p_0} F_{\tilde{\lambda}} &= B(A_{p_0}^1 t^2 - s^1 A_{p_0}^2) F_{\tilde{\lambda}}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} H_b(1 - E_{\lambda'}) F_{\tilde{\lambda}} &= (C_{G_b})^{-1} [G_b A_{p_0}^1 s^2 (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} + G_b A_{p_0, \vartheta_0}^2 t^1] (A_{p_0})^{-1} (1 - E_{\lambda'}) F_{\tilde{\lambda}}, \\ H_b(1 - \tilde{E}_{\tilde{\lambda}}) E_{\lambda'} F_{\tilde{\lambda}} &= (C_{G_b})^{-1} [G_b A_{p_0}^1 t^2 (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} - G_b A_{p_0, \vartheta_0}^2 s^1] (\tilde{A}_{p_0})^{-1} (1 - \tilde{E}_{\tilde{\lambda}}) E_{\lambda'} F_{\tilde{\lambda}}; \end{aligned}$$

da der Abstand des Punktes p_0 vom Rande des Rechteckes \tilde{I} größer als $c_1(\alpha_0)^{1/2}$ gewählt worden ist, folgt daraus sofort $\|H_b(F_{\tilde{\lambda}} - F_{\tilde{\lambda}}) f\| \leq c_7(\alpha_0)^{1/2} \|f\|$, denn es gilt wieder $\|G_b A_{p_0}^1\|_0 \leq c_8 \alpha_0, \|G_b A_{p_0, \vartheta_0}^2\|_0 \leq c_9 \alpha_0$.

3. Für $k \geq 2$ sei ϑ'_k der Winkel der Geraden $p_0 p'_k$ zur λ -Achse, ϑ_k^* ebenso der Winkel von $p^* p'_k$ zur λ -Achse $\left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta'_k, \vartheta_k^* < 0\right)$. Dann gilt

$$|\vartheta'_k - \vartheta_k^*| < c_{10} \alpha_0.$$

Wir zerlegen

$$(11.5) \quad H_b F_{b'_k} = (C_{G_b})^{-1} G_b (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} s_{\vartheta_k^*}^1 s_{\vartheta_k^*}^2 F_{b'_k} + (C_{G_b})^{-1} G_b (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} t_{\vartheta_k'}^1 t_{\vartheta_k'}^2 F_{b'_k} + \Phi,$$

wobei Φ ein Operator ist, für den gilt $\|\Phi f\| \leq c_{11} \alpha_0 \|F_{b'_k}, f\|$. Unter Berücksichtigung von $A_{p_0}^1 G_b = 0$ liefert Anwendung der Gleichungen (6.2) mit $\vartheta = \vartheta_k^*$ die Beziehung

$$(11.6) \quad G_b (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} s_{\vartheta_k^*}^1 s_{\vartheta_k^*}^2 F_{b'_k} = -G_b (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} s_{\vartheta_k'}^2 t_{\vartheta_k'}^1 \tilde{\underline{A}}_{p^*, \vartheta_k^*} (\underline{A}_{p^*, \vartheta_k^*})^{-1} F_{b'_k}.$$

Ebenso ergibt sich für den Operator $X = G_b (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} t_{\vartheta_k'}^1 t_{\vartheta_k'}^2 F_{b'_k}$ aus der zweiten Formel (6.2) mit $\vartheta = \vartheta_k'$ die Gleichung

$$(11.7) \quad \begin{aligned} X - \underline{A}_{p_0, \vartheta_0}^2 G_b X (\underline{A}_{p_0, \vartheta_k'}^{-1})^{-1} F_{b'_k} &= \underline{A}_{p_0, \vartheta_0}^2 G_b t_{\vartheta_k'}^1 (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} (t_{\vartheta_0}^2 - t_{\vartheta_k'}^2) \times \\ &\times (\underline{A}_{p_0, \vartheta_k'}^{-1})^{-1} F_{b'_k} + G_b t_{\vartheta_k'}^1 s_{\vartheta_k'}^2 (t_{\vartheta_0}^2)^{-1} \tilde{\underline{A}}_{p_0, \vartheta_k'} (\underline{A}_{p_0, \vartheta_k'}^{-1})^{-1} F_{b'_k}. \end{aligned}$$

Erneute Benutzung der Formeln (11.2) liefert

$$\begin{aligned} \|(A_{p_0, \vartheta_k'}^{-1})^{-1} F_{b'_k} f\| &\leq c_{12} (k \cdot (\alpha_0)^{1/2})^{-1} \|F_{b'_k} f\|, \\ \|\tilde{\underline{A}}_{p_0, \vartheta_k'} F_{b'_k} f\| &\leq c_{13} k (\alpha_0)^{1/2} \|F_{b'_k} f\|, \end{aligned}$$

und dasselbe für $\underline{A}_{p^*, \vartheta_k^*}, \tilde{\underline{A}}_{p^*, \vartheta_k^*}$. Schließlich ist $|\vartheta'_k - \vartheta_0| < c_{14} k (\alpha_0)^{1/2}$, also folgt insgesamt aus (11.7) auf Grund des Hilfssatzes 8a

$$\|X f\|_0 \leq (c_{15} \alpha_0 + c_{16} (\alpha_0)^{1/2}) \|F_{b'_k} f\| \leq c_{17} (\alpha_0)^{1/2} \|F_{b'_k} f\|.$$

Auch ergibt sich aus (11.6)

$$\|G_b(t_{\theta_s}^2)^{-1} s_{\theta_s'}^1 s_{\theta_s'}^2 F_{b_k'} f\|_0 \leq c_{18}(\alpha_0)^{1/2} \|F_{b_k'} f\|.$$

Insgesamt hat man also nach (11.5) $\|H_b F_{b_k'} f\| \leq c_{19}(\alpha_0)^{1/2} \|F_{b_k'} f\|$, wobei zu bemerken ist, daß c_{19} unabhängig von k gewählt werden kann.

Wir haben dabei insbesondere zu benutzen, daß der Operator $(C_{G_b})^{-1}$ gleichmäßig für $b \leq \hat{b}$ einer Abschätzung $\|(C_{G_b})^{-1} u\| \leq c_{20} \|u\|$ genügt. Wegen der Diskretheit des Spektrums sind nämlich die Abschätzungen (1_s) und (1_t) für alle Punkte $\{\lambda, \mu\}$ erfüllt; daraus folgt nach Hilfssatz 5 die Gültigkeit dieser Abschätzungen mit Intervallen Δ , deren Länge $\geq c_{21}$ gewählt werden kann gleichmäßig für alle Punkte des Bogens \hat{b} und mit einem $c(\Delta) = c_{22}$. Nun ist E_p^1 ein Abschnitt der Spektralschar des Operators $A^1 - \alpha s^1$ für ein durch p bestimmtes α . Daher folgt $\|E_p^1 u\|_0^2 \leq c_{23}(E_p^1 u, s^1 t^1 E_p^1 u)_0 \leq c_{23} \|E_p^1 u\|^2$. Darin setze man ein $u = G_I u$. Es folgt $\|G_I u\|_0^2 \leq c_{23} \|G_I u\|$, woraus sich sofort obige Abschätzung für $(C_{G_b})^{-1}$ ergibt. Entsprechend zeigt man

$$\|H_b F_{b_k'} f\| \leq c_{19}(\alpha_0)^{1/2} \|F_{b_k'} f\|, \quad k = 2, \dots, r.$$

Endlich folgt mit der SCHWARZschen Ungleichung

$$\left\| \sum_{k=2}^r H_b (F_{b_k'} + F_{b_k'') f \right\| \leq c_{19}(\alpha_0)^{1/2} (2r)^{1/2} \left\| \sum_{k=2}^r (F_{b_k'} + F_{b_k'') f \right\| \leq c_{24}(\alpha_0)^{1/2} \|f\|,$$

da für r folgt $r < 1 + (\alpha_0)^{-\frac{1}{2}}$.

4. Man zerlege $H_b F_{b_1'}$ wie unter 3., nur sei jetzt $\theta_1' = \theta_0$ und $\theta_1'^*$ der Winkel zwischen $\overline{p^* p'}$ und der λ -Achse (fallen p^* und p' zusammen, so werde die Sehne $\overline{p^* p'}$ durch die Kurventangente ersetzt). Wieder gilt $|\theta_1'^* - \theta_0| < c_{25} \alpha_0$, das Glied Φ kann also vernachlässigt werden, auch kann man die Formel (11.6) aufstellen. Es gilt nach (11.2) die Abschätzung

$$\|\tilde{A}_{p^*, \theta_1'^*} (A_{p^*, \theta_1'^*})^{-1} F_{b_1'} f\| \leq c_{26}(\alpha_0)^{4/5} \|F_{b_1'} f\|,$$

daher läßt sich für den ersten Term in Gleichung (11.5) dieselbe Abschätzung wie unter 3. finden. Für den zweiten Term hat man mit $X = G_b t_{\theta_s}^1 (1 + W_b) F_{b_1'}$ die Gleichung

$$(11.8) \quad X - A_{p_s, \theta_s}^2 G_b X (A_{p_s, \theta_s})^{-1} F_{b_1'} = G_b t_{\theta_s}^1 s_{\theta_s'}^2 (t_{\theta_s'}^2)^{-1} \tilde{A}_{p_s, \theta_s} (1 + W_b) (A_{p_s, \theta_s})^{-1} F_{b_1'}.$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 8 sind wieder erfüllt und es ist insbesondere

$$\|G_b t_{\theta_s}^1 s_{\theta_s'}^2 (t_{\theta_s'}^2)^{-1} (A_{p_s, \theta_s})^{-1} \tilde{A}_{p_s, \theta_s} (1 + W_b) F_{b_1'} f\| \leq c_{27}(\alpha_0)^{3/5} \|F_{b_1'} f\|.$$

Man hat nun $[1 - (\alpha_0)^2 (A_{p_s, \theta_s})^{-2} F_{b_1'}]^{-1} F_{b_1'} = (1 + W_b) F_{b_1'}$, daher folgt wie bei 1. die Abschätzung $\|X f\|_0 \leq (\alpha_0)^{3/5} c_{27} c(\kappa) \|(1 + W_b)^{1+\kappa} F_{b_1'} f\|$, insgesamt ergibt sich somit, da für $F_{b_1'}$ Entsprechendes folgt,

$$\|H_b (F_{b_1'} + F_{b_1''}) f\| \leq (\alpha_0)^{3/5} c_{28}(\kappa) [\|W_b^\kappa f\| + \|f\|].$$

Durch Zusammenfassung der unter 1. bis 4. gewonnenen Ergebnisse folgt (11.1) und der Hilfssatz ist bewiesen.

§ 12. Darstellung der Spektralschar E_λ von A in \mathfrak{A} als Summe von Integralen über Eigendifferentiale der Operatoren A^1 und A^2 .

Satz 8 (Integraldarstellungssatz): Der Operator A^1 in \mathfrak{A}^1 besitze ein diskretes Spektrum, A^2 in \mathfrak{A}^2 sei hypermaximal. b sei ein endliches, links oben offenes, rechts unten abgeschlossenes Bogenstück einer der Eigenwertkurven \mathfrak{C}_p^1 des Problems $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0$, dessen abgeschlossene Hülle frei von Schnittpunkten der Kurve \mathfrak{C}_p^1 mit anderen Kurven \mathfrak{C}_v^1 , $v \neq p$ ist; p' sei der linke obere, p'' der rechte untere Randpunkt von b . Für einen Punkt $p = \{\lambda, \mu\}$ des Bogens b sei E_p^1 die in bezug auf das Skalarprodukt (u^1, v^1) orthogonale Projektion auf den Nullraum des Operators A_p^1 in \mathfrak{A}^1 .

Behauptung: Es gibt eine Folge von dem Bogen b einbeschriebenen Polygonzügen $\mathfrak{P}_n: p_0, n p_1, n p_2, n \dots p_{r_n, n}, p_0, n = p', p_{r_n, n} = p'', n = 1, 2, \dots$, deren maximale Seitenlänge gegen Null strebt, so daß gilt

$$(12.1) \quad F_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \left(C_{E_{p_{k-1,n}}^1, E_{p_{k,n}}^2} \right)^{-1} E_{p_{k,n}}^1 E_{p_{k,n}}^2 C(t_{p_{k,n}}^2)^{-1}$$

für jede beliebige Wahl von Zwischenpunkten $p_{k,n}$ der (abgeschlossenen) Bögen $p_{k-1,n} p_{k,n}$, $\vartheta_{k,n}$, $k = 1, 2, \dots, r_n$, sei dabei der Winkel zwischen der Polygonseite $p_{k-1,n} p_{k,n}$ und der λ -Achse, für den gilt $-\frac{\pi}{2} < \vartheta_{k,n} < 0$; $E_{p_{k-1,n}}^2$ und $C_{E_{p_{k-1,n}}^1, E_{p_{k,n}}^2}$ seien die in § 11 erklärten Operatoren.

Wir wollen den Limes seines integralartigen Charakters wegen mit

$$\int_b (C_{E_p^1, E_p^2})^{-1} E_p^1 E_p^2 C(t_p^2)^{-1}$$

bezeichnen und erhalten dann

$$(12.2) \quad F_b = \int_b (C_{E_p^1, E_p^2})^{-1} E_p^1 E_p^2 C(t_p^2)^{-1}.$$

Das so definierte Integral existiert im obigen Sinne auch dann, wenn der Bogen b nicht frei von Schnittpunkten mit anderen Kurven \mathfrak{C}_v^1 , $v \neq p$, ist, wenn wir noch vereinbaren, daß für jeden solchen Schnittpunkt p die Projektion E_p^1 nicht auf den ganzen Nullraum von A_p^1 projizieren soll, sondern nur auf den von $\varphi_{r,k}^1(p)$, $k = 1, \dots, n_p$ (s. § 5) aufgespannten, zu \mathfrak{C}_p^1 gehörigen Teilraum dieses Nullraumes.

Für die Spektralschar E_λ des Operators A in \mathfrak{A} gilt die Darstellung

$$(12.3) \quad E_\lambda = \sum_{\substack{\mathfrak{C}_p^1 \\ \lambda \leq \lambda_p}} \int_b (C_{E_p^1, E_p^2})^{-1} E_p^1 E_p^2 C(t_p^2)^{-1},$$

wobei jedes der Integrale als uneigentliches Integral aufzufassen ist.

Zum Beweis des Satzes 8 ziehen wir wesentlich die Tatsache heran, daß es monoton nicht abnehmende, rechtsstetige Basisfunktionen $\varrho(\lambda)$ gibt, nach denen für jedes u, v aus \mathfrak{H} die Funktion $\psi(\lambda) = (u, E_\lambda v)$ in $-\infty < \lambda < +\infty$ totalstetig ist. Zum Beispiel ist eine solche Funktion gegeben durch

$$\varrho(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\varphi_n, E_\lambda \varphi_n).$$

wo φ_n ein in \mathfrak{H} vollständiges, orthonormiertes System sei. Hat man nämlich $u = \sum u_n \varphi_n$, $v = \sum v_n \varphi_n$ und ist m eine Menge endlich vieler, paarweise punktfremder Intervalle $\lambda'_k < \lambda \leq \lambda''_k$, $E_m = \sum_k (E_{\lambda''_k} - E_{\lambda'_k})$ sowie schließlich ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt zunächst für passendes N und die zu $\psi(\lambda)$ gehörige Intervallfunktion $\varrho(m)$ die Abschätzung

$$|\psi(m)| = |(u, E_m v)| \leq \sum_{n, n'=1}^N |u_n| |v_{n'}| [(\varphi_n, E_m \varphi_n) (\varphi_{n'}, E_m \varphi_{n'})]^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählt man m so, daß $\varrho(m) < \frac{\varepsilon}{2} \left[N^4 \cdot \text{Max}_{n, n'=1}^N (|u_n| |v_{n'}|) \right]^{-1}$ wird, so folgt für $n \leq N$ die Ungleichung

$$(\varphi^n, E_m \varphi^n) \leq N^2 \varrho(m) < \frac{\varepsilon}{2} \left[N^2 \text{Max}_{n, n'=1}^N (|u_n| |v_{n'}|) \right]^{-1}, \text{ also } f(m) < \varepsilon;$$

also ist $\psi(\lambda)$ nach $\varrho(\lambda)$ totalstetig.

Der Raum \mathfrak{H}' aller Elemente v aus \mathfrak{H} , für die mit einer Konstanten $c(v)$ gilt $\left| \frac{d \|E_\lambda v\|^2}{d \varrho(\lambda)} \right| \leq c(v)$ gleichmäßig in $-\infty < \lambda < +\infty$, ist dicht in \mathfrak{H} . Für die oben erklärte Basisfunktion folgt dies z. B. aus der Tatsache, daß für jede endliche Linearkombination $v = \sum_1^N x_n \varphi_n$ der Elemente φ_n , $n = 1, 2, \dots$ stets

$\left| \frac{d \|E_\lambda v\|^2}{d \varrho(\lambda)} \right| \leq c(v)$ gilt. Wir entscheiden uns für eine feste solche Basisfunktion $\varrho(\lambda)$. Es mögen die beiden Endpunkte p', p'' des Bogens b die Koordinaten $\{\lambda', \mu'\}$ bzw. $\{\lambda'', \mu''\}$ besitzen. $p = \{\lambda, \mu\}$ sei irgendein Punkt des Bogens b . Dann gilt für den Bogen $p'p$ stets $F_{p'p} = E_\lambda F_b$. Endlich benötigen wir folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 11: Es sei $\varrho(\lambda)$ in $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ monoton nicht abnehmend und rechtsstetig und es sei $\gamma(\lambda) = \sup_{\lambda_1 \leq \lambda^* \leq \lambda_2} \frac{\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}$.

Behauptung: In jedem Teilintervall $\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda'_2$, $\lambda_1 < \lambda'_1 < \lambda'_2 < \lambda_2$, gibt es mindestens einen Punkt λ_0 mit $\gamma(\lambda_0) \leq 2 \frac{\varrho(\lambda_2) - \varrho(\lambda_1)}{\lambda'_2 - \lambda'_1}$.

Beweis: Wir setzen $\zeta = 2 \frac{\varrho(\lambda_2) - \varrho(\lambda_1)}{\lambda'_2 - \lambda'_1}$ und bezeichnen mit m_+ und m_- die beiden Teilmengen von $\lambda'_1 \leq \lambda < \lambda'_2$, für die gilt

$$\gamma_+(\lambda) = \sup_{\lambda_+ \geq \lambda^* > \lambda} \frac{\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} > \zeta \text{ bzw. } \gamma_-(\lambda) = \sup_{\lambda_1 \leq \lambda^* < \lambda} \frac{\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} > \zeta.$$

m_\pm sind Summen von höchstens abzählbar vielen, rechts offenen paarweise punktfremden Intervallen, denn wegen der Rechtsstetigkeit von $\varrho(\lambda)$ gehört mit einem Punkt λ stets eine rechtsseitige Umgebung zu m_+ bzw. zu m_- . Da $\varrho(\lambda)$ monoton nicht abnimmt, ist der Durchschnitt von m_+ mit dem Intervall $\lambda'_1 < \lambda < \lambda'_2$ sogar eine offene Menge.

Die Gegenannahme zur Behauptung sagt nun aus, daß m_+ und m_- zusammen das ganze Intervall $\lambda'_1 \leq \lambda < \lambda'_2$ überdecken. Wir nehmen sie als richtig an und unterscheiden zwei Fälle: 1. m_+ und m_- sind punktfremd. In

diesem Fall besteht m_+ aus einem Intervall $\lambda'_1 \leq \lambda < \lambda_1^*$, m_- aus dem daran anschließenden Intervall $\lambda_1^* \leq \lambda < \lambda'_2$, wobei auch die Fälle eintreten können, wo eine der beiden Mengen leer ist. Denn es kann kein linker Randpunkt von m_+ im Innern des Intervalles liegen. Ist dann λ_1^* der Mittelpunkt des Intervalles $\lambda'_1 < \lambda < \lambda'_2$, so besitzt das Intervall $\lambda_1^* \leq \lambda < \lambda'_2$ die Länge $\frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda'_1)$, woraus man sofort einen Widerspruch folgerte, da man dann ein λ am $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ angeben könnte, für welches $\varrho(\lambda) > \varrho(\lambda_2)$ gelten würde. Ist das nicht der Fall, so ist eines der Intervalle länger als $\frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda'_1)$; in dieses läßt sich ein abgeschlossenes Intervall einbetten, dessen Länge auch noch größer als $\frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda'_1)$ ist und es folgt erneut ein Widerspruch. 2. m_+ und m_- sind nicht fremd. In diesem Fall enthalten m_+ und m_- sogar ein ganzes Intervall gemeinsam, daher besitzt mindestens eine der Mengen ein Maß, welches größer als $\frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda'_1)$ ist. Wir nehmen etwa an, das sei für m_+ der Fall und können dann aus der Menge m_+ eine Menge m_+^* von endlich vielen, links abgeschlossenen Intervallen aussondern, so daß für deren Maß α_+^* wieder gilt $\alpha_+^* > \frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda_1)$. Mit dieser gelangen wir genau wie im Fall 1. zu einem Widerspruch.

Hilfssatz 12: In dem separablen Hilbertraum \mathfrak{R} sei neben dem Skalarprodukt (u, v) noch eine Folge von Skalarprodukten $(u, v)_n$, $u, v \in \mathfrak{R}$, eingeführt, deren zugehörige Metriken $\|u\|_n$ alle zur Metrik $\|u\|$ äquivalent sind und so daß gilt $a(u, u) \leq (u, u)_n \leq b(u, u)$ mit zwei positiven Konstanten a, b , die nicht von n abhängen und

$$|(u, v)_n - (u, v)| \leq \varepsilon_n \|u\| \|v\|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Zu jedem n sei H_n in \mathfrak{D}_{H_n} ein bezüglich $(u, v)_n$ im Raum \mathfrak{R} hypermaximaler Operator; H in \mathfrak{D}_H sei bezüglich (u, v) hypermaximal. Es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - i)^{-1} f = (H - i)^{-1} f, \quad f \in \mathfrak{R}.$$

Behauptung: Wenn für ein λ_0 jedes φ aus \mathfrak{D}_H mit $(H - \lambda_0) \varphi = 0$ in \mathfrak{D}_{H_n} , $n = 1, 2, \dots$, liegt und der Ungleichung $\|(H_n - \lambda_0) \varphi\|_n \leq a_n \|\varphi\|_n$ mit einer von φ unabhängigen Folge a_n genügt, für die gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dann folgt für die

Spektralscharen E_λ und $E_{\lambda; n}$ von H in \mathfrak{D}_H und H_n in \mathfrak{D}_{H_n} die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_{\lambda'_n; n} - E_{\lambda'_n; n}) f = (E_{\lambda_0 + 0} - E_{\lambda_0 - 0}) f, \quad f \in \mathfrak{R}, \quad \text{für jedes Folgenpaar } \lambda'_n, \lambda''_n$$

mit $\lambda'_n < \lambda_0 < \lambda''_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda'_n - \lambda_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda''_n - \lambda_0} = 0$.

Für jedes n , für das $a_n = 0$ gilt, kann in $E_{\lambda'_n; n} = E_{\lambda'_n; n} - E_{\lambda'_n; n}$ sowohl λ'_n durch $\lambda_0 + 0$, als auch λ''_n durch $\lambda_0 - 0$ ersetzt werden.

Ist insbesondere λ_0 nicht Punkteigenwert von H , dann ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda'_n; n} f = E_{\lambda_0} f, \quad f \in \mathfrak{R}$$

für jedes λ_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$.

Beweis: Zunächst wollen wir einsehen, daß für z mit $\text{Im } z \neq 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - z)^{-1} f = (H - z)^{-1} f, \quad f \in \mathfrak{R}.$$

Man hat nämlich für die Operatoren $V_n = (H_n - z)(H_n - i)^{-1}$, $V = (H - z)(H - i)^{-1}$ die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n f = V f$, $f \in \mathfrak{R}$, denn es gilt $V_n = 1 + (i - z)(H_n - i)^{-1}$

und entsprechendes für V . Wegen $\operatorname{Im} z \neq 0$ und der in n gleichmäßigen Äquivalenz der Metriken $\|u\|$ und $\|u\|_n$ sind andererseits V_n^{-1} und V^{-1} gleichmäßig in n bezüglich der Metrik $\|u\|$ beschränkt. Also ergibt sich

$$\|V_n^{-1} - V^{-1}\|f\| = \|V_n^{-1}(V - V_n)V^{-1}f\| \leq c\|(V - V_n)V^{-1}f\| < \varepsilon, n > N(\varepsilon).$$

Wegen $V_n^{-1} = 1 + (z - i)(H_n - z)^{-1}$, $V^{-1} = 1 + (z - i)(H - z)^{-1}$ folgt daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - z)^{-1}f = (H - z)^{-1}f$, $f \in \mathfrak{R}$, falls auch noch gilt $z \neq i$. Für $z = i$ ist

aber diese Relation ohnehin richtig. Für die Spektralscharen $E_{\lambda; n}$ und E_λ hat man daher nach einem Satz von F. RELICH $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda; n} f = E_\lambda f$, $f \in \mathfrak{R}$, für

jedes λ , welches nicht Punkteigenwert von H in \mathfrak{D}_H ist. Denn die Projektionen $E_{\lambda; n}$, E_λ sind für solche λ identisch mit den in bezug auf $(u, v)_n$ orthogonalen Projektionen von \mathfrak{R} auf die zum Intervall $-\infty < \mu < 0$ gehörigen Spektralräume der in Hinsicht auf $(u, v)_n$ beschränkten, hermiteschen Operatoren $W_{\lambda; n} = (H_n - \lambda - i)^{-1} + (H_n - \lambda + i)^{-1}$ und $W_\lambda = (H - \lambda - i)^{-1} + (H - \lambda + i)^{-1}$. Gilt also $(u, v)_n = (u, s_n v)$; $u, v \in \mathfrak{R}$, mit beschränkten, hermiteschen Operatoren s_n , für die gilt $a \leq s_n \leq b$, $n = 1, 2, \dots$, so ist $(s_n)^{\frac{1}{2}} W_n (s_n)^{-\frac{1}{2}}$ in bezug auf (u, v) beschränkt und hermitesch und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)^{\frac{1}{2}} W_n (s_n)^{-\frac{1}{2}} f = W f$, $f \in \mathfrak{R}$,

woraus nach F. RELICH³⁾ für die in bezug auf (u, v) orthogonalen Projektionen $P_0; n$, P_0 der Spektralscharen $P_{\lambda; n}$, P_λ von $(s_n)^{\frac{1}{2}} W_{\lambda; n} (s_n)^{-\frac{1}{2}}$ und W_λ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n f = P f$, sofern nur der Nullpunkt nicht Eigenwert von W_λ ist.

Daher ergibt sich auch $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda; n} f = E_\lambda f$, $f \in \mathfrak{R}$, sofern nur λ nicht Eigenwert von H in \mathfrak{D}_H ist.

Für u aus \mathfrak{R} und λ'_n, λ''_n mit $\lambda'_n < \lambda_0 < \lambda''_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda''_n - \lambda_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_0} = 0$ sowie φ mit $(H - \lambda_0) \varphi = 0$ und $E_{\lambda_n; n} = E_{\lambda''_n; n} - E_{\lambda'_n; n}$ folgt nun:

$$\begin{aligned} |(1 - E_{\lambda_n; n}) u, \varphi)_n| &= |(H_n - \lambda_0)^{-1} (1 - E_{\lambda_n; n}) u, (H_n - \lambda_0) \varphi)_n| \\ &\leq \frac{a_n}{\min\{|\lambda''_n - \lambda_0|, |\lambda'_n - \lambda_0|\}} \|u\|_n \|\varphi\|_n. \end{aligned}$$

Ist also Q_n die in bezug auf $(u, v)_n$ orthogonale Projektion auf den Nullraum von $H - \lambda_0$, so hat man $|(Q_n(1 - E_{\lambda_n; n}) u, v)_n| \leq \frac{a_n}{\min\{|\lambda''_n - \lambda_0|, |\lambda'_n - \lambda_0|\}} \|u\|_n \|v\|_n$; $u, v \in \mathfrak{R}$. Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n E_{\lambda_n; n} f = (E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) f$. Wir behaupten, daß auch gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda_n; n} f = (E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) f$, $f \in \mathfrak{R}$. Denn wäre das nicht der Fall, so folgte zu mindestens einem f die Existenz einer Folge n_k natürlicher Zahlen, so daß mit einem $\varepsilon > 0$ wäre

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|E_{\lambda_{n_k}; n_k} f\|_{n_k}^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_{n_k} E_{\lambda_{n_k}; n_k} f\|_{n_k}^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \|(1 - Q_{n_k}) E_{\lambda_{n_k}; n_k} f\|_{n_k}^2 \\ &= \|(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) f\|^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

³⁾ Siehe [10], II. Mitteilung, Satz 1. Der Satz ist dort nur für linksstetige Spektralscharen $P_{\lambda; n}$, P_λ ausgesprochen, gilt aber auch sonst.

Sei $E_{\lambda'; n} = E_{\lambda''; n} - E_{\lambda'; n}$ für beliebiges λ', λ'' mit $\lambda' < \lambda_0 < \lambda''$. Dann folgte die Existenz eines k_0 , so daß gilt $\lambda' < \lambda_{n_k}' < \lambda_0 < \lambda_{n_k}'' < \lambda''$ für alle $k > k_0$. Für $k > k_0$ würde also gelten $\|E_{\lambda'; n_k} f\|_{n_k}^2 \geq \|E_{\lambda_{n_k}'; n_k} f\|_{n_k}^2$, also folgte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_{\lambda'; n_k} f\|_{n_k}^2 \geq \|(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) f\|^2 + \varepsilon$$

für jedes solche λ', λ'' . Für Zahlen λ', λ'' , die nicht Punkteigenwerte von H sind, gilt nun nach obigem $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_{\lambda'; n_k} f\|_{n_k}^2 = \|E_{\lambda} f\|^2$ (mit $E_{\lambda} = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$).

Folglich wäre $\|E_{\lambda} f\|^2 \geq \|(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) f\|^2 + \varepsilon$. Daraus folgt ein Widerspruch, falls nur $|\lambda'' - \lambda'|$ hinreichend klein gewählt wird; der Hilfssatz ist daher bewiesen, denn die beiden zusätzlichen Behauptungen folgen unmittelbar.

Beweis von Satz 8: Sei zunächst b ein endliches, rechts unten abgeschlossenes, links oben offenes Bogenstück einer Kurve \mathfrak{C}_v^1 , dessen abgeschlossene Hülle keinen Schnittpunkt $\mathfrak{C}_v^1 \times \mathfrak{C}_v^1$, $v \neq v$ enthält. Wir bezeichnen dann einen auf \mathfrak{C}_v^1 nach beiden Seiten etwas verlängerten, abgeschlossenen Bogen, der auch noch frei von Schnittpunkten mit den \mathfrak{C}_v^1 , $v \neq v$ ist, mit \hat{b} . Den Endpunkten \hat{p}' und \hat{p}'' von \hat{b} mögen die λ -Werte $\hat{\lambda}'$ bzw. $\hat{\lambda}''$ entsprechen, es gelte $\hat{\lambda}' < \lambda' < \lambda'' < \hat{\lambda}''$. Auch bestimme man $\hat{\Gamma}$ irgendwie gemäß Hilfssatz 10.

Zur Auswahl der in Satz 8 benötigten Polygonfolge \mathfrak{P}_n unterteilen wir das Intervall $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'' + \frac{3}{2n}(\lambda'' - \lambda')$ äquidistant durch die Punkte $\lambda'_{k,n} = \lambda' + \frac{k}{2n}(\lambda'' - \lambda')$, $k = 0, 1, \dots, 2n + 3$ in $2n + 3$ gleiche Teile, n genügend groß vorausgesetzt, und wenden Hilfssatz 11 für $\lambda_1 = \lambda'_{2k-2,n}$; $\lambda_1' = \lambda'_{2k-1,n}$; $\lambda_2' = \lambda'_{2k,n}$; $\lambda_2 = \lambda'_{2k+1,n}$; $k = 1, \dots, n + 1$, an. Es folgt die Existenz von $n + 1$ Punkten $\lambda_{k,n}$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$, mit $\lambda' < \lambda'_{1,n} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_2' < \lambda'_{3,n} \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots \leq \lambda_{2n,n} = \lambda'' < \lambda'_{2n+1,n} \leq \lambda_{n+1,n} \leq \lambda_{2n+2,n} < \lambda'_{2n+3,n} < \hat{\lambda}''$ und so, daß für $\frac{1}{2}(\lambda_{k-1,n} + \lambda_{k,n}) \leq \lambda \leq \frac{1}{2}(\lambda_{k,n} + \lambda_{k+1,n})$ bzw. in den Fällen $k = 1, n$ für $\lambda_{1,n} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}(\lambda_{1,n} + \lambda_{2,n})$; $\frac{1}{2}(\lambda_{n,n} + \lambda_{n+1,n}) \leq \lambda \leq \lambda_{n+1,n}$ folgt

$$\frac{\Delta \varrho}{\Delta \lambda} \Big|_{\lambda_{k,n}} = \frac{\varrho(\lambda) - \varrho(\lambda_{k,n})}{\lambda - \lambda_{k,n}} \leq \frac{4n}{\lambda'' - \lambda'} [\varrho(\lambda'_{2k+1,n}) - \varrho(\lambda'_{2k-1,n})].$$

Definieren wir $\eta_n(\lambda) = \left[\sin \pi \frac{\lambda - \lambda_{k,n}}{\lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n}} \right]^{-\frac{1}{2}}$ in $\lambda_{k,n} < \lambda < \lambda_{k+1,n}$, $k = 1, \dots, n$, so folgt

$$\int_{\lambda_{1,n}}^{\lambda_{n+1,n}} \eta_n(\lambda) d\varrho(\lambda) \leq c_{29} [\varrho(\lambda_{2n+3}) - \varrho(\lambda')]$$

woraus sich weiter ergibt $\int_{\lambda_{1,n}}^{\lambda_{n+1,n}} \eta_n(\lambda) d\|E_{\lambda} f\|^2 \leq c_{30}(f)$ für f aus \mathfrak{H}' .

Nun bezeichne man $q_{k,n} = \{\lambda_{k,n}, \mu_{k,n}\}$, $k = 1, \dots, n + 1$, wo $\mu_{k,n}$ so bestimmt werde, daß $q_{k,n}$ auf \mathfrak{C}_v^1 liegt und ziehe den Polygonzug

$\mathfrak{P}^n: p_{0,n} p_{1,n} \dots p_{n-1,n} p_{n,n} p_{n+1,n}$ mit $p_{0,n} = p'$; $p_{n+1,n} = p''$ und $p_{k,n} = q_{k,n}$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Da die Ableitung der Kurve \mathfrak{C}_v^1 auf \hat{b} beschränkt ist, sind die Polygonseiten alle kürzer als $c_{31} \cdot \frac{1}{n}$. Bildet man mit den von $q_{k,n}$ und $q_{k+1,n}$ begrenzten Teil-

bögen $b_{k,n}$ und irgendwelchen Zwischenpunkten $q_{k,n}^*$ die Operatoren $H_{b_{k,n}}$ und nennt noch b_n den Bogen $q_{1,n} q_{n+1,n}$, so gilt für g aus \mathfrak{H} , f aus \mathfrak{H}' nach Hilfssatz 10 mit $\kappa = \frac{1}{4}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left\| \left(F_{b_n} - \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} \right) F_{\hat{I}} f \right\| \\ & \leq c_{33}(\hat{I}) n^{-3/5} \left\{ \|g\| \sum_{k=1}^n \|W_{b_{k,n}}^{1/4} F_{b_{k,n}} f\| + \sum_{k=1}^n \left[\|H_{b_{k,n}} g\| (\|f\| + \|W_{b_{k,n}}^{1/4} f\|) \right] \right\} \\ & \leq c_{33}(\hat{I}) n^{-1/10} \left[\int_{\lambda_{0,n}}^{\lambda_{n,n}} d_n(\lambda) d \|E_{\lambda} f\|^2 \right]^{1/2} \left\{ \|g\| + \left\| \left(g, \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} g \right) \right\|^{1/2} \right\} \\ & \leq n^{-1/10} c_{34}(\hat{I}, f) \|g\|, \end{aligned}$$

wenn wir hier die in n gleichmäßige Beschränktheit des Operators $\sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}}$, das Ergebnis eines nachfolgenden Hilfssatzes, vorwegnehmen. Da g willkürlich ist, liefert diese Abschätzung endlich

$$(12.4) \quad \left\| \left(F_{b_n} - \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} \right) F_{\hat{I}} f \right\| \leq c_{35}(\hat{I}, f) \cdot n^{-1/10} \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{H}'.$$

Nun lassen wir das fest zugrunde gelegte Intervall \hat{I} eine Folge $\hat{I}_{k'}, k' = 1, 2, \dots$ durchlaufen, die die λ, μ -Ebene ausschöpft. Das bei der Definition unserer Basisfunktion $\varrho(\lambda)$ benutzte vollständige, orthogonale und normierte System $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ werde speziell so gewählt, daß zu jedem φ_i ein k' existiert, so daß gilt $F_{\hat{I}_{k'}} \varphi_i = \varphi_i$. Aus (12.4) folgt dann

$$(12.5) \quad \left\| \left(F_{b_n} - \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} \right) f \right\| \leq c_{36}(f) \cdot n^{-1/10}$$

für alle $f = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$, also für eine dichte Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{H} . Daraus folgt, wieder unter Benutzung der noch zu zeigenden Beschränktheit von $\sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}}$ gleichmäßig in n und wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{b_n} = F_b$, die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}}$ und die Gleichung $F_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}}$.

Der dem Polygonzug \mathfrak{P}_n entsprechende Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(C E_{p_{k,n}}^{1*} E_{p_{k-1,n}}^2 \overline{p_{k,n}} \right)^{-1} E_{p_{k,n}}^{1*} E_{p_{k-1,n}}^2 \overline{p_{k,n}} C (t_{b_{k,n}}^2)^{-1}$$

unterscheidet sich nun von $\sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}}$ nur um $H_{b_{n,n}} - H_{b_{n,n}} + H_{b_{0,n}}$ wo mit

$b_{0,n}$ und $\tilde{b}_{n,n}$ die von $p_{0,n}$ und $p_{1,n}$ bzw. von $p_{n,n}$ und $p_{n+1,n}$ begrenzten links offenen, rechts abgeschlossenen Bögen bezeichnet seien. Hilfssatz 12 läßt einsehen, daß dies mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Denn z. B. ist $E_{q_{n,n} q_{n+1,n}}^2$ Abschnitt der Spektralschar eines gewissen Operators A_{q_n, ϕ_n} , wobei q_n entweder $= p_{n,n}$ oder auf der Sehne $\overline{q_{n,n} q_{n+1,n}}$ so gewählt werden kann, daß der Abstand $|\overline{q_n p''}|$ relativ zu den Abständen $|\overline{q_n q_{n,n}}|$ und $|\overline{q_n q_{n+1,n}}|$ für $n \rightarrow \infty$

gegen Null strebt. Für $H_n = A_{q_n, o_n}^2$, $H = A_{p'}^2$, \hat{o} ; ($\hat{o} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{o}_n$), sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 12 erfüllt und es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{q_n, n}^2}{q_n + 1, n} f^2 = E_{p'}^2 f^2$, $f^2 \in \mathfrak{H}^2$, ($E_{p'}^2$ die hinsichtlich (u^2, v^2) orthogonale Projektion auf den Nullraum von $A_{p'}^2$). Andererseits folgt unmittelbar $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{q_n, n}^1 f^1 = E_{p'}^1 f^1$, $f^1 \in \mathfrak{H}^1$, (etwa nach F. RELICH [10], V. Mitteilung). Daraus und aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Operatoren $E_{q_n, n}^1$ und $E_{q_n, n}^2$ folgt man $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{b_n, n} f = E_{p'}^1 E_{p'}^2 f$, $f \in \mathfrak{H}_0$ im Sinne der Metrik von \mathfrak{H}_0 .

Da nach Satz 10 des § 14 die Räume $E_{p'}^1 \mathfrak{H}_0$ und $F_{p'} \mathfrak{H}$ identisch sind, folgt nach Hilfssatz 9: $F_{p'} f = (C_{E_{p'}^1, E_{p'}^2})^{-1} E_{p'}^1 E_{p'}^2 C_{(t_p^2)}^{-1}$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{b_n, n} f = F_{p'} f$, $f \in \mathfrak{H}$ im Sinne der Metrik von \mathfrak{H} . Entsprechend folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\hat{b}_n, n} f = F_{p'} f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{b_0, n} f = 0$, $f \in \mathfrak{H}$. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich die Formel (12.1).

Ist \hat{b} ein Bogen, der nicht von Schnittpunkten $\mathfrak{C}_v^1 \times \mathfrak{C}_{v'}^1$, $v \neq v'$, frei ist, so schließen wir zunächst kleine Umgebungsbögen dieser endlich vielen Punkte aus \hat{b} aus. Ist $\hat{p} = \{\hat{\lambda}, \hat{\mu}\}$ ein Schnittpunkt und \hat{b} der zugehörige, links offene, rechts abgeschlossene Umgebungsbogen, sowie $E_{\hat{p}}^3$ die in bezug auf (u^2, v^2) orthogonale Projektion auf den Nullraum von $A_{\hat{p}, \hat{p}}^3$, $\hat{\theta}$ der Neigungswinkel der Tangente im Punkte \hat{p} an die Kurve \mathfrak{C}_v^1 , so folgt wie oben, daß gilt $\lim_{\hat{b} \rightarrow \hat{p}} G_{\hat{b}} f = E_{\hat{p}}^1 E_{\hat{p}}^3 f$, $f \in \mathfrak{H}_0$, im Sinne der Konvergenz von \mathfrak{H}_0 . $E_{\hat{p}}^1$ sei dabei hier die Projektion von \mathfrak{H}^1 nur auf den von $\varphi_{v'}^1, k'(\hat{p})$, $k' = 1, \dots, n_r$ (siehe § 5) aufgespannten Teil des Nullraumes von $A_{\hat{p}}^1$. Hieraus ergibt sich die Konvergenz des Integrales auch in diesem Falle.

Treffen sich im Punkte \hat{p} die Kurven $\mathfrak{C}_{v_k}^1$, $k' = 1, 2, \dots, r$, und sind $\hat{b}_{k'}$, $k' = 1, \dots, r$ Umgebungsbögen von \hat{p} auf $\mathfrak{C}_{v_k}^1$, so gilt $\sum_{k'=1}^r \lim_{\hat{b}_{k'} \rightarrow \hat{p}} G_{\hat{b}_{k'}} f = E_{\hat{p}}^1 E_{\hat{p}}^3 f$, $f \in \mathfrak{H}_0$, im Sinne von $\|u\|_0$, wobei $E_{\hat{p}}^1$ jetzt die in bezug auf (u^1, v^1) orthogonale Projektion auf den ganzen Nullraum von $A_{\hat{p}}^1$ ist. Daraus folgt Gleichung (12.3) und Satz 8 ist bewiesen.

Wir haben noch nachzutragen

Hilfssatz 13: Für die Projektionsoperatoren Z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, eines separablen Hilbertraumes \mathfrak{R} gelte die Beziehung

$$(12.6) \quad Z_k Z_l = \frac{1}{\gamma_k - \gamma_l} Z_k (M_k^* N_l - N_k^* M_l) Z_l; \quad k, l = 1, \dots, n; \quad k \neq l,$$

mit reellen Zahlen γ_k ; $k = 0, 1, \dots, n$ und beschränkten Operatoren M_k, N_k ; $k = 1, \dots, n$, für die gilt $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$; $\|M_k Z_k\| \leq c |\gamma_k - \gamma_{k-1}|$, $\|N_k Z_k\| \leq c'$ (c, c' seien feste, positive Konstante).

Behauptung: Sei $a = \min_{k=1}^n |\gamma_k - \gamma_{k-1}|$, $b = \max_{k=1}^n |\gamma_k - \gamma_{k-1}|$, dann gilt für den hermiteschen Operator $Z = \sum_{k=1}^n Z_k$ die Abschätzung

$$(12.7) \quad 0 \leq Z \leq 1 + 2cc' \frac{b}{a} (4\pi + 2b).$$

Zum Beweis benötigen wir folgendes

Lemma: Seien $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ n Zahlen, für die gilt $0 < a \leq \alpha_k - \alpha_{k-1} \leq b$, $k = 1, \dots, n$, mit zwei positiven Konstanten a, b . Dann gilt

$$(12.8) \quad \left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{x_k y_l}{\alpha_k - \alpha_l} \right|^2 \leq \left(\frac{4\pi + 2b}{a} \right)^2 \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2$$

für jede beliebige Wahl der komplexen Zahlen x_k, y_k , $k = 1, \dots, n$.

Nehmen wir das Lemma zunächst als richtig an, dann folgt mit

$$a = \min_{k=1}^n |\gamma_k - \gamma_{k-1}|, \quad b = \max_{k=1}^n |\gamma_k - \gamma_{k-1}|$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n (Z_{\Delta_k} f, Z_{\Delta_l} f) \right|^2 &= \left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{1}{\gamma_k - \gamma_l} (Z_{\Delta_k} f, (M_{\Delta_k} - M_{\Delta_l}) Z_{\Delta_l} f) \right|^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{4\pi + 2b}{a} \right)^2 \left[\sum_{k=1}^n \|M_{\Delta_k} Z_{\Delta_k} f\|^2 \sum_{k=1}^n \|N_{\Delta_k} Z_{\Delta_k} f\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \|N_{\Delta_k} Z_{\Delta_k} f\|^2 \sum_{k=1}^n \|M_{\Delta_k} Z_{\Delta_k} f\|^2 \right] \\ &\leq 4c'^2 c^2 b^2 \left(\frac{4\pi + 2b}{a} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^n \|Z_{\Delta_k} f\|^2 \right\}^2 \end{aligned}$$

Denn aus (12.8) läßt sich sofort auch die Relation

$$\left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{(u_k, v_l)}{\gamma_k - \gamma_l} \right|^2 \leq \left(\frac{4\pi + 2b}{a} \right)^2 \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$$

für beliebige Vektoren u_k, v_k aus \mathfrak{H} , $k = 1, \dots, n$ herleiten. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n Z_{\Delta_k} f \right\|^2 &= \sum_{k=1}^n \|Z_{\Delta_k} f\|^2 + \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n (Z_{\Delta_k} f, Z_{\Delta_l} f) \\ &\leq \left(1 + 2cc' \frac{b}{a} (4\pi + 2b) \right) \sum_{k=1}^n (Z_{\Delta_k} f, Z_{\Delta_k} f) = \left(1 + 2cc' \frac{b}{a} (4\pi + 2b) \right) \left(f, \sum_{k=1}^n Z_{\Delta_k} f \right). \end{aligned}$$

Da $\sum_{k=1}^n Z_{\Delta_k}$ ein beschränkter hermitescher Operator ist, folgt daraus die Behauptung.

Das Lemma beweisen wir unter Benutzung der zuerst von D. HILBERT gezeigten Beschränktheit des Integralkernes $\frac{1}{x-y}$. Setze $\Delta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ und

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{x_k}{\Delta_k} \quad \text{in } \alpha_{k-1} < x \leq \alpha_k, & k &= 1, \dots, n \\ \beta(y) &= \frac{y_k}{\Delta_k} \quad \text{in } \alpha_{k-1} < y \leq \alpha_k, & k &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

Null sonst; sei endlich $K(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha(x)} \beta(y)}{x-y} dx dy$. Es folgt

$$\left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{\overline{x_k} y_l}{\alpha_k - \alpha_l} - K(\alpha, \beta) \right| \leq \sum_{\substack{k, l=1 \\ |k-l| > 1}}^n |x_k| |y_l| \left| \frac{1}{\alpha_k - \alpha_l} - \frac{1}{\alpha_{k-1} \alpha_l} \iint_{\alpha_{k-1} \alpha_{l-1}}^{\alpha_k \alpha_l} \frac{dx dy}{x-y} \right| + \\ + \frac{3\pi}{2a} \sum_{k=1}^{n-1} (|x_k| |y_{k+1}| + |x_{k+1}| |y_k|)^4$$

und

$$\sum_{\substack{k, l=1 \\ |k-l| > 1}}^n |x_k| |y_l| \left| \frac{1}{\alpha_k - \alpha_l} - \frac{1}{\alpha_{k-1} \alpha_l} \iint_{\alpha_{k-1} \alpha_{l-1}}^{\alpha_k \alpha_l} \frac{dx dy}{x-y} \right| \\ \leq 2 \sum_{k > l+1}^n \left| \frac{1}{\alpha_k - \alpha_l} - \frac{1}{\alpha_{k-1} - \alpha_l} \right| |x_k| |y_l| \leq 2b \sum_{k > l+1}^n \frac{|x_k| |y_l|}{(\alpha_k - \alpha_l)(\alpha_{k-1} - \alpha_l)} \\ \leq 2 \frac{b}{a} \sum_{k > l+1}^n \frac{|x_k| |x_l|}{(k-l)(k-l-1)} \leq 2 \frac{b}{a} \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

indem man z. B. ein Kriterium von J. SCHUR anwendet⁵⁾. Also ergibt sich

$$\left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{\overline{x_k} y_l}{\alpha_k - \alpha_l} \right| \leq \left| \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \frac{\overline{x_k} y_l}{\alpha_k - \alpha_l} - K(\alpha, \beta) \right| + |K(\alpha, \beta)| \\ \leq \frac{4\pi + 2b}{a} \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Um aus Hilfssatz 12 die von uns zum Beweis von Satz 8 benötigte Aussage $\left\| \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} \right\| \leq c_{37}$ gleichmäßig in n zu erhalten, schließen wir folgendermaßen: Nach Konstruktion von $H_{b_{k,n}}$ folgt

$$E_{p_{k,n}}^1 H_{b_{k,n}} = E_{p_{k-1,n} p_{k,n}}^2 H_{b_{k,n}} = H_{b_{k,n}},$$

für v aus \mathfrak{H} hat man daher

$$(12.9) \quad \begin{aligned} \|B^{1/2} A_{p_{k,n}}^1 H_{b_{k,n}} v\| &= \|A_{p_{k,n}}^1 H_{b_{k,n}} v\|_0 \leq c_{38} (\lambda_{k,n} - \lambda_{k-1,n}) \|H_{b_{k,n}} v\| \\ \|B^{1/2} A_{p_{k,n}}^2 H_{b_{k,n}} v\| &= \|A_{p_{k,n}}^2 H_{b_{k,n}} v\|_0 \leq c_{39} (\lambda_{k,n} - \lambda_{k-1,n}) \|H_{b_{k,n}} v\| \\ \|B^{1/2} H_{b_{k,n}} v\| &\leq c_{40} \|H_{b_{k,n}} v\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } f, g \text{ aus } \mathfrak{H} \text{ folgt nun } (\lambda_{k,n} - \lambda_{l,n}) (H_{b_{k,n}} f, H_{b_{l,n}} g) \\ = -(\delta^2 A_{p_{k,n}}^1 + t^1 A_{p_{k,n}}^2) H_{b_{k,n}} f, H_{b_{l,n}} g_0 + (H_{b_{k,n}} f, (\delta^2 A_{p_{l,n}}^1 + t^1 A_{p_{l,n}}^2) H_{b_{l,n}} g)_0 \\ = -((B)^{1/2} (\delta^2 A_{p_{k,n}}^1 + t^1 A_{p_{k,n}}^2) H_{b_{k,n}} f, (B)^{1/2} H_{b_{l,n}} g) + \\ + ((B)^{1/2} H_{b_{k,n}} f, (B)^{1/2} (\delta^2 A_{p_{l,n}}^1 + t^1 A_{p_{l,n}}^2) H_{b_{l,n}} g), \end{aligned}$$

⁴⁾ Die Zahl $3/2 \pi$ ist nur eine wahllos herausgegriffene Schranke und kann leicht verbessert werden.

⁵⁾ Vgl. [12], S. 6.

daher gilt

$$H_{b_{k,n}} H_{b_{l,n}} = \frac{1}{\lambda_{k,n} - \lambda_{l,n}} H_{b_{k,n}} \{ -[(B)^{1/2} (\delta^2 A_{p_{k,n}}^1 + t^1 A_{p_{k,n}}^2) H_{b_{k,n}}]^* [(B)^{1/2} H_{b_{l,n}}] + \\ + [(B)^{1/2} H_{b_{k,n}}]^* [(B)^{1/2} (\delta^2 A_{p_{l,n}}^1 + t^1 A_{p_{l,n}}^2) H_{b_{l,n}}] \} H_{b_{l,n}}.$$

Setzt man also $Z_k = H_{b_{k,n}}$; $M_k = -(B)^{1/2} (\delta^2 A_{p_{k,n}}^1 + t^1 A_{p_{k,n}}^2) H_{b_{k,n}}$; $N_k = (B)^{1/2} H_{b_{k,n}}$, so sind mit diesen Operatoren und mit $\gamma_k = \lambda_{k,n}$ nach (12.9) die Voraussetzungen des Hilfssatzes 12 erfüllt und es folgt insbesondere $\left\| \sum_{k=1}^n Z_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n H_{b_{k,n}} \right\| \leq c_{27}$, w.z.b.w.

§ 13. Einfluß der irregulären Punkte auf das kontinuierliche Spektrum von \underline{A} in \mathfrak{A} .

Satz 9: Seien die Voraussetzungen von Satz 1 und die des Zusatzes von Satz 1 erfüllt, so daß \underline{A} in \mathfrak{A} und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ hypermaximal sind.

Behauptung: Ist $\varphi_\mu, -\infty < \mu < +\infty$, eine hinsichtlich der Metrik des Raumes \mathfrak{H} stetig von μ abhängende Schar von Vektoren aus dem Durchschnitt der Räume \mathfrak{A} und $\tilde{\mathfrak{A}}$, für die mit einem reellen λ_0 gilt

$$(13.1) \quad \underline{A} \varphi_\mu = \lambda_0 \varphi_\mu; \quad \tilde{A} \varphi_\mu = \int_0^\mu \alpha d\varphi_\alpha, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \varphi_0 = 0,$$

so folgt $\varphi_\mu = 0$.

Ist $\psi_\lambda, -\infty < \lambda < +\infty$ eine hinsichtlich der Metrik des Raumes \mathfrak{H} stetig von λ abhängende Vektorenschar mit $\psi_\lambda \in \mathfrak{A} \cdot \tilde{\mathfrak{A}}, -\infty < \lambda < +\infty$, für die mit einem reellen μ_0 gilt

$$(13.2) \quad \underline{A} \psi_\lambda = \int_0^\lambda \alpha d\psi_\alpha, \quad \tilde{A} \psi_\lambda = \mu_0 \psi_\lambda, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \quad \psi_0 = 0,$$

so folgt $\psi_\lambda = 0$.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es, den ersten Teil der Behauptung herzuleiten. Da die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind, gilt für jedes reelle μ außer höchstens abzählbar vielen entweder die Bedingung (1_a) oder die Bedingung (1_b). Wenn es gelingt zu zeigen, daß in der Umgebung jedes solchen Punktes μ die Funktion φ_μ konstant ist, so folgt aus $\varphi_0 = 0$ und aus der vorausgesetzten Stetigkeit von φ_μ sofort $\varphi_\mu = 0$, also die Aussage des Satzes.

Gelte für $\lambda = \lambda_0$ die Bedingung (1_a). Nach Hilfssatz 6 liegt dann für ein hinreichend kleines Rechteck $I: \lambda' \leq \lambda \leq \lambda'', \mu' \leq \mu \leq \mu''$, welches den Punkt $\{\lambda_0, \mu_0\}$ im Innern enthält, der Vektor $(s^2)^{\frac{1}{2}} F_I f$ in \mathfrak{H}_0 . Für $\varphi_{\lambda_\mu} = \varphi_\mu - \varphi_{\mu'}$ folgt aus (13.1) die Relation $F_I \varphi_{\lambda_\mu} = \varphi_{\lambda_\mu}$, sofern man μ auf das Intervall $\mu' \leq \mu \leq \mu''$ beschränkt. Also liegt $(s^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_{\lambda_\mu}$ für diese μ in \mathfrak{H}_0 .

Definiere für u, v aus \mathfrak{H}_0 das neue Skalarprodukt $(u, v)_{s^2, 1} = (u, s^2 t^1 v)_0$ und ergänze den Raum \mathfrak{H}_0 durch Hinzufügen idealer Elemente zu einem neuen Hilbertraum $\mathfrak{H}_{s^2, 1}$, der hinsichtlich der zu obigem neuen Produkt gehörigen (positiv definiten) Metrik vollständig ist. Die in § 1 benutzte Spektral-

darstellung $u \leftrightarrow u(x, y)$ des Raumes \mathfrak{H}_0 induziert dann auch eine Darstellung des Raumes \mathfrak{H}_{s^1, t^1} durch Funktionen $u(x, y)$. Der Raum \mathfrak{H}_{s^1, t^1} wird dargestellt durch die Gesamtheit der $u(x, y)$ mit

$$\int_{\sigma^1} \int_{\sigma^2} |u(x, y)|^2 t^1(x) s^2(y) d\tau^1(x) d\tau^2(y) < \infty.$$

Das bewirkt, daß gewisse der hinzugefügten idealen Elemente von \mathfrak{H}_{s^1, t^1} mit Elementen des Raumes \mathfrak{H} identifiziert werden können. Wir werden nämlich das Element aus \mathfrak{H}_{s^1, t^1} und das aus \mathfrak{H} nicht unterscheiden, das zu einem $u(x, y)$ gehört, für welches einerseits

$$\int_{\sigma^1} \int_{\sigma^2} |u(x, y)|^2 t^1(x) s^2(y) d\tau^1(x) d\tau^2(y) < \infty,$$

andererseits

$$\int_{\sigma^1} \int_{\sigma^2} |u(x, y)|^2 (s^1(x) s^2(y) + t^1(x) t^2(y)) d\tau^1(x) d\tau^2(y) < \infty$$

gilt. Beachtet man dies, so kann man sagen, daß der Raum \mathfrak{H}_{s^1, t^1} alle Elemente aus \mathfrak{H} enthält, für die $(s^2)^{\frac{1}{2}} f$ in \mathfrak{H}_0 liegt oder für die $(t^1)^{\frac{1}{2}} f$ in \mathfrak{H}_0 liegt. Also ist auch φ_{Δ_μ} für $\mu' \leq \mu \leq \mu''$ in \mathfrak{H}_{s^1, t^1} enthalten.

Für u^j aus \mathfrak{H}^j und $u = \sum_{r=1}^N u_r^1 u_r^2$, u^j aus \mathfrak{H}^j , erkläre

$$(u^1, u) = \sum_{r=1}^N (u^1, u_r^1) u_r^2; \quad (u^2, u) = \sum_{r=1}^N (u^2, u_r^2) u_r^1.$$

Ersichtlich ist (u^1, u) Element von \mathfrak{H}^2 , (u^2, u) Element von \mathfrak{H}^1 . Benutzt man die in § 1 eingeführte Spektraldarstellung, so folgt mit $u(x, y) = \sum_{r=1}^N u_r^1(x) u_r^2(y)$

und $\overline{u^1(x)} u(x, y) = \sum_{r=1}^N \overline{u^1(x)} u_r^1(x) u_r^2(y)$ die Relation

$$(u^1, u)|_y = \int_{\sigma^1} \overline{u^1(x)} u(x, y) d\tau^1(x).$$

Das Produkt $\overline{u^1(x)} u(x, y)$ ist dabei Element des in § 1 definierten Raumes \mathfrak{S}_y^2 ; wie hier nicht näher bewiesen werden soll, gilt

$$|\overline{u^1(x)} u(x, y)| \leq |u^1(x)| |u(x, y)|^6.$$

Also folgt unter Benutzung der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|(u^1, u)\|^2 &= \int_{\sigma^2} d\tau^2(y) \left| \int_{\sigma^1} \overline{u^1(x)} u(x, y) d\tau^1(x) \right|^2 \\ &\leq \int_{\sigma^2} d\tau^2(y) \left(\int_{\sigma^1} |u^1(x)| |u(x, y)| d\tau^1(x) \right)^2 \\ &\leq \int_{\sigma^1} |u^1(x)|^2 d\tau^1(x) \int_{\sigma^2} \int_{\sigma^1} |u(x, y)|^2 d\tau^1(x) d\tau^2(y) \\ &= \|u^1\|^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$(13.3) \quad \|(u^1, u)\| \leq \|u^1\| \|u\| \quad \text{und entsprechend} \quad \|(u^2, u)\| \leq \|u^2\| \|u\|.$$

⁶⁾ Im Falle, daß $u(x, y)$ und $u^1(x)$ Skalare sind, ist die Aussage trivial, zum allgemeinen Fall vergleiche man etwa [3], Hilfssatz 1.4.1.

Diese beiden Ungleichungen ermöglichen es, die Produkte (u^1, u) ; (u^2, u) durch stetige Fortsetzung für jedes u^j aus \mathfrak{H}^j und u aus \mathfrak{H}_0 zu erklären. (u^1, u) ist stets ein Vektor aus \mathfrak{H}^2 , (u^2, u) dagegen ein Vektor aus \mathfrak{H}^1 . (u^j, u) ist stetig in bezug auf beide Variablen u^j und u hinsichtlich der Metriken von \mathfrak{H}^j bzw. von \mathfrak{H}_0 .

Ist u ein Element des in § 4 definierten Raumes \mathfrak{A}_1 , so folgt $(u^2, u) \in \mathfrak{A}^1$ für u^2 aus \mathfrak{H}^2 und es gilt $A^1(u^2, u) = (u^2, A^1 u)$. Um das einzusehen, werde berücksichtigt, daß A^1 im Raum aller $u = \sum_{\nu=1}^N u_\nu^1, u_\nu^2, u_\nu^1$ aus \mathfrak{A}^1, u_ν^2 aus \mathfrak{H}^2 wesentlich selbstadjungiert ist, also durch Abschließen aus diesem Definitionsbereich wieder auf den Raum \mathfrak{A}_1 fortgesetzt werden kann. Für solche Elemente ist nämlich die Aussage $(u^2, u) \in \mathfrak{A}^1, A^1(u^2, u) = (u^2, A^1 u)$ trivial. Entsprechend gilt $(u^1, u) \in \mathfrak{A}^2$ und $A^2(u^1, u) = (u^1, A^2 u)$ für u aus \mathfrak{A}_2, u^1 aus \mathfrak{H}^1 und entsprechend folgt z. B. $(u^2, s^1 u) = s^1(u^2, u), \dots, (u^1, t^2 u) = t^2(u^1, u)$ für u^j aus \mathfrak{H}^j, u aus \mathfrak{H}_0 .

Es liegt $\varphi_{A_\mu} = F_I \varphi_{A_\mu}$ im Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{(\underline{A}-i)(\tilde{\underline{A}}-i)}$ des Operators $(\underline{A}-i)(\tilde{\underline{A}}-i)$, daher liefert Hilfssatz 3, daß $e_\varepsilon^2 \varphi_{A_\mu}$ in \mathfrak{A}_1 und daß $e_\varepsilon^1 \varphi_{A_\mu}$ in \mathfrak{A}_2 liegt. Anwendung der Formeln (4.11) für $p_0 = \{0, 0\}, \bar{\theta} = 0$ liefert

$$(13.4) \quad \begin{aligned} A^1 e_\varepsilon^2 \varphi_{A_\mu} &= \lambda_0 s^1 e_\varepsilon^1 \varphi_{A_\mu} + t^1 \int_{\mu_0}^{\mu} \alpha d(e_\varepsilon^2 \varphi_\alpha), \\ A^2 e_\varepsilon^1 \varphi_{A_\mu} &= \lambda_0 t^2 e_\varepsilon^1 \varphi_{A_\mu} - s^2 \int_{\mu_0}^{\mu} \alpha d(e_\varepsilon^1 \varphi_\alpha). \end{aligned}$$

Mit u^j aus \mathfrak{H}^j bilde $\varphi_\mu^1 = (u^2, e_\varepsilon^2 \varphi_\mu)$, $\varphi_\mu^2 = (u^1, e_\varepsilon^1 \varphi_\mu)$. Für $\varphi_{A_\mu}^j = \varphi_\mu^j - \varphi_\mu^j$, folgt dann unter Berücksichtigung der oben erläuterten Eigenschaften der Produkte (u^j, u) , daß $\varphi_{A_\mu}^j$ in \mathfrak{A}^j liegt für $\mu' \leq \mu \leq \mu''$ und daß gilt

$$(13.5) \quad \begin{aligned} A^1 \varphi_{A_\mu}^1 &= \lambda_0 s^1 \varphi_{A_\mu}^1 + t^1 \int_{\mu_0}^{\mu} \alpha d\varphi_\alpha^1, \\ A^2 \varphi_{A_\mu}^2 &= \lambda_0 t^2 \varphi_{A_\mu}^2 - s^2 \int_{\mu_0}^{\mu} \alpha d\varphi_\alpha^2. \end{aligned}$$

Die φ_μ^j sind überdies stetig von μ abhängig. Definiert man also die Operatoren $Z^{1'} = (t^1)^{-1}(A^1 - \lambda_0 s^1)$ und $Z^{2'} = -(\varepsilon^2)^{-1}(A^2 - \lambda_0 t^2)$ in den Definitionsbereichen $\mathfrak{Z}^{1'} = \mathfrak{D}_{(t^1)^{-1}(A^1 - \lambda_0 s^1)}, \mathfrak{Z}^{2'} = \mathfrak{D}_{(\varepsilon^2)^{-1}(A^2 - \lambda_0 t^2)}$, so folgt $\varphi_{A_\mu}^j \in \mathfrak{Z}^{j'}$ und

$$(13.6) \quad Z^{j'} \varphi_{A_\mu}^j = \int_{\mu_0}^{\mu} \alpha d\varphi_\alpha^j.$$

Wir bezeichnen den Raum aller $\varphi_{A_\mu}^j$ zu beliebigem $\mu' \leq \mu \leq \mu'', u^j \in \mathfrak{H}^j, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, und aller endlichen Linearkombinationen dieser $\varphi_{A_\mu}^j$ mit \mathfrak{Z}^j . Wir denken uns für u^j, v^j aus \mathfrak{Z}^j die Skalarprodukte

$$(u^1, v^1)_t = (u^1, t^1 v^1); (u^2, v^2)_\varepsilon = (u^2, \varepsilon^2 v^2)$$

eingeführt und ergänzen alsdann die Räume \mathfrak{Z}^j durch ideale Elemente zu zwei hinsichtlich der zu diesen Produkten gehörigen Metriken vollständigen Räumen \mathfrak{U}^j . Wir schränken die Operatoren $Z^{j'}$ in $\mathfrak{Z}^{j'}$ ein auf die Definitionsbereiche \mathfrak{Z}^j und nennen die Einschränkungen Z^j , dann sind Z^j in \mathfrak{Z}^j in den

Räumen \mathcal{U} (d. h. hinsichtlich der oben eingeführten Skalarprodukte) hermitesch und sogar nach (13.6) zerlegbar, denn ihre Definitionsbereiche enthalten ein vollständiges System von stetigen Eigenpaketen⁷⁾. Das Spektrum von Z^j ist rein kontinuierlich und bedeckt ganz oder teilweise das Intervall $\mu' \leq \mu \leq \mu''$. Denn gäbe es einen Punkteigenwert, so wäre der zugehörige Eigenvektor auf jedem der stetigen φ_{μ}^j orthogonal, müßte also verschwinden. Wir bezeichnen die Spektralscharen von Z^j in \mathfrak{H}^j mit P_{μ}^j und definieren für beliebige Intervalle $\Delta': \mu'_1 < \mu \leq \mu'_2$ die Projektionen $P_{\Delta'}^j = P_{\mu'_2}^j - P_{\mu'_1}^j$. Offensichtlich ist $P_{\Delta'}^j \varphi_{\Delta'}^j = \varphi_{\Delta'}^j = \varphi_{\mu'_2}^j - \varphi_{\mu'_1}^j$ für jedes $\varphi_{\Delta'}^j = \varphi_{\mu'_2}^j - \varphi_{\mu'_1}^j$, sofern nur gilt $\mu'_1 < \mu'_2 \leq \mu_2$; $\mu' \leq \mu_1$; $\mu_2 \leq \mu''$. Auch sind die Operatoren P_{μ}^j in μ hinsichtlich der Metriken $\|u^1\|_1$ bzw. $\|u^2\|_2$ stetig.

Wir können die Skalarprodukte $(u^1, v^1)_1$ und $(u^2, v^2)_2$ auch für Vektoren u^j, v^j aus \mathfrak{H}^j definieren. In ähnlicher Weise wie bei der Definition von \mathcal{U} gelangen wir so zu zwei hinsichtlich dieser Metriken vollständigen Hilberträumen \mathfrak{H}_1^j und \mathfrak{H}_2^j , die die Räume \mathcal{U}^1 bzw. \mathcal{U}^2 enthalten. Q_{μ}^j sei die bezüglich $(u^1, v^1)_1$ bzw. $(u^2, v^2)_2$ orthogonale Projektion des Raumes \mathfrak{H}_1^j bzw. \mathfrak{H}_2^j auf den Wertebereich $P_{\mu}^j \mathcal{U}^j$ der Projektion P_{μ}^j . Man hat dann für $Q_{\Delta'}^j = Q_{\mu'_2}^j - Q_{\mu'_1}^j$ auch $Q_{\Delta'}^j \varphi_{\Delta'}^j = \varphi_{\Delta'}^j$, $\Delta' \subset \Delta$, und Q_{μ}^j sind hinsichtlich der Metriken von \mathfrak{H}_1^j bzw. \mathfrak{H}_2^j stetig.

Um den Beweis des Satzes zu vervollständigen, bemerke man, daß der anfangs definierte Raum \mathfrak{H}_{s^1, t^1} als direktes Produkt (im v. NEUMANNschen Sinne) der beiden Räume \mathfrak{H}_1^1 und \mathfrak{H}_2^1 gedeutet werden kann: $\mathfrak{H}_{s^1, t^1} = \mathfrak{H}_1^1 \otimes \mathfrak{H}_2^1$. Für zwei Intervalle Δ, Δ' mit $\Delta' \subset \Delta$ folgt

$$Q_{\Delta'}^1 \varphi_{\Delta'}^1 = \varphi_{\Delta'}^1 \text{ oder } Q_{\Delta'}^1 (u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta}) = (u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta}).$$

Hierin ersetzen wir u^2 durch $s^2 u^2$ und multiplizieren skalar mit u^1 aus \mathfrak{H}_1^1 :

$$\begin{aligned} (u^1, Q_{\Delta'}^1 (s^2 u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta}))_1 &= (Q_{\Delta'}^1 u^1, (s^2 u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta}))_1 \\ &= (Q_{\Delta'}^1 u^1 \cdot u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1} = (u^1 u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1}. \end{aligned}$$

Also folgt $(Q_{\Delta'}^1 u^1 u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1} = (u^1 u^2, e_{\varepsilon}^2 \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1}$. Da, wie anfangs gezeigt, φ_{Δ} dem Raum \mathfrak{H}_{s^1, t^1} angehört, können wir hierin ε gegen Null streben lassen:

$$(13.7) \quad (Q_{\Delta'}^1 u^1 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1} = (u^1 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1}, \quad u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}_1^1, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_2^2.$$

In entsprechender Weise folgt

$$(13.8) \quad (u^1 Q_{\Delta'}^2 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1} = (u^1 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1}, \quad u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}_1^1, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_2^2.$$

Wendet man beide Formeln hintereinander an, so ergibt sich

$$(13.9) \quad (Q_{\Delta'}^1 u^1 Q_{\Delta'}^2 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1} = (u^1 u^2, \varphi_{\Delta})_{s^1, t^1}, \quad u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}_1^1, u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_2^2.$$

⁷⁾ Die Metriken $\|u^1\|_1 = [(u^1, u^1)_1]^{\frac{1}{2}}$ und $\|u^2\|_2 = [(u^2, u^2)_2]^{\frac{1}{2}}$ sind schwächer als die Metriken $\|u^j\|$, denn wegen der Beschränktheit von t^1 und s^2 folgt $\|u^1\|_1 \leq \|u^1\|$, $\|u^2\|_2 \leq \|u^2\|$, also sind die Eigenpakete φ_{μ}^j sämtlich auch hinsichtlich der neuen Metrik stetig.

⁸⁾ Dabei wurde benutzt, daß gilt $(u^1, (s^2 u^2, f))_1 = (u^1 u^2, f)_{s^1, t^1}$ für u^1 aus \mathfrak{H}_1^1 , u^2 aus \mathfrak{H}_2^2 und f aus \mathfrak{H}_0 . Diese Relation ist für Elemente f der Form $f = \sum_{r=1}^n f_r^1 f_r^2$ trivial; für beliebiges f aus \mathfrak{H}_0 folgt sie sofort aus den Stetigkeitseigenschaften der darin auftretenden Produkte. Vgl. auch [3], § 1.4, Regel II.

Teilt man nun das Intervall $\mu' \leq \mu \leq \mu''$ äquidistant in n Teilintervalle $\Delta_\nu, \nu = 1, \dots, n$ und summiert (13.9) über alle Δ_ν , so folgt mit $\varphi_{\Delta'} = \varphi_{\Delta_n} = \varphi_{\mu''} - \varphi_{\mu'}$ die Beziehung

$$(13.10) \quad \left(\sum_{\nu=1}^n Q_{\Delta_\nu}^1 u^1 Q_{\Delta_\nu}^2 u^2, \varphi_{\Delta_n} \right)_{s^2 t^2} = (u^1 u^2, \varphi_{\Delta_n})_{s^2 t^2}.$$

Oder man hat

$$\begin{aligned} |(u^1 u^2, \varphi_{\Delta_n})_{s^2 t^2}|^2 &\leq \|\varphi_{\Delta_n}\|_{s^2 t^2}^2 \left\| \sum_{\nu=1}^n Q_{\Delta_\nu}^1 u^1 Q_{\Delta_\nu}^2 u^2 \right\|_{s^2 t^2}^2 \\ &= \|\varphi_{\Delta_n}\|_{s^2 t^2}^2 \sum_{\nu=1}^n \|Q_{\Delta_\nu}^1 u^1\|_t^2 \|Q_{\Delta_\nu}^2 u^2\|_s^2. \end{aligned}$$

Läßt man n gegen Unendlich rücken, so strebt die rechte Seite gegen Null, denn es ist $\|Q_{\Delta}^1 u^1\|_t^2 = \|Q_{\mu}^1 u^1\|_t^2 - \|Q_{\mu'}^1 u^1\|_t^2$ und $\|Q_{\mu}^1 u^1\|_t^2$ ist stetig und Entsprechendes gilt von Q_{μ}^2 . Somit hat man $(u^1 u^2, \varphi_{\Delta_n}) = 0$ für alle u^1 aus \mathfrak{H}_s^1 und alle u^2 aus \mathfrak{H}_s^2 . Daraus folgt $\varphi_{\Delta_n} = 0$. Also ist φ_{μ} an der Stelle μ_0 konstant und der Satz ist bewiesen.

Die Hauptkonsequenz von Satz 9 ist, daß das kontinuierliche Spektrum von \underline{A} in \mathfrak{A} vollständig durch reguläre Mengen des Simultanspektrums ausgeschöpft werden kann. Denn in etwas anderer Formulierung lautet seine zweite Aussage: *Es gibt kein Eigenpaket ψ_λ von \underline{A} in \mathfrak{A} , welches gleichzeitig für jedes λ Punkteigenwert von \tilde{A} in \mathfrak{A} ist.* Daraus folgt: *Jedes stetige Eigenpaket von \underline{A} in \mathfrak{A} läßt sich beliebig genau durch stetige Simultaneigenpakete von \underline{A} in \mathfrak{A} und \tilde{A} in \mathfrak{A} approximieren.* Da es höchstens abzählbar viele irreguläre Geraden $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ gibt, deren λ - bzw. μ -Koordinaten auf der reellen Achse nirgends dicht liegen, können diese approximierenden Simultaneigenpakete so gewählt werden, daß ihre Grundgebiete keinen Punkt dieser Geraden enthalten, also reguläre Punktmengen des Simultanspektrums sind.

§ 14. Das simultane Punktspektrum von \underline{A} und \tilde{A} .

Satz 10: Seien die Voraussetzungen von Satz 1 und die des Zusatzes 1 von Satz 1 erfüllt.

Behauptung: Die Eigenwerte von \underline{A} in \mathfrak{A} sind genau diejenigen Punkte λ , zu denen es mindestens ein μ gibt, so daß die Gleichungen

$$(14.1) \quad (A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0, \quad (A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2) \varphi^2 = 0$$

gleichzeitig je eine Lösung $\varphi^j \neq 0$ aus \mathfrak{H}^j besitzen.

Jeder Eigenvektor φ des Operators \underline{A} in \mathfrak{A} zu beliebigem Eigenwert λ zerfällt in eine Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise orthogonalen Simultaneigenvektoren von \underline{A} und \tilde{A} :

$$(14.2) \quad \begin{aligned} \varphi &= \sum_{\nu} \varphi_{\nu}; \quad \varphi_{\nu} \neq 0; \quad (\varphi_{\nu}, \varphi_{\kappa}) = 0, \quad \nu \neq \kappa; \\ \underline{A} \varphi_{\nu} &= \lambda \varphi_{\nu}; \quad \tilde{A} \varphi_{\nu} = \mu_{\nu} \varphi_{\nu}, \quad \mu_{\nu} \neq \mu_{\kappa}, \quad \nu \neq \kappa. \end{aligned}$$

Ein beliebiger der Vektoren φ , kann in der Form $\varphi = \sum_n \varphi_{r,n}^1 \varphi_{r,n}^2$ dargestellt werden mit Vektoren $\varphi_{r,n}^j$ aus \mathfrak{N}^j , die den Gleichungen

$$(A^1 - \lambda s^1 - \mu_r t^1) \varphi_{r,n}^1 = 0, \quad (A^2 - \lambda t^2 + \mu_r s^2) \varphi_{r,n}^2 = 0$$

genügen, und so daß die $\varphi_{r,n} = \varphi_{r,n}^1 \varphi_{r,n}^2$ in \mathfrak{H} paarweise orthogonal sind, sofern nur für die Nullräume \mathfrak{N}^j der Operatoren $(A^1 - \lambda s^1 - \mu_r t^1)$, $(A^2 - \lambda t^2 + \mu_r s^2)$ mindestens je eine Ungleichung der folgenden beiden Zeilen (14.3) und (14.4) erfüllt ist.

$$(14.3) \quad (u^1, u^1) \leq c (u^1, s^1 u^1); \quad (u^2, u^2) \leq c (u^2, t^2 u^2)$$

für u^j aus \mathfrak{N}^j ;

$$(14.4) \quad (u^1, u^1) \leq c (u^1, t^1 u^1); \quad (u^2, u^2) \leq c (u^2, s^2 u^2)$$

für u^j aus \mathfrak{N}^j .

Insbesondere ist das der Fall, wenn wenigstens einer der beiden Räume \mathfrak{N}^j eine endliche Dimension besitzt.

Beweis: Wir ziehen zum Beweis wesentlich die im vorigen Paragraphen eingeführten Produkte (u^j, u) heran.

Gelten zunächst für $\varphi^j \neq 0$ aus \mathfrak{N}^j die Gleichungen

$$(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0, \quad (A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2) \varphi^2 = 0,$$

dann folgt

$$\varphi = \varphi^1 \varphi^2 \in \mathfrak{N} \cdot \tilde{\mathfrak{N}}, \quad A \varphi = \lambda \varphi, \quad \tilde{A} \varphi = \mu \varphi.$$

Gelte umgekehrt für ein reelles λ und ein $\varphi \neq 0$ die Gleichung $A \varphi = \lambda \varphi$. Ist dann $\tilde{E}_\mu = \tilde{P}_\mu + \tilde{Q}_\mu$ eine Zerlegung der Spektralschar des Operators \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{N}}$ in einen stetigen Anteil \tilde{P}_μ und einen Anteil \tilde{Q}_μ , für den $\|\tilde{Q}_\mu u\|^2$ für jedes u aus \mathfrak{H} in μ konstant ist bis auf höchstens abzählbar viele Sprungstellen, dann folgt nach Satz 9 sofort $\tilde{P}_\mu \varphi = 0$, $-\infty < \mu < +\infty$, denn der Vektor $(P_\mu - P_0) \varphi$ genügt den dort gestellten Voraussetzungen. Also folgt sofort $\tilde{E}_\mu \varphi = \tilde{Q}_\mu \varphi$ und daher gilt $\varphi = \sum_r \varphi_r$ mit $\varphi_r \neq 0$; $\tilde{A} \varphi_r = \lambda \varphi_r$; $\tilde{A} \varphi_r = \mu_r \varphi_r$; $\mu_r \neq \mu_s$, $r \neq s$; $(\varphi_r, \varphi_s) = 0$, $r \neq s$. Wir können auf einen Vektor φ_r den Hilfssatz 3 anwenden und aus den Gleichungen (4.11) mit $p_0 = \{0, 0\}$ und $\vartheta = 0$ folgern:

$$(14.5) \quad \begin{aligned} A^1 e_r^2 \varphi_r &= \lambda s^1 e_r^2 \varphi_r + \mu_r t^1 e_r^2 \varphi_r \\ A^2 e_r^1 \varphi_r &= \lambda t^2 e_r^1 \varphi_r - \mu_r s^2 e_r^1 \varphi_r. \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen folgt unter Verwendung der beim Beweis von Satz 9 angestellten Überlegungen

$$(14.6) \quad \begin{aligned} A^1 (u^2, e_r^2 \varphi_r) &= \lambda s^1 (u^2, e_r^2 \varphi_r) + \mu_r t^1 (u^2, e_r^2 \varphi_r) \\ A^2 (u^1, e_r^1 \varphi_r) &= \lambda t^2 (u^1, e_r^1 \varphi_r) - \mu_r s^2 (u^1, e_r^1 \varphi_r). \end{aligned}$$

Da $\varphi_r \neq 0$ ist, lassen sich hierin u^j und ε so wählen, daß $(u^j, e_r^j \varphi_r) \neq 0$ gilt für $j = 1, 2$. Also ist das Gleichungssystem (14.1) für dieses λ mit $\mu = \mu_r$ nicht trivial auflösbar.

Nehmen wir an, es gelte für ein v und für alle u^1 aus dem Nullraum \mathfrak{N}^1 des Operators $(A^1 - \lambda s^1 - \mu_r t^1) u^1$ die Beziehung $(u^1, u^1) \leq c (u^1, s^1 u^1)$. Dann folgt ganz analog zu Hilfssatz 6, daß $(s^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_r$ in \mathfrak{H}_0 liegt. Denn aus $(u^1, u^1) \leq c (u^1, s^1 u^1)$ für u^1 aus \mathfrak{N}^1 ergibt sich

$$(14.7) \quad (u, u)_0 \leq c (u, s^1 u)_0$$

für alle u aus dem Nullraum \mathfrak{N}_1 des § 4 erklärten Operators $(A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$ in \mathfrak{N}_1 , das kann man etwa unter Benutzung der Spektraldarstellung des § 1 zeigen. Die erste Gleichung (14.5) sagt nun aus, daß $e_\varepsilon^2 \varphi_r$ und damit auch $(s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 \varphi_r$ in \mathfrak{N}_1 liegt. Man erhält aus (14.7) die Beziehung

$$\begin{aligned} \|(s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 \varphi_r - (s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 \varphi_r\|_0^2 &\leq c ((e_\varepsilon^2 - e_\varepsilon'^2) \varphi_r, s^1 s^2 (e_\varepsilon^2 - e_\varepsilon'^2) \varphi_r)_0 \\ &\leq c \|e_\varepsilon^2 - e_\varepsilon'^2\| \varphi_r\|^2 < \varepsilon_0, \quad \varepsilon, \varepsilon' < \delta(\varepsilon_0); \end{aligned}$$

es folgt also die Existenz von $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (s^2)^{\frac{1}{2}} e_\varepsilon^2 \varphi_r$ auch in \mathfrak{H}_0 . Also liegt $(s^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_r$ in \mathfrak{H}_0 .

Ist überdies noch eine der Bedingungen (14.4) erfüllt, z. B. $(u^1, u^1) \leq c (u^1, t^1 u^1)$ für u^1 aus \mathfrak{N}^1 , so folgt, daß auch $(t^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_r$ in \mathfrak{H}_0 liegt bzw., daß $(s^1)^{\frac{1}{2}} \varphi_r$ in \mathfrak{H}_0 liegt. Aus beidem zusammen ergibt sich, daß $\varphi_r = s^2 \varphi_r + t^2 \varphi_r = s^2 \varphi_r + t^1 t^2 \varphi_r + t^2 s^1 \varphi_r$ selbst in \mathfrak{H}_0 liegt.

Berücksichtigt man das, so kann man in (14.5) und (14.6) ε gegen Null streben lassen. Es folgt, daß φ_r dem Durchschnitt der Nullräume \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 angehört, wobei \mathfrak{N}_2 der Nullraum von $A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2$ in \mathfrak{N}_2 sei. (u^1, φ_r) liegt in \mathfrak{N}^2 und (u^2, φ_r) in \mathfrak{N}^1 für jedes u^j aus \mathfrak{H}^j . Ist u^2 orthogonal zu \mathfrak{N}^2 , so folgt $(u^1, (u^2, \varphi_r)) = (u^2, (u^1, \varphi_r)) = 0$ für u^1 aus \mathfrak{H}^1 .⁹⁾ Also ist $(u^2, \varphi_r) = 0$. Die beiden paarweise orthogonalen und normierten Systeme $\psi_{r,n}^2, \chi_{r,n}^2, n = 1, 2, \dots$ mögen zusammen \mathfrak{H}^2 aufspannen, es möge gelten $\psi_{r,n}^2 \in \mathfrak{N}^2, \chi_{r,n}^2 \perp \mathfrak{N}^2$, letzteres im Sinne der Metrik von \mathfrak{H}^2 . Dann folgt für jedes f aus \mathfrak{H}_0 eine Entwicklung der Form

$$(14.8) \quad f = \sum_n (\psi_{r,n}^2, f) \psi_{r,n}^2 + \sum_n (\chi_{r,n}^2, f) \chi_{r,n}^2,$$

eine Formel, auf deren Beweis wir hier verzichten. Für $f = \varphi_r$ ergibt sich $(\chi_{r,n}^2, f) = 0$, also folgt $\varphi_r = \sum_n (\psi_{r,n}^2, \varphi_r) \psi_{r,n}^2 = \sum_n \psi_{r,n}^1 \psi_{r,n}^2$ mit

$$\psi_{r,n}^1 = (\psi_{r,n}^2, \varphi_r) \in \mathfrak{N}^1, \quad \psi_{r,n}^2 \in \mathfrak{N}^2.$$

Die Vektoren $\psi_{r,n} = \psi_{r,n}^1 \psi_{r,n}^2$ sind bezüglich $(u, v)_0$ paarweise orthogonal und es sind ihre Faktoren $\psi_{r,n}^1$ Lösungen der Gleichungen (14.1). Zum Beweis des Satzes fehlt noch die Angabe einer Entwicklung von φ_r nach einem System $\varphi_{r,n} = \varphi_{r,n}^1 \varphi_{r,n}^2$, dessen Vektoren hinsichtlich (u, v) paarweise orthogonal sind. Ist etwa \mathfrak{N}^2 endlicher Dimension, so gelangt man zu einem solchen System, indem man speziell $\psi_{r,n}^2$ als Eigenvektoren der quadratischen Form $(u^2, s^2 v^2), u^2, v^2$ aus \mathfrak{N}^2 wählt, so daß neben $(\psi_{r,n}^2, \psi_{r,n}^2) = \delta_{n,n'}$ auch noch $(\psi_{r,n}^2, s^2 \psi_{r,n}^2) = 0$ gilt für $n \neq n'$ und somit auch $(\psi_{r,n}^2, t^2 \psi_{r,n}^2) = (\psi_{r,n}^2, (1 - s^2) \psi_{r,n}^2) = 0, n \neq n'$;

$$\begin{aligned} (\psi_{r,n}, \psi_{r,n'}) &= (\psi_{r,n}^1, s^1 \psi_{r,n'}^1) (\psi_{r,n}^2, s^2 \psi_{r,n'}^2) + (\psi_{r,n}^1, t^1 \psi_{r,n'}^1) (\psi_{r,n}^2, t^2 \psi_{r,n'}^2) = 0, n \neq n'. \end{aligned}$$

⁹⁾ Man überlegt sich leicht, daß man die Vertauschung $(u^1, (u^2, \varphi_r)) = (u^2, (u^1, \varphi_r))$ vornehmen kann. Vgl. dazu auch [3], § 1.4, Regel II.

In entsprechender Weise kann man verfahren, falls \mathfrak{N}^1 endlichdimensional ist.

Im Falle, daß beide Räume \mathfrak{N}^j unendlichdimensional sind, muß etwas anders argumentiert werden. Bildet man nach den Regeln der Definition des § 1 aus den beiden Räumen \mathfrak{N}^1 und \mathfrak{N}^2 mit den Skalarprodukten (u^1, v^1) bzw. (u^2, v^2) einen Raum \mathfrak{N} , wie dort der Raum \mathfrak{H} aus \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 gebildet wurde, unter Verwendung der durch die Formen $(u^j, s^j v^j)$; $(u^j, v^j v^j)$; u^j, v^j aus \mathfrak{N}^j definierten Operatoren \hat{s}^j, \hat{v}^j der Räume \mathfrak{N}^j in sich, so liegt φ_r in \mathfrak{N} und die letzte Frage ist beantwortet mit dem Beweis des folgenden Lemmas:

In jedem Hilbertraum \mathfrak{H} , der aus zwei Räumen \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 und Operatoren s^j, v^j nach den Regeln der Definition des § 1 gebildet worden ist, gibt es ein vollständiges, paarweise orthogonales und normiertes System $w_r, r = 1, 2, \dots$ von Vektoren in Produktform: $w_r = w_r^1 w_r^2$.

Der Beweis dieses Lemmas ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptresultat von [4]. Denn in \mathfrak{H}^1 und \mathfrak{H}^2 gibt es Operatoren mit diskrettem Spektrum. Für diese wurde in [4] gezeigt, daß der mit ihnen nach den Regeln der Definition des § 1 gebildete Operator ein vollständiges System von paarweise orthogonalen und normierten Eigenelementen in Produktform besitzt¹⁰⁾. Ein solches System sollte aber gerade gefunden werden.

§ 15. Die Selbstadjungiertheitsbedingungen im Falle partieller Differentialoperatoren A.

In fast allen Sätzen dieser Arbeit treten als entscheidende Voraussetzungen die Selbstadjungiertheitsbedingungen $(1_s), (1_t), (2_s), (2_t)$ auf. Es liegt daher nahe zu fragen, wann diese Bedingungen speziell in dem in § 8 behandelten wichtigsten Anwendungsfall erfüllt sind. Im Zusatz 2 zu Satz 1 haben wir bereits bemerkt, daß es ausreicht von einem der Operatoren A^j in \mathfrak{A}^j zu verlangen, sein Spektrum habe höchstens endlich viele Häufungspunkte, um die Erfüllung dieser Bedingungen in einer für die Voraussetzungen von Satz 1 und dessen Zusatz 1 ausreichenden Punktmenge zu garantieren. Allgemeiner können wir sagen:

Wenn der Durchschnitt δ der Häufungsspektren von A^1 und $-A^2$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten besteht, dann sind die Voraussetzungen von Satz 1 zur wesentlichen Selbstadjungiertheit von A in \mathfrak{A} erfüllt. Die Menge der Ausnahmepunkte ist enthalten in δ .

Wenn der Durchschnitt $\tilde{\delta}$ der Häufungsspektren von A^1 und A^2 aus höchstens abzählbar vielen Punkten besteht, dann sind die Voraussetzungen des Zusatzes 1 von Satz 1 für die wesentliche Selbstadjungiertheit von \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ erfüllt. Die Menge der Ausnahmepunkte ist enthalten in $\tilde{\delta}$.

Wir wollen nun hier noch ein weiteres Kriterium angeben, das speziell auf den Fall des § 8 geeicht ist. Wir setzen für die Operatoren A^j getrennte Randbedingungen voraus, so daß also die bekannte, zuerst von H. WEYL [15] angegebene Theorie der singulären STURM-LIOUVILLE-Eigenwertprobleme

¹⁰⁾ Die Übertragung der in [4] gewonnenen Ergebnisse auf den Fall abstrakter Hilberträume \mathfrak{H}^j macht keine Schwierigkeiten.

angewandt werden kann. $\psi^1(x)$, $\omega^1(x)$ seien zwei Lösungen der Differentialgleichung $-(p^1 u^1)' + (q^1 - i h^1 - i k^1) u^1 = 0$ (zu p^1, q^1, h^1, k^1 siehe § 8),

für die gilt $\int_{l_-^1}^{l_+^1} |\psi^1(x)|^2 (h^1(x) + k^1(x)) dx < \infty$, $\int_{l_-^1}^{l_+^1} |\omega^1(x)|^2 (h^1(x) + k^1(x)) dx < \infty$,

$p^1(\psi^{1'} \omega^1 - \psi^1 \omega^{1'}) = 1$ und so daß ψ^1 bei l_-^1 und ω^1 bei l_+^1 den für den Definitionsbereich \mathfrak{A}^1 geforderten Randbedingungen genügen. Es ist dann die GREENSCHE Funktion $g(x, x')$ des Operators $A^1 - i$ gegeben durch

$$g(x, x') = \psi^1(x') \omega^1(x) \text{ in } x' < x; \quad g(x, x') = \psi^1(x) \omega^1(x') \text{ in } x' \geq x,$$

so daß also gilt $(A^1 - i)^{-1} f^1 = \int_{l_-^1}^{l_+^1} g(x, x') f^1(x') \varrho^1(x') dx'$. Mit $\varrho^1(x) = h^1(x) + k^1(x)$

hat man

$$\begin{aligned} & \int_{l_-^1}^{l_+^1} |g(x, x')|^2 \varrho^1(x') dx' \\ &= |\omega^1(x)|^2 \int_{l_-^1}^x |\psi^1(x')|^2 \varrho^1(x') dx' + |\psi^1(x)|^2 \int_x^{l_+^1} |\omega^1(x')|^2 \varrho^1(x') dx'. \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} 2i \int_{l_-^1}^x |\psi^1(x')|^2 \varrho^1(x') dx' &= \int_{l_-^1}^x \overline{(p^1 \psi^{1'})'} \psi^1 - \overline{\psi^1} (p^1 \psi^{1'})' dx' \\ &= p^1(x) (\overline{\psi^{1'}(x)} \psi^1(x) - \overline{\psi^1(x)} \psi^{1'}(x)) \end{aligned}$$

und ebenso $2i \int_x^{l_+^1} |\omega^1(x')|^2 \varrho^1(x') dx' = -p^1(x) (\overline{\omega^{1'}(x)} \omega^1(x) - \overline{\omega^1(x)} \omega^{1'}(x))$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{l_-^1}^{l_+^1} |g(x, x')|^2 \varrho^1(x') dx' &= \frac{1}{2i} [\omega^1 \psi^1 \cdot \overline{p^1(\psi^{1'} \omega^1 - \omega^{1'} \psi^1)} - \\ &\quad - \overline{\omega^1 \psi^1} \cdot p^1(\psi^{1'} \omega^1 - \omega^{1'} \psi^1)]; \\ \int_{l_-^1}^{l_+^1} |g(x, x')|^2 \varrho^1(x') dx' &= \operatorname{Im} \{ \omega^1(x) \psi^1(x) \}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit m_ε die Menge aller Punkte x des Intervalles $l_-^1 < x < l_+^1$, für die gilt $s^1(x) = \frac{h^1(x)}{h^1(x) + k^1(x)} < \varepsilon$.

Kriterium: Die Bedingung (1_s) ist für den in § 8 erklärten Operator A^1 in \mathfrak{A}^1 für jedes reelle α erfüllt, sofern gilt

$$(15.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{m_\varepsilon} \operatorname{Im} \{ \omega^1(x) \psi^1(x) \} (h^1(x) + k^1(x)) dx = 0.$$

Beweis: Für u^1 aus \mathfrak{A}^1 gilt $u^1(x) = (g_x, (A^1 - i) u^1)$, wobei g_x der durch $g(x, x')$ für $x = x_0$, $l_-^1 < x' < l_+^1$, dargestellte Vektor des Raumes \mathfrak{H}^1 sei. Angenommen nun, es gälte für $v_{\Delta_n}^1 = E_{\Delta_n}^1 u_n^1$: $\|v_{\Delta_n}^1\| = 1$, $(v_{\Delta_n}^1, s^1 v_{\Delta_n}^1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ mit $E_{\Delta_n}^1 = E_{\lambda_n'}^1 - E_{\lambda_n''}^1$, $\lambda_n' < \lambda_0 < \lambda_n''$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n'' = \lambda_0$ (E_{λ}^1 sei die rechtsstetige Spektralschar von A^1 in \mathfrak{A}^1). Dann folgte

$$\|v_{\Delta_n}^1\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} (v_{\Delta_n}^1, s^1 v_{\Delta_n}^1) + \int_{m_\varepsilon} |v_{\Delta_n}^1(x)|^2 \varrho^1(x) dx.$$

Man hätte

$$\|v_{\Delta_n}^1(x)\|^2 = \|(g_x^1, (A^1 - i) v_{\Delta_n}^1)\|^2 \leq c \|g_x^1\|^2 \|v_{\Delta_n}^1\|^2 = c \operatorname{Im} \{\psi^1(x), \omega^1(x)\},$$

also

$$\int_{m_\varepsilon} |v_{\Delta_n}^1(x)|^2 dx \leq c \int_{m_\varepsilon} \operatorname{Im} \{\psi^1(x), \omega^1(x)\} \varrho^1(x) dx.$$

Wähle ε so klein, daß $\int_{m_\varepsilon} \operatorname{Im} \{\psi^1(x), \omega^1(x)\} \varrho^1(x) dx < \frac{1}{2c}$ wird, alsdann aber n

so groß, daß gilt $(v_{\Delta_n}^1, s^1 v_{\Delta_n}^1) < \frac{\varepsilon}{2}$, Es folgte $1 = \|v_{\Delta_n}^1\|^2 < 1$, also ein Widerspruch. Damit ist das Kriterium bewiesen. Entsprechendes läßt sich für die Bedingungen (1_t), (2_e) und (2_i) folgern. Insbesondere folgt aus dem Kriterium:

Wenn $s^1(x) = \frac{h^1(x)}{h^1(x) + k^1(x)}$ außerhalb eines Intervalles $l_-^{1'} < x < l_+^{1'}$ mit $l_-^1 < l_-^{1'} < l_+^{1'} < l_+^1$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt, dann gilt die Bedingung (1_e) für alle Punkte α des Spektrums von A^1 in \mathfrak{A}^1 und A in \mathfrak{A} ist wesentlich selbstadjungiert.

Wenn $l^1(x) = \frac{k^1(x)}{h^1(x) + k^1(x)}$ außerhalb $l_-^{1'} < x < l_+^{1'}$ oberhalb einer positiven Konstanten bleibt, dann gilt die Bedingung (1_i) für alle Punkte α des Spektrums von A^1 in \mathfrak{A}^1 und \tilde{A} in $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist wesentlich selbstadjungiert.

§ 16. Die Separation der Wellengleichung des Starkeffektes in parabolischen Koordinaten.

Es sei vorgelegt das Eigenwertproblem

$$(16.1) \quad Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u - \frac{2Z}{r} u + \varepsilon x u = \lambda u, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

im Gebiet G : $-\infty < x, y, z < +\infty$. Z und ε seien positive Zahlen. Der Hilbertraum \mathfrak{Q} sei die Gesamtheit aller $u(x, y, z)$, für die im LEBESGUESCHEN

Sinne gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx dy dz < \infty$; es sei ferner $(u, u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} u_1 dx dy dz$ für

u, u_1 aus \mathfrak{Q} . L sei erklärt im Definitionsbereich \mathfrak{D}_L aller zweimal stetig differenzierbaren u aus \mathfrak{Q} , für die auch Lu in \mathfrak{Q} liegt. Wir übergehen den Beweis der Tatsache, daß L in \mathfrak{D}_L hermitesch ist, wollen uns dagegen etwas mit der Spektralzerlegung des Operators L befassen. Dazu seien, einer Idee von SCHRÖDINGER folgend, parabolische Koordinaten eingeführt:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta); \quad y = \sqrt{\xi \eta} \cos \varphi; \quad z = \sqrt{\xi \eta} \sin \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Das Grundgebiet G transformiert sich in das Gebiet $G^*: 0 < \xi, \eta < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Für die Funktionen u aus \mathfrak{D}_L müssen für ξ, η, φ aus G^* alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach ξ, η, φ existieren und die Randbedingungen der Periodizität $u(\xi, \eta, 0) = u(\xi, \eta, 2\pi)$; $u_\varphi(\xi, \eta, 0) = u_\varphi(\xi, \eta, 2\pi)$ erfüllt sein; auch an den Rändern $\xi = 0$ und $\eta = 0$ werden sie gewissen Randbedingungen genügen müssen, die dafür sorgen, daß u auch auf der Achse $y = z = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist. Ferner folgt

$$(16.2) \quad (u, u_1) = \iint_{G^*} \bar{u} u_1 \frac{\xi + \eta}{4} d\xi d\eta d\varphi$$

man hat

$$L = \frac{4}{\xi + \eta} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon}{4} (\xi^2 - \eta^2) - Z \right\}.$$

Ein erster trivialer Separationsatz $u = e^{i\nu\varphi} v(\xi, \eta)$ führt uns auf die Operatoren

$$L_\nu = \frac{4}{\xi + \eta} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{\varepsilon}{4} (\xi^2 - \eta^2) - Z \right\},$$

$\nu = 0, \pm 1, \dots$

die als Transformationen des Hilbertraumes

$$\mathfrak{H}: \iint_0^\infty |v(\xi, \eta)|^2 \frac{\xi + \eta}{4} d\xi d\eta < \infty$$

mit dem Skalarprodukt $(v, v_1) = \iint_0^\infty \bar{v} v_1 \frac{\xi + \eta}{4} d\xi d\eta$ im Definitionsbereich

$\mathfrak{D}_{L_\nu}: v(\xi, \eta)$ zweimal stetig differenzierbar in $0 < \xi, \eta < \infty$;

$v, L_\nu v \in \mathfrak{H}$; Randbedingungen bei $\xi = 0$ und bei $\eta = 0$;

erklärt seien. Wenn für jedes $\nu = 0, \pm 1, \dots$, die Menge von Vektoren $\{\psi_\nu(\xi, \eta), v_{\lambda, \nu}(\xi, \eta)\}$ ein vollständiges System von Eigenelementen und Eigenpaketen des Operators L_ν in \mathfrak{D}_{L_ν} bildet, dann ist

$$\{e^{i\nu\varphi} \psi_\nu(\xi, \eta), e^{i\nu\varphi} v_{\lambda, \nu}(\xi, \eta)\}_{\nu=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

ein vollständiges System von Eigenelementen und Eigenpaketen des Operators L in \mathfrak{D}_L , das ist eine elementare Folgerung aus der Vollständigkeit des Systems der Funktionen $e^{i\nu\varphi}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, im Raum aller Funktionen $u^3(\varphi)$ mit $\int_0^{2\pi} |u^3(\varphi)|^2 d\varphi < \infty$. Es genügt daher, sich mit der Spektraltheorie der Operatoren L_ν in \mathfrak{D}_{L_ν} zu befassen.

Hier können nun vorstehende Sätze angewandt werden. Wir erklären

$$\mathfrak{H}^1: \text{Alle } u^1(\xi) \text{ mit } \int_0^\infty |u^1(\xi)|^2 (1 + \xi/4) d\xi < \infty;$$

$$\mathfrak{H}^2: \text{Alle } u^2(\eta) \text{ mit } \int_0^\infty |u^2(\eta)|^2 (1 + \eta/4) d\eta < \infty;$$

$$A_\nu^1 u^1 = \frac{1}{1 + \xi/4} \left\{ -\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{du^1}{d\xi} \right) + \left(\frac{\nu^2}{4} \frac{1}{\xi} - \frac{Z}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \xi^2 \right) u^1 \right\}$$

für u^1 aus

$$\mathfrak{H}^1: u^1 \text{ stetig, } \frac{du^1}{d\xi} \text{ totalstetig in } 0 < \xi < \infty; u^1, A_\nu^1 u^1 \text{ aus } \mathfrak{H}^1;$$

$$A_\nu^2 u^2 = \frac{1}{1 + \eta/4} \left\{ -\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{du^2}{d\eta} \right) + \left(\frac{\nu^2}{4} \frac{1}{\eta} - \frac{Z}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \eta^2 \right) u^2 \right\}$$

für u^2 aus

$$\mathfrak{A}_\nu^2: u^2 \text{ stetig, } \frac{du^2}{d\eta} \text{ totalstetig in } 0 < \eta < \infty; u^2, A_\nu^2 u^2 \text{ aus } \mathfrak{H}^2.$$

An den vier singulären Intervallenden $\xi = 0, \infty; \eta = 0, \infty$ ergibt sich folgendes asymptotische Verhalten der Lösungen der Differentialgleichungen $(A^j - i)u^j = 0$:

$$u_{0,1}^1 = \xi^{|\nu|/2} (1 + O(\xi));$$

$$u_{0,1}^2 = \eta^{|\nu|/2} (1 + O(\eta));$$

$$u_{0,2}^1 = \xi^{-|\nu|/2} (1 + O(\xi)) + c_1 u_{0,1}^1 \log \xi;$$

$$u_{0,2}^2 = \eta^{-|\nu|/2} (1 + O(\eta)) + c_2 u_{0,1}^2 \log \eta;$$

$$u_{\infty,1}^1 = e^{1/2} \sqrt[3]{\xi} \xi^{|\nu|/2} - \frac{i}{2\sqrt{\xi}} \xi^{|\nu|/2} \cdot \xi^{-|\nu|/2} (1 + O(\xi^{-1/2}));$$

$$u_{\infty,1}^2 = e^{i/3} \sqrt[3]{\eta} \eta^{|\nu|/2} - \frac{i}{2\sqrt{\eta}} \eta^{|\nu|/2} \cdot \eta^{-|\nu|/2} (1 + O(\eta^{-1/2}));$$

$$u_{\infty,2}^2 = e^{-1/2} \sqrt[3]{\xi} \xi^{|\nu|/2} + \frac{i}{2\sqrt{\xi}} \xi^{|\nu|/2} \cdot \xi^{-|\nu|/2} (1 + O(\xi^{-1/2}));$$

$$u_{\infty,2}^1 = e^{-i/3} \sqrt[3]{\eta} \eta^{|\nu|/2} + \frac{i}{2\sqrt{\eta}} \eta^{|\nu|/2} \cdot \eta^{-|\nu|/2} (1 + O(\eta^{-1/2})).$$

Daraus folgt: Für $\xi = \infty, \eta = \infty$ liegt für jedes ν Grenzpunktfall vor, für $\xi = 0, \eta = 0$ dagegen für $|\nu| > 1$ Grenzpunktfall, für $|\nu| \leq 1$ Grenzkreisfall. Wir schränken aus diesem Grunde die Definitionsbereiche $\mathfrak{A}_0^j, \mathfrak{A}_{\pm 1}^j$ bei $\xi = 0, \eta = 0$ noch durch je eine selbstadjungierte Randbedingung ein, die wir speziell so wählen wollen, daß die Funktionen $u_{0,1}^j$ sie erfüllen. Dann sind alle Operatoren A_ν^j in \mathfrak{A}_ν^j hypermaximal. Aus einem Kriterium von H. WEYL [16]¹¹⁾ folgt zudem, daß A_ν^1 in \mathfrak{A}_ν^1 für jedes ν ein diskretes Spektrum besitzt. Daher sind mit $A^j = A_\nu^j$ in $\mathfrak{A}^j = \mathfrak{A}_\nu^j$ und

$$s^1(\xi) = \frac{\xi/4}{1 + \xi/4}, \quad t^1(\xi) = \frac{1}{1 + \xi/4}, \quad s^2(\eta) = \frac{1}{1 + \eta/4}, \quad t^2(\eta) = \frac{\eta/4}{1 + \eta/4}$$

die Voraussetzungen von Satz 1 und dessen Zusatz 1 erfüllt, die nach § 1 gebildeten Operatoren A_ν in \mathfrak{A}_ν und \tilde{A}_ν in $\tilde{\mathfrak{A}}_\nu$ sind wesentlich selbstadjungiert. Nun stimmen A_ν und L_ν bis auf den Definitionsbereich überein und man überlegt sich leicht, daß die kleinsten abgeschlossenen Fortsetzungen von A_ν und L_ν identisch sind, irreguläre Geraden des Simultanspektrums sind nicht vorhanden; jeder abgeschlossene Bereich der λ, μ -Ebene ist daher eine reguläre Menge des Simultanspektrums. Nach Satz 7 ist das Simultanspektrum von \tilde{A}_ν in $\tilde{\mathfrak{A}}_\nu$ und \tilde{A}_ν in $\tilde{\mathfrak{A}}_\nu$ leer für alle Punkte, die nicht auf den Kurven $\mathfrak{C}_{\nu, \kappa}^1, \kappa = 1, 2, \dots$ (siehe § 5) liegen, für die $(A_\nu^1 - \lambda s^1 - \mu t^1) \varphi^1 = 0$ nicht-trivial auflösbar ist. Die Kurven $\mathfrak{C}_{\nu, \kappa}^1, \kappa = 1, 2, \dots$ schneiden sich nirgends in der λ, μ -Ebene und der Nullraum von $(A_\nu^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$ wird für jeden Punkt $p \in \mathfrak{C}_{\nu, \kappa}^1$ durch genau ein Element $\psi_{\nu, p}^1(\xi)$ mit $\|\psi_{\nu, p}^1\| = 1$ aufgespannt. Eine Untersuchung des Spektrums von

$$(t_\theta^2)^{-1} A_{\nu, \nu}^2 = (-s^2 \sin \theta + t^2 \cos \theta)^{-1} (A_\nu^1 - \lambda s^1 - \mu t^1)$$

etwa mit Hilfe der TITCHMARSHSchen Formeln zeigt, daß dieses Spektrum für

¹¹⁾ Das dort ausgesprochene Kriterium ist für den Fall eines Intervalles $-\infty < x < +\infty$ angegeben. Es macht keine Schwierigkeiten, das analoge Kriterium zu beweisen im Fall, daß eine oder beide Intervallgrenzen endlich sind.

jedes ϑ aus $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < 0$ und jedes $p = \{\lambda, \mu\}$ rein kontinuierlich und totalstetig ist und daß es die ganze reelle Achse überdeckt. Punkteigenwerte von A_p in \mathfrak{A}_p sind daher nach Satz 10 nicht vorhanden, denn die Gleichung $(A_p^2 - \lambda^2 + \mu^2) \varphi^2 = 0$ ist für kein λ, μ nichttrivial lösbar. Satz 5 liefert die Existenz der Matrix $P(K) = ((\varrho_{\gamma, \kappa}; \gamma', \kappa')(K))$ und die Formeln (8.10) bis (8.14). Nach Satz 7 folgt $P(K) = 0$, sobald K keinen Punkt der Kurven $\mathfrak{C}_{r, \kappa}^1, \kappa = 1, 2, \dots$, enthält, es kann daher $P(K)$ auch als Mengenfunktion $P(b)$ erklärt werden, die jeder Menge von endlich vielen abgeschlossenen Kurvenbögen der Kurven $\mathfrak{C}_{r, \kappa}^1$ eine 4×4 -Matrix zuordnet. Ist $\lambda = \lambda_{r, \kappa}(\sigma)$, $\mu = \mu_{r, \kappa}(\sigma)$, $\sigma_{r, \kappa}; - < \sigma < \sigma_{r, \kappa}; +$ eine analytische Parameterdarstellung der Kurve $\mathfrak{C}_{r, \kappa}^1$, so gibt es eine 4×4 -Matrix $P(\sigma) = ((\varrho_{\gamma_1, \gamma_2}; \gamma'_1, \gamma'_2(\sigma)))$, deren Elemente $\varrho_{\gamma_1, \gamma_2}; \gamma'_1, \gamma'_2(\sigma)$ in σ von beschränkter Schwankung sind und so, daß für einen Bogen b der Kurve $\mathfrak{C}_{r, \kappa}^1$, dem das Parameterintervall $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ entspricht gilt $P(b) = P(\sigma_2) - P(\sigma_1)$. Die Integrale in (8.10), (8.12) und (8.14) können daher als gewöhnliche Stieltjesintegrale gedeutet werden. Aus Satz 5 und Satz 8 ergeben sich die folgenden beiden Entwicklungssätze:

1. Für $f = f(x, y, z)$ aus \mathfrak{L} gilt nach Satz 5:

$$(16.3) \quad f = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\varphi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_{\sigma_{r, \kappa}; -}^{\sigma_{r, \kappa}; +} \sum_{\gamma_1, \gamma_2=1}^2 w_{r, \gamma_1}^1(x; \lambda_{r, \kappa}(\sigma), \mu_{r, \kappa}(\sigma)) \times \\ \times w_{r, \gamma_2}^2(y; \lambda_{r, \kappa}(\sigma), \mu_{r, \kappa}(\sigma)) \frac{d \varrho_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2(\sigma)}{(\sigma)}$$

mit

$$(16.4) \quad \varrho_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2(\sigma) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\varphi} \overline{\omega_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2(\sigma; \xi, \eta)} f(x, y, z) dx dy dz$$

und

$$(16.5) \quad \omega_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2(\sigma; \xi, \eta) = \int_0^{\sigma} \sum_{\gamma'_1, \gamma'_2} w_{r, \gamma'_1}^1(\xi; \lambda_{r, \kappa}(\sigma), \mu_{r, \kappa}(\sigma)) \times \\ \times w_{r, \gamma'_2}^2(\eta; \lambda_{r, \kappa}(\sigma), \mu_{r, \kappa}(\sigma)) \frac{d \varrho_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2(\sigma)}{(\sigma)}$$

sowie

$$(16.6) \quad \varrho_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2; \gamma'_1, \gamma'_2(\sigma) = \int_0^{\sigma} \overline{\omega_{r, \kappa}; \gamma'_1, \gamma'_2(\sigma; \xi, \eta)} \omega_{r, \kappa}; \gamma_1, \gamma_2(\sigma; \xi, \eta) \frac{\xi + \eta}{4} d\xi d\eta.$$

Die $w_{r, \gamma}^j$; $j, \gamma = 1, 2$; $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ seien dabei Lösungen der Differentialgleichungen

$$-\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d u^1}{d\xi} \right) + \left(\frac{\nu^2}{4} \frac{1}{\xi} - \frac{Z}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \xi^2 \right) u^1 = \frac{\lambda}{4} \xi u^1 + \mu u^1, \quad 0 < \xi < \infty; \\ -\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d u^2}{d\eta} \right) + \left(\frac{\nu^2}{4} \frac{1}{\eta} - \frac{Z}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \eta^2 \right) u^2 = \frac{\lambda}{4} \eta u^2 - \mu u^2, \quad 0 < \eta < \infty,$$

die etwa bei $\xi = 1$ bzw. $\eta = 1$ so normiert sind, daß gilt

$$w_{1, \nu}^j = 0; \quad w_{1, \nu}^{j, \prime} = 1; \quad w_{2, \nu}^j = 1; \quad w_{2, \nu}^{j, \prime} = 0,$$

wenn mit $w_{r, \nu}^{j, \prime}$ die Ableitung von $w_{r, \nu}^j$ nach ξ bzw. η bezeichnet werde.

2. Für die Spektralschar E_λ des Operators L in \mathfrak{D}_L folgt nach Satz 8

$$(16.7) \quad E_{\lambda_0} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\substack{\mathfrak{Q}_{r,p}^1 \\ \lambda \leq \lambda_n}} \left(C_{E_{r,p}^1, E_{r,p}^2} \right)^{-1} E_{r,p}^1 E_{r,p}^2 C \left(t_{\Delta p}^2 \right)^{-1} P_r.$$

Für u aus \mathfrak{Q} , v aus \mathfrak{Q}_0 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, y, z)|^2 \frac{(1 + \xi/4)(1 + \eta/4)}{\xi + \eta} dx dy dz < \infty$ sei dabei erklärt

$$P_r u = \frac{1}{2\pi} e^{i v \varphi} \int_0^{2\pi} e^{-i v \varphi'} u(x(\xi, \eta, \varphi'), y(\xi, \eta, \varphi'), z(\xi, \eta, \varphi')) d\varphi',$$

$$C u = \frac{4(\xi + \eta)}{(4 + \xi)(4 + \eta)} u,$$

$$E_{r,p}^1 v = \psi_{r,p}^1(\xi) \int_0^{\infty} \overline{\psi_{r,p}^1(\xi')} u(x(\xi', \eta, \varphi), y(\xi', \eta, \varphi), z(\xi', \eta, \varphi)) (1 + \xi'/4) d\xi'$$

und es sei $t_{\Delta p}^2(\eta) = \left(-\frac{\Delta \mu}{|\Delta p|} + \frac{\Delta \lambda}{|\Delta p|} \cdot \eta/4 \right) \frac{1}{1 + \eta/4}$ mit $|\Delta p| = [(\Delta \lambda)^2 + (\Delta \mu)^2]^{\frac{1}{2}}$. $E_{r,\Delta p}^2$ sei der zum Intervall $0 \leq \lambda \leq |\Delta p|$ gehörige Abschnitt der Spektralschar des Operators $(t_{\Delta p}^2)^{-1}(\Delta^2 - \lambda^2 + \mu^2)$; mit einer bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmten 2×2 -Matrix $P^2(\sigma) = ((\varrho_{r,\Delta p}^2; \gamma, \gamma')(\sigma))$ gilt also für v aus \mathfrak{Q}_0 :

$$E_{r,\Delta p}^2 v = \int_0^1 \sum_{\gamma=1}^2 w_{r,\gamma}^2(\eta; \lambda + \alpha \Delta \lambda, \mu + \alpha \Delta \mu) d a_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha; \xi, \varphi)$$

mit

$$a_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha; \xi, \varphi) = \int_0^{\infty} \overline{\omega_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha, \eta)} v(x, y, z) t_{\Delta p}^2(\eta) (1 + \eta/4) d\eta$$

und

$$\omega_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha; \eta) = \int_0^{\alpha} \sum_{\gamma'=1}^2 w_{r,\gamma'}^2(\eta; \lambda + \sigma \Delta \lambda, \mu + \sigma \Delta \mu) d \varrho_{r,\gamma;\Delta p}^2(\sigma);$$

$$\varrho_{r,\gamma;\Delta p}^2(\sigma) = \int_0^{\infty} \overline{\omega_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha; \eta)} \omega_{r,\gamma;\Delta p}^2(\alpha, \eta) t_{\Delta p}^2(\eta) (1 + \eta/4) d\eta.$$

$C_{E_{r,p}^1, E_{r,\Delta p}^2}$ transformiere den Raum $E_{r,p}^1 E_{r,\Delta p}^2 \mathfrak{Q}_0$ in sich und für v, v_1 aus \mathfrak{Q}_0 gelte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v} v_1 dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v} (C_{E_{r,p}^1, E_{r,\Delta p}^2} v_1) t_{\Delta p}^2(\eta) \frac{(4 + \xi)(4 + \eta)}{4(\xi + \eta)} dx dy dz.$$

Literaturverzeichnis am Schluß der ersten Mitteilung.

(Eingegangen am 17. Mai 1954.)

Some Arithmetic Properties of the OLIVIER Functions.

By

L. CARLITZ in Durham (N. C.)

1. Introduction. Let k be a fixed integer ≥ 1 . OLIVIER [6] defined the functions

$$(1.1) \quad \Phi_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mk+r}}{(mk+r)!} \quad (0 \leq r \leq k-1).$$

GLAISHER [4] employed these and similar functions in deriving lacunary recursion formulas for the EULER numbers. More recently the functions have been touched on briefly by E. T. BELL [1].

We may define sets of rational integers $a_m = a_{k,m}$ by means of

$$(1.2) \quad \frac{1}{\Phi_0(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{x^m}{m!} \quad (a_0 = 1),$$

so that $a_m = 0$ unless $k \mid m$; clearly (1.2) implies

$$(1.3) \quad \sum_{r=0}^m \binom{k}{r} a_{kr} = 0 \quad (r > 0).$$

Thus for $k=2$, we have $a_{2m} = E_m$, the EULER number in the even suffix notation. In view of KUMMER's congruences for the EULER numbers,

$$(1.4) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} E_{m+sw} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m},$$

where p is an odd prime such that $p^{e-1}(p-1) \mid w$, it is natural to ask whether a like result holds for arbitrary k . We show first that

$$(1.5) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+sw} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m},$$

where now $p \nmid k$, $p^{e-1}(p^u-1) \mid w$ and u is the least positive exponent such that $p^u \equiv 1 \pmod{k}$. Indeed a result like (1.5) holds more generally for the coefficients $a_m^{(\lambda)}$ occurring in the expansion

$$(1.6) \quad (\Phi_0(x))^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(\lambda)} \frac{x^m}{m!} \quad (a_0^{(\lambda)} = 1),$$

where λ is an arbitrary integer. The proof of the generalized version of (1.5) depends upon an explicit formula for $a_m^{(\lambda)}$ [see (2.3) below].

In the next place we prove some general results concerning series that include (1.1); in particular the results apply to certain combinations of the JACOBI elliptic functions (see § 5 below).

It may be remarked that, for example, the expansion

$$(1.7) \quad \frac{x}{\Phi_1(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{x^m}{m!} \quad (b_0 = 1)$$

defines a sequence of *rational* numbers b_{km} . In this case it is natural to seek not only an analog of (1.5) but also of the STAUDT-CLAUSEN theorem; we are however not able to answer these questions.

2. A formula for $a_m^{(\lambda)}$. If ω denotes a primitive k -th root of unity then of course

$$(2.1) \quad \sum_{s=0}^{k-1} e^{\omega^s x} = k \Phi_0(x).$$

Making use of (2.1) we shall derive an explicit formula for $a_m^{(\lambda)}$. In order to simplify the discussion we take $k = 3$, but the method is quite general. We have

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (\Phi_0(x))^{-\lambda} &= \left\{ 3 + (e^x - 1) + (e^{\omega x} - 1) + (e^{\omega^2 x} - 1) \right\}^{-\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \binom{\lambda+n-1}{n} \{ (e^x - 1) + (e^{\omega x} - 1) + (e^{\omega^2 x} - 1) \}^n \\ &= \sum_{h_1, h_2, h_3=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^{h_1+h_2+h_3} \frac{(\lambda)_{h_1+h_2+h_3}}{h_1! h_2! h_3!} \times \\ &\quad \times (e^x - 1)^{h_1} (e^{\omega x} - 1)^{h_2} (e^{\omega^2 x} - 1)^{h_3}, \end{aligned}$$

where $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)$, $(\lambda)_0 = 1$. Since

$$(e^x - 1)^h = \sum_{r=h}^{\infty} S(h, r) \frac{x^r}{r!}, \quad S(h, r) = \sum_{z=0}^h (-1)^{h-z} \binom{h}{z} z^r,$$

we get

$$\begin{aligned} &(e^x - 1)^{h_1} (e^{\omega x} - 1)^{h_2} (e^{\omega^2 x} - 1)^{h_3} \\ &= \sum_{r_1, r_2, r_3} S(h_1, r_1) S(h_2, r_2) S(h_3, r_3) \frac{x^{r_1} (\omega x)^{r_2} (\omega^2 x)^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{j_1, j_2, j_3} (-1)^{h_1+h_2+h_3-j_1-j_2-j_3} \binom{h_1}{j_1} \binom{h_2}{j_2} \binom{h_3}{j_3} \times \\ &\quad \times \sum_{r_1+r_2+r_3=m} \frac{m!}{r_1! r_2! r_3!} j_1^{r_1} (\omega j_2)^{r_2} (\omega^2 j_3)^{r_3} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{j_1, j_2, j_3} (-1)^{h_1+h_2+h_3-j_1-j_2-j_3} \binom{h_1}{j_1} \binom{h_2}{j_2} \binom{h_3}{j_3} (j_1 + \omega j_2 + \omega^2 j_3)^m. \end{aligned}$$

Hence substituting in (2.2) and comparing with (1.6) we see that

$$(2.3) \quad \begin{aligned} a_m^{(\lambda)} &= \sum_{h_1+h_2+h_3 \leq m} 3^{-h_1-h_2-h_3} \frac{(\lambda)_{h_1+h_2+h_3}}{h_1! h_2! h_3!} \times \\ &\quad \times \sum_{j_1, j_2, j_3} (-1)^{j_1+j_2+j_3} \binom{h_1}{j_1} \binom{h_2}{j_2} \binom{h_3}{j_3} (j_1 + \omega j_2 + \omega^2 j_3)^m \end{aligned}$$

for all $m \geq 0$. Thus in particular when $k \nmid m$ the right member of (2.3) must vanish. It is also evident that in the outer sum we may allow $h_1 + h_2 + h_3 \leq m'$, where m' is any integer $> m$.

For some values of k it may be possible to derive a formula simpler than (2.3). For example consider the identity used by GLAISHER [4, p. 2]

$$(2.4) \quad \cosh x \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{2m} \frac{x^{4m}}{(4m)!}.$$

Since

$$\operatorname{sech} x = \sum_0^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad \sec x = \sum_0^{\infty} (-1)^m E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

it is clear that

$$\operatorname{sech} x \sec x = \sum_0^{\infty} E'_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad E'_{2m} = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{2m}{2r} E_{2r} E_{2m-2r}.$$

In view of the familiar formula

$$E_m = \sum_{t=0}^m 2^{-t} \sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{t}{s} (2s+1)^m,$$

it follows that

$$(2.5) \quad E'_{2m} = \sum_{g,h=0}^{2m} 2^{-1-g-h} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \binom{g}{r} \binom{h}{s} \{ (2r+1 + i(2s+1))^{2m} + \\ + (2r+1 - i(2s+1))^{2m} \}.$$

Since the right member of (2.4) is clearly $\Phi_0(2^{\frac{1}{2}} e^{\pi i/4} x)$, it follows that (for $\lambda = 1$)

$$(2.6) \quad a_{4m} = (-1)^m 2^{-2m} E'_{4m}.$$

(Indeed $a_m = e^{-\pi i m/4} 2^{-m/2} E'_m$ holds for all m , but both sides vanish when $4 \nmid m$.) By means of (2.5) and (2.6) we have another explicit formula for a_m in the case $k = 4$. Additional special formulas can be obtained but it scarcely seems worth while stating them.

3. Proof of (1.5). For the method of proof compare [5, Chapter 14]. It is evident that for arbitrary k , (2.3) is of the form

$$(3.1) \quad \alpha_m^{(\lambda)} = \sum_{\mu} C_{\mu}^{(\lambda)} \mu^m,$$

where the $C_{\mu}^{(\lambda)}$ are rational with denominators equal to a power of k and μ runs through numbers of the sets

$$(3.2) \quad j_1 + \omega j_2 + \cdots + \omega^{k-1} j_k \quad (0 \leq j_1 + \cdots + j_k \leq m'),$$

where m' is any integer $\geq m$.

Now let $Z = R(\omega)$ denote the cyclotomic field obtained by adjoining ω to the rational field; thus the numbers μ are integers of Z . If p is a rational prime that does not divide k , let u denote the exponent to which p belongs (mod k). Then it is familiar that we have the decomposition

$$(3.3) \quad (p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_v, \quad N \mathfrak{p}_j = p^u \quad (u v = \Phi(k)).$$

Hence if $p^{e-1}(p^u - 1) \mid w$, we have

$$(3.4) \quad \mu^w \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_j^e} \quad (j = 1, \dots, v).$$

On the other hand (3.1) implies

$$(3.5) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \alpha_{m+s}^{(\lambda)} = \sum_{\mu} C_{\mu}^{(\lambda)} \mu^m (\mu^w - 1)^r$$

on properly choosing m' in (3.2). Hence (3.4) implies that the left member

of (3.5) is congruent to 0 (mod p_j^{re}, p_j^m) for $j = 1, \dots, v$. Finally therefore (3.3) yields

$$(3.6) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+sw}^{(\lambda)} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m},$$

subject to the condition $p \nmid k$ and

$$(3.7) \quad p^{e-1}(p^u - 1) \mid w.$$

This extends (1.5) to the case of arbitrary integral λ .

A word may be added about fractional values of λ . We recall that the number

$$\frac{(\lambda) h_1 + \dots + h_k}{h_1! h_2! \dots h_k!},$$

is integral (mod p) provided p does not occur in the denominator of λ . Hence we infer that (3.6) holds for rational λ provided λ is integral (mod p).

We may now state

Theorem 1. *Let $r \geq 1$, $e \geq 1$; p prime, λ integral (mod p), $p \nmid k$ and p belongs to the exponent u (mod k); also let w satisfy (3.7). Then the coefficients $a_m^{(\lambda)}$ defined by (1.6) satisfy (3.6).*

In addition to the general result (3.6) we note (in the case $\lambda = 1$) that for arbitrary p , (1.3) implies

$$\sum_{r=0}^m \binom{km}{krp} a_{krp} \equiv \sum_{r=0}^m \binom{km}{kr} a_{krp} \equiv 0 \pmod{p}$$

and therefore we have

$$(3.8) \quad a_{km} \equiv a_{kp} \pmod{p}$$

for all p (including $p \mid k$).

It may be of interest to point out that for the coefficients in

$$(3.9) \quad \left\{ 1 + k \sum_1^\infty \left(\frac{x^{km}}{(km)!} \right) \right\}^{-\lambda} = \sum_0^\infty \bar{a}_m \frac{x^m}{m!},$$

a result like (3.6) can be obtained for all p . Indeed corresponding to (3.9), the coefficients $C_\mu^{(\lambda)}$ in (3.1) are rational integers. If $p \nmid k$ then (3.6) holds for \bar{a}_m but if $k = p^s k'$, $p \nmid k'$, then in place of (3.3) we have the factorization

$$(p) = (p_1, \dots, p_v)^{p^s - p^{s-1}}, \quad Np_j = p^{u'} \quad (u'v' = \Phi(k')).$$

where p belongs to the exponent u' (mod k'). It follows that

$$\mu^v \equiv 1 \pmod{p_j^{e(p^s - p^{s-1})}}$$

provided

$$(3.10) \quad p^{s+e-1}(p^{u'} - 1) \mid w.$$

We thus get the following analog of Theorem 1.

Theorem 2. *If $k = p^s k'$, $p \nmid k'$, and w satisfies (3.10) then*

$$(3.11) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \bar{a}_{m+sw} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m}.$$

4. Some general results. We consider series of the form

$$(4.1) \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m / m! \quad (c_1 = 1),$$

where the c_m are rational numbers that are integral (mod p) for some fixed prime p . We assume that $(D = d/dx)$

$$(4.2) \quad (D^p - c_p D) f(x) = p \sum_0^{\infty} \bar{c}_m f^m(x),$$

where the \bar{c}_m are also integral (mod p). If $g(x)$ is another series of the form (4.1) with coefficients \bar{d}_m that satisfies a relation like (4.2) and if in addition $c_p \equiv d_p \pmod{p}$, then it is proved in [3, § 6] that

$$(4.3) \quad (D^p - c_p D) f^m(x) g^n(x) = p \sum_{r,s} A_{r,s}^{(m,n)} f^r(x) g^s(x),$$

where the $A_{r,s}^{(m,n)}$ are integral (mod p).

If ω denotes an arbitrary k -th root of unity, then clearly the hypothesis on $f(x)$ implies

$$(4.4) \quad (D^p - \omega^{p-1} c_p D) f(x) = p F(x),$$

where $F(x)$ is of the form $\sum b_m f^m(\omega x)$ with integral coefficients (mod p). It follows from (4.4) that, if $k \mid p^u - 1$, then

$$(4.5) \quad (D^{p^u} - c_p^{[u]} D) f(\omega x) = p F_1(x) \quad ([u] = \frac{p^u - 1}{p - 1}),$$

where $F_1(x)$ is of the same general form as $F(x)$. In the next place, exactly as in the proof of formula (6.9) of [3], (4.5) yields

$$(4.6) \quad (D^{p^u} - c_p^{[u]} D) \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega^j x) = p F_2(x),$$

where the t_j are arbitrary integers ≥ 0 and $F_2(x)$ is a power series in the $f(\omega^j x)$, $j = 0, \dots, k-1$, with integral coefficients. Iteration of the operator in the left member of (4.6) leads immediately to

$$(4.7) \quad (D^{p^u} - c_p^{[u]} D)^r \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega^j x) = p^r F_3(x),$$

where $F_3(x)$ is of the same general form as $F_2(x)$.

For the applications it is convenient to put (4.7) in a slightly more general form. To begin with, the identity

$$x^{p^e} - y^{p^e} = (x - y)^{p^e} + \sum_{j=1}^e p^j (x - y)^{p^e-j} f_j(x, y),$$

where the $f_j(x, y)$ are polynomials with integral coefficients, when applied to the operator in the left member of (4.7), leads to

$$(D^w - c_p^{w/(p-1)} D)^e \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega_j x) = p^e F_4(x),$$

where $p^{e-1}(p^u - 1) \mid w$ and $F_4(x)$ is of the same form as $F_2(x)$. Hence by iteration we get for $r \geq 1$

$$(4.8) \quad (D^w - c_p^{w/(p-1)})^r D^{re} \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega^j x) = p^{er} F_5(x),$$

where $F_5(x)$ is of the same general form as $F_2(x)$.

This proves

Theorem 3. *If $f(x)$ satisfies (4.1) and (4.2) and p belongs to the exponent $u \pmod{k}$, then (4.8) holds for all $r \geq 1$, provided*

$$(4.9) \quad p^{e-1}(p^u - 1) \mid w.$$

When (4.2) is not satisfied it frequently happens that the weaker condition

$$(4.10) \quad Df(x) = 1 + \sum_1^{\infty} \bar{c}_m f^m(x),$$

where the \bar{c}_m are integral, holds. In this case we apparently cannot assert (4.8). However comparison with the proof of [3, Theorem 6] shows that in place of (4.7) we have at any rate

$$(4.11) \quad (D^{p^u} - c_p^{[u]} D)^r \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega^j x) = p^{r_1} G(x),$$

where r_1 is the greatest integer $\leq \frac{1}{2}(r+1)$ and

$$(4.12) \quad G(x) = \sum_0^{\infty} d_m x^m / m!,$$

with integral d_m . Then exactly as in passing from (4.7) to (4.8) we may show that (4.11) implies

$$(4.13) \quad (D^w - c_p^{w/(p-1)}) D^{re} \prod_{j=0}^{k-1} f^{t_j}(\omega^j x) = p^{r(e-1)} G_1(x) \quad (p > 2),$$

where w satisfies (4.9) and $G_1(x)$ is of the form (4.12). We may therefore state

Theorem 4. *If $f(x)$ satisfies (4.1) and (4.10) and w satisfies (4.9), then (4.13) holds for all $r \geq 1$ with r_1 equal to the greatest integer $\leq \frac{1}{2}(r+1)$.*

5. Applications. If we suppose that $f(x)$ is of the form (4.1) and put

$$(5.1) \quad k \Phi(x) = \sum_{s=0}^{k-1} f(\omega^s x),$$

then

$$(5.2) \quad \Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \frac{x^{km}}{(km)!}.$$

We also put

$$(5.3) \quad (1 + t \Phi(x))^{-\lambda} = \sum_0^{\infty} a_{km}^{(\lambda)}(t) \frac{x^{km}}{(km)!}.$$

Then exactly as in § 2

$$\begin{aligned} (1 + t \Phi(x))^{-\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{k}\right)^n \binom{\lambda+n-1}{n} \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} f(\omega^s x) \right\}^n \\ &= \sum_{h_1, \dots, h_k=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{k}\right)^{h_1+\dots+h_k} \frac{(\lambda)_{h_1+\dots+h_k}}{h_1! \dots h_k!} \sum_{j=0}^{k-1} f^{h_j}(\omega^j x). \end{aligned}$$

It is now possible to apply Theorems 3 and 4. We thus obtain the following results.

Theorem 5. *Let $f(x)$ satisfy (4.1) and (4.2). Let λ and t be integral (mod p), where p is a prime that does not divide k , and let w satisfy (4.9). Then the coefficients $a_m = a_m^{(\lambda)}(t)$ defined by (5.3) satisfy*

$$(5.4) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+s w} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m}$$

for all $r \geq 1$, $e \geq 1$.

Theorem 6. *Let the hypothesis of Theorem 4 be satisfied except that $f(x)$ satisfies (4.10) in place of (4.2). Then we have ($p > 2$)*

$$(5.5) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+s w} \equiv 0 \pmod{p^{r(s-1)+r_1}, p^m},$$

where r_1 is the greatest integer $\leq r + 1$. In particular

$$(5.6) \quad a_{m+w} \equiv a_m \pmod{p^e, p^m} \quad (w = p^{e-1}(p^u - 1)).$$

(For $p = 2$ the modulus is $(2^{e-1}, p^m)$).

Corresponding to Theorem 2, it is readily seen that the following supplement to Theorem 5 may be obtained.

Theorem 5'. *If $k = p^e k'$, $p \nmid k'$ and $p' \mid t$ then (5.4) holds provided $p^{e+e-1}(p^{u'} - 1) \mid w$, where u' is the exponent to which p belongs (mod k').*

A like result can be stated for Theorem 6.

As instances of Theorem 5 we remark first that $f(x) = e^x - 1$ evidently satisfies (4.2); indeed in this case taking $t = 1$, (5.4) reduces to (3.6).

A more interesting example of Theorem 5 is furnished by the JACOBI elliptic function [2]

$$(5.7) \quad f(x) = \operatorname{sn} x = \sum_1^{\infty} A_m x^m / m!,$$

where the A_m are polynomials in the square of the modulus of $\operatorname{sn} x$. Since $\operatorname{sn} x$ satisfies (4.2), Theorem 5 applies. Note also that a similar theorem can be framed for

$$(5.8) \quad k \Phi(x) = \sum_{s=0}^{k-1} f^s(\omega^s x).$$

Hence if we put

$$\operatorname{cn}^2 x = 1 - \operatorname{sn}^2 x = \sum_0^{\infty} C_m x^m / m!,$$

then if k is even and λ is integral (mod p)

$$\left\{ \sum_0^{\infty} C_{km} x^{km} / (km)! \right\}^{-\lambda} = \sum_0^{\infty} C_{km}^{(\lambda)} x^{km} / (km)!,$$

where C_m and $C_{km}^{(\lambda)}$ are polynomials with integral coefficients (mod p). We conclude that

$$(5.9) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} C_{m+s w}^{(\lambda)} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m},$$

provided that w satisfies (4.9); note in particular that p is assumed odd.

Similarly if

$$\mathrm{dn}^2 x = \sum_0^{\infty} D_m x^m / m!,$$

and

$$\left\{ \sum_0^{\infty} D_{km} x^{km} / (km)! \right\}^{-\lambda} = \sum_0^{\infty} D_{km}^{(\lambda)} x^{km} / (km)!,$$

it follows that $D_{km}^{(\lambda)}$ satisfies the congruence (5.9). A more general theorem can be obtained for the coefficients in

$$\mathrm{cn}^l x \mathrm{dn}^{l'} x = \sum_0^{\infty} L_m x^m / m!,$$

$$\left\{ \sum_0^{\infty} L_{km} x^{km} / (km)! \right\}^{-\lambda} = \sum_0^{\infty} L_{km}^{(\lambda)} x^{km} / (km)!,$$

where l and l' are integral (mod p); we can assert that $L_{km}^{(\lambda)}$ also satisfies (5.9).

Returning to (5.7) and noting that

$$k \sum_{m=0}^{\infty} A_{km+t} \frac{x^{km+t}}{(km+t)!} = \sum_{j=0}^{k-1} \omega^{-jt} \mathrm{sn} \omega^j x \quad (1 \leq t \leq k),$$

it follows from Theorem 3 that the coefficients $S_m^{(t, \lambda)}$ defined by means of

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{km+t} \frac{x^{km+t}}{(km+t)!} \right\}^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} S_m^{(t, \lambda)} \frac{x^m}{m!} \quad (1 \leq t \leq k),$$

where now λ is a positive integer, satisfy a congruence of the form (5.9). A more elementary example of the same kind of result is furnished by

$$(5.10) \quad (\Phi_t(x))^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(t, \lambda)} \frac{x^m}{m!} \quad (1 \leq t \leq k-1),$$

where λ again is a positive integer and $\Phi_t(x)$ is defined by (1.1); the case $r=0$ of (5.10) is of course covered by Theorem 1. We may evidently assert that $a_m^{(t, \lambda)}$ satisfies

$$(5.11) \quad \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+sw}^{(t, \lambda)} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^m} \quad (1 \leq t \leq k-1)$$

subject to the usual conditions on p and w . Whether (5.11) holds for negative or fractional λ is not clear.

References.

- [1] BELL, E. T.: An algebra of sequences of functions with an application to the BERNOULLIAN functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **28**, 129—148 (1926). — [2] CARLITZ, L.: Congruences connected with the power series expansions of the JACOBI elliptic functions. *Duke Math. J.* **20**, 1—12 (1953). — [3] CARLITZ, L.: Some theorems on Kummer's congruences. *Duke. Math. J.* **20**, 423—431 (1953). — [4] GLAISHER, J. W. L.: ON EULERIAN numbers (formulae, residues, end-figures), with the values of the first twenty-seven. *Quart. J. Math.* **45**, 1—51 (1914). — [5] NIELSEN, N.: *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. Paris 1923. — [6] OLIVIER, L.: Bemerkungen über eine Art von Funktionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie die Cosinus und Sinus. *Journal reine u. angew. Math.* **2**, 243—251 (1827).

(Eingegangen am 10. Juni 1954.)

Multiplikation von Distributionen. I*).

Von

HEINZ KÖNIG in Kiel.

Inhalt.

Einleitung	420
Kapitel 1: Betrachtung im Kleinen	
§ 1. Distributionen endlicher Ordnung	424
§ 2. Tensorprodukte und Tensoralgebren	426
§ 3. Hilfsbetrachtungen über Polynomkoeffizienten	427
§ 4. Die Räume v_n, f_n, v, f	430
§ 5. Die Räume $\mathfrak{S}_{n+1}^k, \mathfrak{S}_{n+1}$	432
§ 6. Die Abbildungen μ_{n+1}^k	436
§ 7. Der Unterraum ϱ und der Quotientenraum π	439
§ 8. Reduktion des tensoriellen Produktes	441
Kapitel 2: Betrachtung im Großen	
§ 9. Distributionen	445
§ 10. Der Raum Π	446
§ 11. Beweis der Forderungen (IV)	449
§ 12. Beweis der Forderung (V)	451

Einleitung.

In dieser Arbeit greifen wir das Problem, für die Distributionen von L. SCHWARTZ [S]¹⁾ ein universelles Produkt zu definieren, welches das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen und das «produit multiplicatif» zweier Distributionen als Spezialfälle enthält, in möglichst umfassender Form an. Dieses Problem ist für die physikalischen Anwendungen von großer Bedeutung. Der vorliegende erste Teil der Arbeit bringt die Grundlagen einer allgemeinen Multiplikationstheorie. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf den Fall einer einzigen unabhängigen Veränderlichen.

Das «produit multiplicatif» $S \cdot T \in (D')$ zweier Distributionen $S, T \in (D')$ (das wir im folgenden „inneres Produkt“ nennen wollen), kann man nach L. SCHWARTZ nur in speziellen Fällen definieren, wenn nämlich die eine Distribution um so „regulärer“ ist, je „irregulärer“ die andere ist. Genauer, wenn für ein geeignetes m etwa $S \in (E^m)$, $T \in (D'^m)$ ist, oder wenn dies auch nur in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes des Definitionsbereiches gilt, wie z. B. für $S \in (E)$, $T \in (D')$. Insbesondere braucht $S \cdot T$ nicht zu existieren,

*) Den Herren Prof. Dr. L. SCHWARTZ, Paris, und Prof. Dr. K.-H. WEISE, Kiel, bin ich zu herzlichem Dank verpflichtet. Mein Dank gilt ebenfalls der Deutschen Forschungsgemeinschaft, deren Unterstützung mir die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte.

¹⁾ Große Buchstaben in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

wenn S, T zwei lokal integrable Funktionen sind; das entspricht der Tatsache, daß das gewöhnliche Produkt zweier solcher Funktionen im allgemeinen nicht wieder lokal integrierbar ist und daher keine Distribution definiert.

In [K] haben wir den SCHWARTZschen Distributionsbegriff nun so erweitert, daß der Raum \mathfrak{F} der verallgemeinerten Distributionen insbesondere alle im Grundbereich definierten reellen Funktionen (genauer wieder: alle Klassen von dort definierten und fast überall gleichen reellen Funktionen) enthält. In \mathfrak{F} kann man in analoger Weise ein „inneres Produkt“ $S \cdot T$ erklären, und dies umfaßt jetzt das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen uneingeschränkt als Spezialfall (§§ 1, 9). Hierdurch wird nahegelegt, beim Multiplikationsproblem von diesem allgemeineren Distributionsbegriff auszugehen.

Unsere Aufgabe ist also, das in \mathfrak{F} definierte innere Produkt zu einem universellen Produkt, d. h. zu einer bilinearen Abbildung $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{P}$ von ganz $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ in einen zunächst beliebigen Erweiterungsraum \mathfrak{P} von \mathfrak{F} fortzusetzen.

(I) \mathfrak{F} ist isomorph zu einem Unterraum von \mathfrak{P} (und werde im folgenden damit identifiziert).

Wir wollen also nicht verlangen, daß das universelle Produkt wieder den Wertebereich \mathfrak{F} besitzt. Denn es ist völlig unklar, wie man ein solches Produkt, das zudem allen späteren Forderungen genügt, erklären könnte.

Dann liegt es aber nahe, zu fordern, daß sich $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{P}$ auch zu einer vollständigen bilinearen Abbildung $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$ fortsetzen läßt. Wir wollen diese Forderung jedoch abschwächen und nur die Fortsetzbarkeit zu einer bilinearen Abbildung $\mathfrak{F} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$ verlangen:

(II₁) Für $S \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ ist ein bilineares Produkt $S \circ \mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ erklärt.

(II₂) Besitzen $S, T \in \mathfrak{F}$ in \mathfrak{F} ein inneres Produkt $S \cdot T$, so stimmt $S \circ T$ damit überein.

Wir fordern weiter, daß sich die in \mathfrak{F} definierte Ableitung auch auf \mathfrak{P} ausdehnen läßt, und daß das Produkt $S \circ \mathfrak{A}$ uneingeschränkt die für die Definition des inneren Produktes so fundamentale Produktregel erfüllt:

(III₁) In \mathfrak{P} ist eine lineare Ableitung erklärt, die die in \mathfrak{F} definierte verallgemeinert.

(III₂) Es gilt die Produktregel $(S \circ \mathfrak{A})' = S' \circ \mathfrak{A} + S \circ \mathfrak{A}'$.

Außerdem müssen wir verlangen, daß ein Element von \mathfrak{P} , wie eine Distribution (und wie jede sinnvolle Erweiterung des Funktionsbegriffes überhaupt), „lokale“ Eigenschaften hat und durch seine Vorgabe „im Kleinen“ auch „im Großen“, als Ganzes eindeutig bestimmt ist. Und schließlich fordern wir selbstverständlich, daß \mathfrak{P} nicht größer als nötig gewählt werden soll, um alle diese Eigenschaften besitzen zu können. Damit haben wir:

(IV₁) Beim Übergang zu einer offenen Teilmenge Δ des offenen Definitionsbereiches Ω besitzt jedes Element $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ eine wohlbestimmte Restriktion $\mathfrak{A}_\Delta \in \mathfrak{P}_\Delta$ auf Δ , die die in \mathfrak{F} definierte verallgemeinert. Die Abbildung $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_\Delta$ ist linear, ferner ein Homomorphismus in bezug auf die Multiplikation mit einer Distribution und in bezug auf die Ableitung.

(IV₂) (Minimaleigenschaft.) Die Restriktion eines Elementes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ auf eine hinreichend kleine Umgebung eines jeden Punktes von Ω ist eine endliche Summe von Produkten endlich vieler Distributionen endlicher Ordnung (§ 1).

(IV₃) (Lokalisationsprinzip.) Ist in einer gewissen Umgebung $\Omega_y \subset \Omega$ eines jeden Punktes $y \in \Omega$ ein Element $\mathfrak{A}^y \in \mathfrak{P}_y$ gegeben und sind für alle $y, z \in \Omega$ mit $\Omega_y \cap \Omega_z \neq \emptyset$ die Restriktionen von $\mathfrak{A}^y, \mathfrak{A}^z$ auf diesen Durchschnitt gleich, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$, dessen Restriktion auf Ω_y für jedes $y \in \Omega$ mit \mathfrak{A}^y übereinstimmt.

Durch diese Forderungen (IV) wird das Multiplikationsproblem nun zu einem „lokalen“ Problem. In der Tat können wir hiernach den Raum \mathfrak{P} durch einen wohlbekannten „Zusammensetzungsprozeß“ gewinnen, wenn wir in einer gewissen, relativ zu Ω kompakten offenen Umgebung U_y eines jeden Punktes $y \in \Omega$ den Unterraum $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{P}_y$ aller endlichen Summen von Produkten endlich vieler Distributionen endlicher Ordnung kennen. Unsere Aufgabe reduziert sich also darauf, dem offenen, beschränkten Intervall U einen Raum \mathfrak{p} zuzuordnen, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Der Raum \mathfrak{f} der (verallgemeinerten) Distributionen endlicher Ordnung (§ 1) ist isomorph zu einem Unterraum von \mathfrak{p} (und werde im folgenden damit identifiziert).

(ii₁) Für $a \in \mathfrak{f}, a \in \mathfrak{p}$ ist ein bilineares Produkt $a \circ a \in \mathfrak{p}$ erklärt.

(ii₂) Besitzen $a, b \in \mathfrak{f}$ in \mathfrak{f} ein inneres Produkt $a \cdot b$, so stimmt $a \circ b$ damit überein.

(iii₁) In \mathfrak{p} ist eine lineare Ableitung erklärt, die die in \mathfrak{f} definierte verallgemeinert.

(iii₂) Es gilt die Produktregel $(a \circ a)' = a' \circ a + a \circ a'$.

(iv₁) Beim Übergang zu einem offenen Teilintervall V von U besitzt jedes Element $a \in \mathfrak{p}$ eine wohlbestimmte Restriktion $a_V \in \mathfrak{p}_V$ auf V , die die in \mathfrak{f} definierte verallgemeinert, usw.

(iv₂) Jedes Element $a \in \mathfrak{p}$ ist endliche Summe von Produkten endlich vieler Distributionen $a \in \mathfrak{f}$.

Auf Grund von (iv₂) wird nun durch

$$a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \rightarrow a_1 \circ (a_2 \circ \cdots \circ (a_{n-1} \circ a_n)) = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{n-1} \circ a_n$$

eine lineare Abbildung der Tensoralgebra \mathfrak{f} von \mathfrak{f} (§§ 2, 4) auf \mathfrak{p} erklärt. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus in bezug auf die Multiplikation mit einer Distribution $a \in \mathfrak{f}$; ferner wegen (iv₁) ein Homomorphismus in bezug auf die Restriktion des Definitionsintervalles, und, wenn man die in \mathfrak{f} erklärte Ableitung (wie es sehr nahe liegt) mittels (4.3) auf \mathfrak{f} ausdehnt, auf Grund von (iii₂) auch in bezug auf die Ableitung. Für einen gewissen Unterraum \mathfrak{r} von \mathfrak{f} ist $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{f}/\mathfrak{r}$, und unsere Forderungen reduzieren sich auf

(i') Es ist $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{f} = \{0\}$.

(ii'₁) \mathfrak{r} ist Linksideal in \mathfrak{f} .

(ii'₂) Besitzen $a, b \in \mathfrak{f}$ in \mathfrak{f} ein inneres Produkt $a \cdot b$, so ist $a \otimes b - a \cdot b \in \mathfrak{r}$.

(iii'₁) \mathfrak{r} ist gegen die in \mathfrak{f} erklärte Ableitung abgeschlossen.

(iv'₁) Ist V ein offenes Teilintervall von U , so wird \mathfrak{r} bei der kanonischen Abbildung $\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}_V$ in \mathfrak{r}_V abgebildet.

Wir werden also auf die Frage geführt, ob \mathfrak{f} Unterräume \mathfrak{r} mit diesen Eigenschaften besitzt. Ein solches \mathfrak{r} kann jedenfalls kein zweiseitiges Ideal sein; denn wegen (ii') müßte es dann

$$\delta = (1 \cdot \delta - 1 \otimes \delta) + \left(\frac{1}{x} \cdot x - \frac{1}{x} \otimes x \right) \otimes \delta + \frac{1}{x} \otimes (x \otimes \delta - x \cdot \delta)$$

enthalten, im Widerspruch zu (i').

Nun reichen unsere bisherigen Forderungen (I)–(IV) aber noch nicht aus, um ein befriedigendes Produkt $S \circ \mathfrak{A}$ zu erhalten. Aus ihnen folgt z. B. nicht $1 \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ für ein beliebiges $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$. Analog ist für ein beliebiges $a \in \mathfrak{p}$ nicht notwendig $1 \circ a = a$ oder für $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{f}$ ($n > 1$) nicht notwendig $1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n - a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in \mathfrak{r}$. Wir werden von \mathfrak{r} also noch verlangen müssen, daß es für „hinreichend reguläres“ $g \in \mathfrak{f}$ das Produkt $g \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ durch eines der Produkte $a_1 \otimes \dots \otimes (g \cdot a_i) \otimes \dots \otimes a_n$ zu ersetzen erlaubt. Das ist aber für $i = n$ wegen (ii'), (ii') sicher dann der Fall, wenn ein solches g mit allen a_i vertauscht werden darf: $g \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n - a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes g \in \mathfrak{r}$. Als Bedingung „hinreichender Regularität“ genügt dann jedoch, wie die zur eben benutzten analoge Identität

$$\delta = (\delta \cdot 1 - \delta \otimes 1) + \frac{1}{x} \otimes (\delta \otimes x - \delta \cdot x) - \left(\frac{1}{x} \otimes \delta \otimes x - \delta \otimes \left(\frac{1}{x} \cdot x \right) \right)$$

zeigt, nicht, daß g, a_n in \mathfrak{f} ein inneres Produkt besitzen. Vielmehr legt dieses Beispiel (wie mannigfache andere) nahe, für die in § 1 definierten „Ordnungen“ $\eta(a)$, $\zeta(a)$ von $a \in \mathfrak{f}$ die Ungleichung

$$(1) \quad \zeta(g) + \sum_{i=1}^n \eta(a_i) \leq 0$$

zu verlangen. Unsere zusätzliche Forderung lautet also²⁾:

(ii') Für $g, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{f}$ mit (1) ist $g \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n - a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes g \in \mathfrak{r}$,

(ii') Für $g, a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{f}$ mit (1) ist $g \circ a_1 \circ \dots \circ a_n = a_1 \circ \dots \circ a_n \circ g$.

Auf den Raum \mathfrak{P} übertragen ergibt das, wenn wir die in § 9 definierten „Ordnungen im Punkte x “ $\eta_x(S)$, $\zeta_x(S)$ einer Distribution $S \in \mathfrak{F}$ benutzen, die Forderung

$$(II_2) \text{ Für } g, S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{F} \text{ mit } \zeta_x(g) + \sum_{i=1}^n \eta_x(S_i) \leq 0 \text{ ist } g \circ S_1 \circ \dots \circ S_n = S_1 \circ \dots \circ S_n \circ g.$$

In Kapitel 1 dieser Arbeit, das den lokalen Betrachtungen gewidmet ist, studieren wir nun den Durchschnitt ρ aller Unterräume \mathfrak{r} von \mathfrak{f} , die die Eigenschaften (ii')–(iv') besitzen. ρ ist offenbar der kleinste aller dieser Unterräume. Das erste Hauptergebnis dieses Kapitels wird sein, daß ρ auch die Eigenschaft (i') besitzt (§ 7, Corollar 1 zu Satz 6). Es gibt also wirklich Unterräume von \mathfrak{f} , die alle unsere Forderungen (i')–(iv') erfüllen! — Dieser Nachweis erfordert ziemlich umfangreiche Vorbereitungen (§§ 3, 5, 6; die §§ 1, 2, 4 enthalten die allgemeinen Grundlagen).

²⁾ Im Grunde ist es gleichgültig, ob wir etwa das erste oder das letzte der a_i mit g multiplizieren. Aber auch die Form der Bedingung (1), die in jedem Falle dieselbe sein müßte, sowie gewisse Gründe, die man aus den Rechnungen der §§ 4–6 herleiten könnte, sprechen eindeutig für die zweite Möglichkeit.

Der zugehörige Quotientenraum $\pi = \mathfrak{f}/\mathfrak{q}$ besitzt infolgedessen alle Eigenschaften (i)–(iv) (§ 7, Satz 10, 11, 12). § 7 bringt weitere wichtige Ergebnisse über π (Satz 13, 14). In § 8 beweisen wir sodann das zweite Hauptergebnis dieses Kapitels (Satz 16): (ii₂) läßt sich für π verschärfen zu

(ii₂^{*}) *Das Produkt $a \circ b$ zweier Distributionen $a, b \in \mathfrak{f}$ ist genau dann wieder eine Distribution aus \mathfrak{f} , wenn a, b in \mathfrak{f} ein inneres Produkt $a \cdot b$ besitzen. Beide Produkte stimmen dann überein.*

Die globalen Betrachtungen des Kapitels 2 beginnen mit einem einführenden Paragraphen über den Raum \mathfrak{F} und den genauen Existenzbereich des inneren Produktes (§ 9)³. Sodann führen wir in § 10 von π aus den oben beschriebenen Zusammensetzungsprozeß durch und gelangen zu einem Raum Π , der alle unsere Forderungen (I)–(IV) erfüllt (§ 10, Satz 18, 19, 22; § 11, Satz 24, 25). Die über π bewiesenen Tatsachen werden ins Globale übertragen (Satz 20, 21, 23). Insbesondere gilt für Π wieder die folgende Verschärfung von (II₂):

(II₂^{*}) *Das Produkt $S \circ T$ zweier Distributionen $S, T \in \mathfrak{F}$ ist genau dann wieder eine Distribution, wenn S, T in \mathfrak{F} ein inneres Produkt $S \cdot T$ besitzen. Beide Produkte stimmen dann überein.*

Weiter entspricht der Minimaleigenschaft von \mathfrak{q} :

(v') *Erfüllt $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{f}$ die Forderungen (i')–(iv'), so ist \mathfrak{q} in \mathfrak{r} enthalten, offenbar die folgende Eigenschaft von π :*

(v) *Erfüllt \mathfrak{p} die Forderungen (i)–(iv), so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von π auf \mathfrak{p} , die alle Distributionen aus \mathfrak{f} fest läßt und ein Homomorphismus in bezug auf die Multiplikation mit einer solchen Distribution, in bezug auf die Ableitung und auf die Restriktion des Definitionsintervalles ist.*

In § 12 werden wir abschließend zeigen, daß auch für Π ein analoger Satz gilt (Satz 27):

(V) *Erfüllt \mathfrak{P} die Forderungen (I)–(IV), so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von Π auf \mathfrak{P} , die alle Distributionen fest läßt und ein Homomorphismus in bezug auf die Multiplikation mit einer Distribution, in bezug auf die Ableitung und auf die Restriktion des Definitionsbereiches ist.*

Durch diese Eigenschaft, in Verbindung mit den ersten vier, wird der Raum Π nun im wesentlichen, d. h. bis auf einen \mathfrak{F} elementweise fest lassenden Isomorphismus der gesamten definierten Struktur, eindeutig charakterisiert. Diese Charakterisierung ist insbesondere unabhängig von den Einzelheiten unserer Konstruktion dieses Raumes (dasselbe gilt natürlich auch von π).

Das von uns formulierte Multiplikationsproblem (I)–(IV) ist also lösbar, und wir sind zu einer ausgezeichneten Lösung gelangt, die außerdem (V) erfüllt. Damit haben wir für die weitere Untersuchung dieses Problems eine feste Grundlage gewonnen.

Kapitel 1: Betrachtung im Kleinen.

§ 1. Distributionen endlicher Ordnung.

Es sei U ein offenes, beschränktes Intervall der reellen Achse R . Mit $\varphi = \varphi^0$ bezeichnen wir den R -Vektorraum der Klassen f, g, h, \dots von in U

³ Die §§ 1, 9 stellen eine für sich verständliche Einführung der verallgemeinerten Distributionen dar, wenn man 1), 2) in § 9 als Definition von \mathfrak{F} ansieht.

definierten und dort fast überall gleichen reellen Funktionen; die Elemente von φ nennen wir kurz „Funktionen“. φ^m ($m = 1, 2, \dots$) sei der Unterraum der $m-1$ -mal differenzierbaren Funktionen mit totalstetiger $m-1$ -ter Ableitung. Alle φ^m ($m = 0, 1, 2, \dots$) sind bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation $f \cdot g$ R -Algebren.

\mathfrak{v} sei der R -Vektorraum der Polynome a, b, c, \dots in der Unbestimmten z mit Koeffizienten aus φ :

$$(1.1) \quad a = \sum_{l=0}^m f_l z^l, \quad f_l \in \varphi.$$

Als „Ordnung“ $\eta(a)$ von a wird der Grad des Polynoms (1.1) definiert; dabei sei $\eta(0) = 0$. Es gilt dann

$$(1.2) \quad \eta(a + b) \leq \max(\eta(a), \eta(b)).$$

Die Elemente a mit $\eta(a) \leq m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) bilden einen Unterraum \mathfrak{v}^m . Es ist $\mathfrak{v}^0 \cong \varphi$. Als „Ableitung“ von (1.1) wird

$$(1.3) \quad a' = \sum_{l=0}^m f_l z^{l+1}$$

definiert. Die Abbildung $a \rightarrow a'$ ist also linear, und es gilt

$$(1.4) \quad \eta(a) = \max(0, \eta(a') - 1).$$

Schließlich sei u der von den Elementen $g' - g z$, $g \in \varphi^1$ erzeugte gegen die Ableitung abgeschlossene Unterraum, und $u^m = u \cap \mathfrak{v}^m$. Offenbar ist $u^0 = \{0\}$.

Die Elemente a, b, c, \dots des Quotientenraumes $\mathfrak{f} = \mathfrak{v}/u$ nennen wir „(verallgemeinerte) Distributionen endlicher Ordnung von U “. Als „Ordnung“ $\eta(a)$ von a wird $\eta(a) = \min_{a \in a} \eta(a)$ definiert⁴). (1.2) überträgt sich auf \mathfrak{f} ; die Elemente a mit $\eta(a) \leq m$ bilden einen Unterraum $\mathfrak{f}^m \cong \mathfrak{v}^m/u^m$. Insbesondere ist $\mathfrak{f}^0 \cong \mathfrak{v}^0 \cong \varphi$. Im folgenden identifizieren wir φ und \mathfrak{f}^0 und verfeinern entsprechend die Definition von $\eta(a)$: Für $\eta(a) > 0$ sei $\zeta(a) = \eta(a)$, und für $\eta(a) = 0$, $a \in \varphi$ setzen wir $\zeta(a) = -m$, falls es ein größtes m mit $a \in \varphi^m$ gibt, und sonst $\zeta(a) = -\infty$. Für $\zeta(a)$ gilt dann wieder (1.2).

Da u gegen die in \mathfrak{v} definierte Ableitung abgeschlossen ist, wird durch (1.3) in \mathfrak{f} eindeutig eine lineare Ableitung erklärt, für die wieder (1.4) und allgemeiner

$$(1.5) \quad \zeta(a) = \zeta(a') - 1$$

gilt. Hat die Funktion f in diesem Sinne die Funktion g zur Ableitung, so heißt das genau, daß $f \in \varphi^1$ und g die gewöhnliche Ableitung von f ist. Und $a \in \mathfrak{f}^m$ bedeutet, daß a im Sinne dieser Ableitung in der Form

$$(1.6) \quad a = \sum_{l=0}^m f_l^{(l)}, \quad f_l \in \varphi$$

darstellbar ist.

⁴) Unsere Definition der „Ordnung“ einer Distribution stimmt mit der von I. HALPERIN ([H], § 5) gegebenen überein, weicht also geringfügig von der SCHWARTZschen Definition ([S] I, S. 25) ab.

Für $g \in \varphi^m$, $a \in \mathfrak{v}^m$ definieren wir ein „inneres Produkt“ $g \cdot a \in \mathfrak{v}^m$ durch

$$(1.7) \quad g \cdot a = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{l=k}^m (-1)^{l-k} \binom{l}{k} g^{(l-k)} \cdot f_l \right) z^k.$$

Hierdurch wird \mathfrak{v}^m zu einem unitären φ^m -Modul. Aus $a \in \mathfrak{u}^m$ folgt $g \cdot a \in \mathfrak{u}^m$; also wird auch \mathfrak{f}^m zu einem unitären φ^m -Modul, und für das Element (1.6) ist

$$(1.8) \quad g \cdot a = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{l=k}^m (-1)^{l-k} \binom{l}{k} g^{(l-k)} \cdot f_l \right)^{(k)}.$$

Allgemeiner können wir das innere Produkt $a \cdot b$ für zwei Distributionen $a, b \in \mathfrak{f}$ mit $\zeta(a) + \zeta(b) \leq 0$ definieren; denn dann ist für ein gewisses m entweder $a \in \varphi^m$, $b \in \mathfrak{f}^m$ oder $a \in \mathfrak{f}^m$, $b \in \varphi^m$. Für $m=0$, also $a, b \in \varphi$ ergibt sich das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen. Gilt auch noch $\zeta(a') + \zeta(b) = \zeta(a) + \zeta(b') = \zeta(a) + \zeta(b) + 1 \leq 0$, so hat man die Produktregel

$$(1.9) \quad (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'.$$

§ 2. Tensorprodukte und Tensoralgebren.

Im folgenden verwenden wir den Begriff des „tensoriellen Produktes“ von Moduln, wie er etwa in [B], §§ 1–4 entwickelt ist. In unserem Falle handelt es sich stets um Tensorprodukte von R -Vektorräumen.

Die Elemente des Tensorproduktes $\bigotimes_{i=1}^n F^i$ von n Vektorräumen F^i ($1 \leq i \leq n$) schreiben wir

$$(2.1) \quad \sum_v f_v^1 \otimes \cdots \otimes f_v^n, \quad f_v^i \in F^i,$$

ersetzen hierin also das Zeichen \otimes durch das einfachere \circ . Die Elemente des n -fachen Tensorproduktes $\bigotimes_n F = F_n$ eines Vektorraumes F mit sich selbst bezeichnen wir, ebenso wie die der unten definierten Räume F_n und F , mit denselben Symbolen wie die von F , nur im Fettdruck.

Ist E^i Unterraum von F^i ($1 \leq i \leq n$), so ist erstens

$$\bigotimes_{i=1}^n E^i \subset \bigotimes_{i=1}^n F^i$$

und zweitens

$$\bigotimes_{i=1}^n F^i / E^i \cong \left(\bigotimes_{i=1}^n F^i \right) / [E^i, F^i]_{1 \leq i \leq n};$$

$[E^i, F^i]_{1 \leq i \leq n}$ soll den von allen denjenigen $f^1 \circ \cdots \circ f^n$ erzeugten Unterraum von $\bigotimes_{i=1}^n F^i$ bezeichnen, für den mindestens ein f^i in E^i liegt. Sind alle F^i und alle E^i untereinander gleich, so bezeichnen wir ihn mit $[E, F]_n$ und haben also

$$(2.2) \quad (F/E)_n \cong F_n / [E, F]_n.$$

Wir setzen weiter $F_n = \bigoplus_{k=1}^n F_k$, $F = \bigoplus_{k=1}^\infty F_k$. F heißt „Tensoralgebra von F “. In der Tat ist F eine Algebra, wenn wir eine Multiplikation durch

$$(f^1 \circ \cdots \circ f^m) \circ (g^1 \circ \cdots \circ g^n) = f^1 \circ \cdots \circ f^m \circ g^1 \circ \cdots \circ g^n$$

erklären. Als „Stufe“ $\sigma(f)$ von $f \in F$ definieren wir das kleinste n mit $f \in F_n$.

Es gilt

$$(2.3) \quad \sigma(f+g) \leq \text{Max}(\sigma(f), \sigma(g)),$$

$$(2.4) \quad \sigma(f \circ g) \leq \sigma(f) + \sigma(g).$$

Wir schließen diesen Paragraphen mit dem folgenden Zerlegungssatz, den wir mehrfach benutzen werden:

Hilfssatz 1. Es seien F^1, \dots, F^p Unterräume eines Vektorraumes F , i_1, \dots, i_p ganze positive Zahlen mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$. Wir setzen

$$G^j = F_{i_j-1} \otimes F^j \otimes F_{n-i_j} \subset F_n,$$

$$G^{j,k} = F_{i_j-1} \otimes F^j \otimes F_{i_k-i_j-1} \otimes F^k \otimes F_{n-i_k} \subset F_n$$

($1 \leq j < k \leq p$). Ist dann $f^j \in G^j$ ($1 \leq j \leq p$) und

$$(2.5) \quad \sum_{1 \leq j \leq p} f^j = 0,$$

so gibt es eine Darstellung

$$(2.6) \quad f^j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq j}} f^{j,k}, \quad \begin{cases} f^{j,k} \in G^{j,k}, \\ f^{j,k} + f^{k,j} = 0. \end{cases}$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach p . Für $p=1$ ist nichts zu beweisen; es sei also $p > 1$ und der Satz für $p-1$ bewiesen. Ist κ eine Projektion $F \rightarrow F^p$, also $G^j \rightarrow G^{j,p}$ für $j \neq p$, so folgt aus (2.5)

$$f^p = \sum_{1 \leq j < p} f^{p,j}$$

und

$$\sum_{1 \leq j < p} (f^j - f^{j,p}) = 0$$

mit $f^{j,p} = -f^{p,j} = \kappa f^j \in G^{j,p}$. Hieraus folgt aber nach der Induktionsvoraussetzung die Darstellung (2.6) auch für $j \neq p$.

§ 3. Hilfsbetrachtungen über Polynomkoeffizienten.

Wir fassen n ganze Zahlen $s_1, \dots, s_n \geq 0$ zu einem n -Tupel $s = (s_1, \dots, s_n)$ zusammen und setzen $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $s^k = (s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots, s_n)$, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. $s \geq t$ bedeute $s_k \geq t_k$ für alle $1 \leq k \leq n$, und $s > t$, daß die erste der von Null verschiedenen Differenzen $s_k - t_k$ positiv ist (*lexikographische Anordnung*). Wir werden häufig n durch $n+1$ ersetzen; dann soll $s' = s^{n+1}$ sein, und lateinische Indizes sollen von 1 bis n , griechische dagegen von 1 bis $n+1$ laufen.

Wir setzen

$$\Gamma_s = \frac{|s|!}{s_1! \dots s_n!}$$

Diese „Polynomkoeffizienten“ genügen dem Additionstheorem

$$(3.1) \quad \Gamma_s = \sum_k \Gamma_{s-e_k} = \sum_{s_k \neq 0} \Gamma_{s-e_k},$$

sofern nur $s \neq 0$ ist. Für zwei $n+1$ -Tupel s, t mit $|s| = |t| = m$ sei

$$P_{s,t} = (-1)^{|s'-t'|} \Gamma_{s-t'}.$$

$\Gamma_{s-t'}$ und $P_{s,t}$ sind nur für $s_k \geq t_k$, $t_{n+1} \geq s_{n+1}$ von Null verschieden; insbesondere haben die aus diesen Größen für festes m gebildeten Matrizen bei lexikographischer Anordnung der s, t Halbdiaagonalgestalt. Außerdem sind alle Diagonalelemente gleich 1; beide Matrizen sind also invertierbar. Mit Hilfe der aus (3.1) folgenden Relationen

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Gamma_{s-t'} = \Gamma_{(s-e_k)-(t-e_k)'}, \\ P_{s,t} = P_{s-e_k, t-e_k}, \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Gamma_{s-t'} = \sum_{\lambda} \Gamma_{(s-e_{\lambda})-(t-e_{n+1})'}, \\ P_{s,t} = - \sum_k P_{s-e_k, t-e_{n+1}} + P_{s-e_{n+1}, t-e_{n+1}} \end{cases}$$

für $t_k \neq 0$ bzw. $t_{n+1} \neq 0$ erkennt man leicht, daß sie zueinander invers sind:

$$(3.4) \quad \sum_t P_{s,t} \Gamma_{t-u'} = \sum_t \Gamma_{s-t'} P_{t,u} = \delta_{s,u}.$$

Für $u_{n+1} = 0$ ist das klar, und für $u_{n+1} \neq 0$ hat man

$$\begin{aligned} \sum_t P_{s,t} \Gamma_{t-u'} &= \sum_{\substack{t,k \\ s_k \geq t_k \neq 0}} P_{s-e_k, t-e_k} \Gamma_{(t-e_k)-(u-e_{n+1})'} - \\ &\quad - \sum_{\substack{t,k \\ t_{n+1} \neq 0 \\ s_k \neq 0}} P_{s-e_k, t-e_{n+1}} \Gamma_{(t-e_{n+1})-(u-e_{n+1})'} + \\ &\quad + \sum_{\substack{t \\ t_{n+1} \neq 0}} P_{s-e_{n+1}, t-e_{n+1}} \Gamma_{(t-e_{n+1})-(u-e_{n+1})'} \\ &= \sum_{|q|=m-1} P_{s-e_{n+1}, q} \Gamma_{q-(u-e_{n+1})'} \end{aligned}$$

und damit, durch vollständige Induktion nach m , wieder (3.4).

Wir beweisen nun den folgenden Hilfssatz, in dem die Größen $a^{[t]} (|t| = m)$ und $b^{[q]} (|q| = m-1)$ Elemente einer beliebigen additiven abelschen Gruppe sein dürfen:

Hilfssatz 2. Jedes der Gleichungssysteme

$$(3.5) \quad a^{[t]} = \sum_{\substack{p \\ |p|=m-1}} (-1)^{p_k + p_{n+1} - t_{n+1}} \Gamma_{t-p}^k a^{[p+e_k]},$$

$t_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$) ist äquivalent der Darstellbarkeit

$$(3.6) \quad a^{[t]} = \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} b^{[t-e_k]} - b^{[t-e_{n+1}]},$$

Hierin sind die $b^{[q]}$ eindeutig bestimmt und werden durch jedes der Systeme

$$(3.7) \quad b^{[q]} = \sum_{|p|=m-1} (-1)^{p_k - q_k + p_{n+1} - q_{n+1}} \Gamma_{(q-p)}^k a^{[p+e_k]}$$

($1 \leq l \leq n$) gegeben.

Beweis. a) Bei festem k berechnen wir aus vorgegebenen $a^{(t)}$ ($t_k \neq 0$) die Größen $b^{(q)}$ nach (3.7). Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{t_1 \neq 0} b^{[t - e_1]} - b^{[t - e_{n+1}]} &= \sum_{t_1 \neq 0} \sum_p (-1)^{p_k - t_k + \delta_k, t_1 + p_{n+1} - t_{n+1}} \Gamma_{(t - e_1 - p)^k} a^{[p + e_k]} - \\ &\quad - \sum_{\substack{p \\ t_{n+1} \neq 0}} (-1)^{p_k - t_k + p_{n+1} - t_{n+1} + 1} \Gamma_{(t - e_{n+1} - p)^k} a^{[p + e_k]} \\ &= \sum_p (-1)^{p_k - t_k + p_{n+1} - t_{n+1}} \left(\sum_{\substack{\lambda \\ t_\lambda \neq 0}} (-1)^{\delta_k, \lambda} \Gamma_{(t - e_\lambda - p)^k} \right) a^{[p + e_k]}. \end{aligned}$$

Hierin ergibt die Klammer nach (3.1)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq k}} \Gamma_{(t - e_\lambda - p)^k} - \Gamma_{(t - p)^k} &= -\delta_{t, p + e^k} && \text{für } t_k \neq 0, \\ \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq k}} \Gamma_{(t - e_\lambda - p)^k} &= \Gamma_{t - p^k} && \text{für } t_k = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten mithin

$$\sum_{t_1 \neq 0} b^{[t - e_1]} - b^{[t - e_{n+1}]} = \begin{cases} a^{(t)} & \text{für } t_k \neq 0, \\ \sum_p (-1)^{p_k + p_{n+1} - t_{n+1}} \Gamma_{t - p^k} a^{[p + e_k]} & \text{für } t_k = 0, \end{cases}$$

insbesondere also (3.6) für $t_k \neq 0$.

b) Durch diese Gleichungen (3.6) für $t_k \neq 0$ sind die $b^{(q)}$ eindeutig bestimmt. Denn

$$\sum_{t_1 \neq 0} b^{[t - e_1]} - b^{[t - e_{n+1}]} = 0$$

für alle t mit $t_k \neq 0$ bedeutet für alle q

$$b^{(q)} = - \sum_{\substack{t \neq k \\ t_1 \neq 0}} b^{[q + e_k - e_1]} + b^{[q + e_k - e_{n+1}]},$$

und hieraus folgt nacheinander $b^{(q)} = 0$ für alle q , wenn man sie so anordnet, daß die $(q_{k+1}, \dots, q_{n+1}, q_1, \dots, q_k)$ lexikographisch geordnet sind. — Aus a) und b) folgen offensichtlich alle Behauptungen des Satzes.

Ebenso beweist man den folgenden, für n -Tupel formulierten

Hilfssatz 3. *Jedes der Systeme*

$$a^{(t)} = \sum_{\substack{p \\ |p| = m-1}} (-1)^{p_k} \Gamma_{t - p^k} a^{[p + e_k]},$$

$t_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$) ist äquivalent der Darstellbarkeit

$$a^{(t)} = \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} b^{[t - e_k]}.$$

Hierin sind die $b^{(q)}$ eindeutig bestimmt und werden durch jedes der Systeme

$$b^{(q)} = \sum_{\substack{p \\ |p| = m-1}} (-1)^{p_k - q_k} \Gamma_{(q - p)^k} a^{[p + e_k]}$$

($1 \leq k \leq n$) gegeben.

§ 4. Die Räume v_n, f_n, v, f .

In diesem Paragraphen beenden wir die vorbereitenden Betrachtungen mit den wichtigsten Definitionen und Formeln über die Tensorprodukte v_n, f_n und die Tensoralgebren v, f .

Als „Ordnung“ $\eta(a)$ von $a \in v_n$ definieren wir

$$(4.1) \quad \eta(a) = \text{Min}_v \text{Max}_v \left(\sum_{i=1}^n \eta(a_v^i) \right),$$

worunter das Minimum für alle Darstellungen (2.1) von a zu verstehen ist; ebenso wird $\eta(a)$ für $a \in v$ definiert. Die Relation (1.2) überträgt sich sofort, außerdem gilt

$$(4.2) \quad \eta(a \circ b) \leq \eta(a) + \eta(b).$$

Mit $(v_n)^m, v^m$ bezeichnen wir die Unterräume aller a mit $\eta(a) \leq m$.

Durch

$$(4.3) \quad (a^1 \circ \dots \circ a^n)' = \sum_{i=1}^n a^1 \circ \dots \circ a^{i'} \circ \dots \circ a^n$$

wird in v_n, v eine lineare Ableitung erklärt, die außerdem der Produktregel

$$(4.4) \quad (a \circ b)' = a' \circ b + a \circ b'$$

genügt. Wir führen noch die folgende, mit (4.4) gleichwertige Formel an, die uns schon in (1.7) zur Definition des inneren Produktes gedient hatte:

$$(4.5) \quad a \circ b^{(m)} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (a^{(m-k)} \circ b)^{(k)}.$$

Dieses innere Produkt mit einem $g \in \varphi^m$ verallgemeinern wir auf $v_{n-1} \otimes v^m \subset v_n, v \otimes v^m \subset v$ durch

$$(4.6) \quad g \cdot (a \circ b) = a \circ (g \cdot b).$$

Insbesondere ist es also in $(v_n)^m, v^m$ erklärt. Alle diese Räume werden so zu unitären φ^m -Moduln, und (1.9) überträgt sich.

In derselben Weise — oder durch Übergang zum Quotientenraum gemäß (2.2) — definiert man Ordnung, Ableitung und inneres Produkt auch für die Elemente von f_n, f und erhält wieder die Formeln (4.1) bis (4.6).

Nach [B], § 1, prop. 7 ist nun

$$(4.7) \quad v_n \cong \varphi_n[z_1, \dots, z_n];$$

der Ausdruck rechter Hand soll den R -Vektorraum der Polynome in den Unbestimmten z_1, \dots, z_n mit Koeffizienten aus φ_n bedeuten:

$$(4.8) \quad a = \sum_{s_1, \dots, s_n} f_{s_1, \dots, s_n} z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n} = \sum_s f_s z^s, \quad f_{s_1, \dots, s_n} = f_s \in \varphi_n.$$

Der Isomorphismus (4.7) wird durch

$$f_1 z^{s_1} \circ \dots \circ f_n z^{s_n} \leftrightarrow (f_1 \circ \dots \circ f_n) z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}$$

gegeben. Für $n > 1$ (wir ersetzen hier n durch $n+1$) verwenden wir neben (4.8) noch eine andere Darstellung, indem wir die Elemente von v_{n+1} als

Polynome in $\mathfrak{z} = z_1 \dots z_n (z_1 + \dots + z_n + z_{n+1})$ schreiben:

$$(4.9) \quad \mathbf{a} = \sum_s f_s z^s = \sum_t f^{(t)} \mathfrak{z}^t, \quad f_s, f^{(t)} \in \mathcal{Q}_{n+1}.$$

Die Umrechnung ergibt

$$\mathfrak{z}^t = z^{t'} (z_1 + \dots + z_{n+1})^{t_{n+1}} = \sum_{|p| = t_{n+1}} \Gamma_p z^{t' + p} = \sum_{|s| = |t|} \Gamma_{s-t'} z^s,$$

wegen (3.4) also für $|s| = |t|$:

$$(4.10) \quad \begin{cases} f_s = \sum_t \Gamma_{s-t'} f^{(t)}, \\ f^{(t)} = \sum_s P_{t,s} f_s. \end{cases}$$

Die Ordnung $\eta(\mathbf{a})$ von (4.9) wird jetzt durch

$$\eta(\mathbf{a}) = \max_s (|s|; f_s \neq 0) = \max_t (|t|; f^{(t)} \neq 0)$$

gegeben, die Ableitung durch

$$(4.11) \quad \begin{cases} \mathbf{a}' = \sum_s f_s z^s (z_1 + \dots + z_{n+1}) = \sum_s \left(\sum_{\lambda \neq 0} f_{s-\epsilon_\lambda} \right) z^s, \\ \mathbf{a}' = \sum_t f^{(t)} \mathfrak{z}^t (z_1 + \dots + z_{n+1}) = \sum_t f^{(t-\epsilon_{n+1})} \mathfrak{z}^t. \end{cases}$$

Ein erzeugendes Element von $[u, v]_{n+1}$ ist jetzt von der Form

$$g'_\lambda - g z^{\epsilon_\lambda}, \quad g \in \mathcal{Q}_{n+1}^{(\lambda)} = \mathcal{Q}_{\lambda-1} \otimes \mathcal{Q}^1 \otimes \mathcal{Q}_{n+1-\lambda};$$

dabei ergibt sich $g'_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} g$ aus g , indem man in (2.1) alle λ -ten Faktoren ableitet. Ein beliebiges Element von $[u, v]_{n+1}$ wird also in der ersten Darstellung durch

$$(4.12) \quad f_s = \sum_\lambda (g'_\lambda)_s - \sum_{\lambda \neq 0} g_s^\lambda z^{\epsilon_\lambda}, \quad g_s^\lambda \in \mathcal{Q}_{n+1}^{(\lambda)}$$

gegeben. Zur Umrechnung auf die zweite Darstellung berechnen wir gemäß (4.10) aus den g_s^λ die $g^{(t,\lambda)} \in \mathcal{Q}_{n+1}^{(\lambda)}$ und erhalten für die zweite Summe in

$$f^{(t)} = \sum_s P_{t,s} f_s = \sum_{s,\lambda} P_{t,s} (g'_\lambda)_s - \sum_{s,\lambda \neq 0} P_{t,s} g_s^\lambda z^{\epsilon_\lambda}$$

auf Grund von (3.2), (3.3)

$$\begin{aligned} & - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} \sum_{\substack{s \\ s_k \neq 0}} P_{t,s} g_s^k z^{\epsilon_k} - \sum_{\substack{s \\ s_{n+1} \neq 0}} P_{t,s} g_{s-\epsilon_{n+1}}^{n+1} \\ & = - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} g^{[k, t-\epsilon_k]} + \sum_{\substack{s \\ s_{n+1} \neq 0}} \left(\sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} P_{t-\epsilon_k, s-\epsilon_{n+1}} - P_{t-\epsilon_{n+1}, s-\epsilon_{n+1}} \right) g_{s-\epsilon_{n+1}}^{n+1} \\ & = - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} g^{[k, t-\epsilon_k]} + \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} g^{[n+1, t-\epsilon_k]} - g^{[n+1, t-\epsilon_{n+1}]}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$(4.13) \quad f^{[t]} = \sum_{\lambda} (g^{[\lambda, t]})'_{\lambda} - \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[k, t - e_k]} + \left(\sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[n+1, t - e_k]} - g^{[n+1, t - e_{n+1}]} \right).$$

Hilfssatz 4. Ein $\alpha \in [u, v]_{n+1}$ mit $\eta(\alpha) = m$ ist in der Weise in der Form (4.12) bzw. (4.13) darstellbar, daß alle $g_s^{[\lambda, \alpha]}$ bzw. $g_s^{[\lambda, s]}$ mit $|s| \geq m$ verschwinden.

Beim Beweise können wir uns auf (4.12) beschränken. Sei $M \geq m$ die kleinste Zahl, für die in der vorliegenden Darstellung (4.12) alle $g_s^{[\lambda]}$ mit $|s| \geq M$ verschwinden. Für $M = m$ ist nichts zu beweisen; wir nehmen also $M > m$ an und erbringen den Beweis durch vollständige Induktion nach M . Für $|s| = M$ haben wir dann

$$\sum_{\substack{\lambda \\ s_{\lambda} \neq 0}} g_s^{[\lambda]} - e_{\lambda} = 0,$$

also nach Hilfssatz 1

$$g_s^{[\lambda]} - e_{\lambda} = \sum_{\substack{\alpha \neq \lambda \\ s_{\alpha} \neq 0}} h_s^{[\lambda, \alpha]}, \quad \begin{cases} h_s^{[\lambda, \alpha]} \in \varphi_{n+1}^{(\lambda, \alpha)} = \varphi_{n+1}^{(\lambda)} \cap \varphi_{n+1}^{(\alpha)}, \\ h_s^{[\lambda, \alpha]} + h_s^{[\alpha, \lambda]} = 0. \end{cases}$$

Für $|q| = M - 1$, $|r| = M - 2$ ist mithin

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} (g_q^{[\lambda]})'_{\lambda} &= - \sum_{\substack{\lambda \\ q_{\lambda} \neq 0}} \left(\sum_{\substack{\alpha \neq \lambda}} (h_{q+e_{\alpha}}^{[\lambda, \alpha]})'_{\alpha} \right), \\ \sum_{\lambda} (g_q^{[\lambda]})'_{\lambda} - \sum_{\substack{\lambda \\ q_{\lambda} \neq 0}} g_q^{[\lambda]} - e_{\lambda} &= - \sum_{\substack{\lambda \\ q_{\lambda} \neq 0}} \hat{g}_q^{[\lambda]} - e_{\lambda}, \\ \hat{g}_r^{[\lambda]} &= g_r^{[\lambda]} + \sum_{\substack{\alpha \neq \lambda}} (h_{r+e_{\alpha}+e_{\lambda}}^{[\lambda, \alpha]})'_{\alpha}, \\ \sum_{\lambda} (\hat{g}_r^{[\lambda]})'_{\lambda} &= \sum_{\lambda} (g_r^{[\lambda]})'_{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir sind damit zu einer Darstellung (4.12) gelangt, bei der alle $g_s^{[\lambda]}$ mit $|s| \geq M - 1$ verschwinden. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung ist die Behauptung also auch für M bewiesen.

§ 5. Die Räume g_{n+1}^k, g_{n+1}^m .

Für ein $n+1$ -Tupel t und $1 \leq k \leq n$ definieren wir $\xi[k, t] \subset \varphi_{n+1}$ durch

$$(5.1) \quad \xi[k, t] = \begin{cases} \varphi_{k-1} \otimes \varphi'^{t_{k+1} + \dots + t_n} \otimes \varphi_{n+1-k} & \text{für } t_k = 0, \\ \{0\} & \text{für } t_k \neq 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$(5.2) \quad \xi[n, t] = \begin{cases} \varphi_{n+1} & \text{für } t_n = 0, \\ \{0\} & \text{für } t_n \neq 0. \end{cases}$$

dagegen für $k \neq n, t_n \neq 0$

$$(5.3) \quad \xi[k, t] \subset \varphi_{n+1}^{(k)}.$$

Ferner ist stets

$$(5.4) \quad \xi[k, t + e_{n+1}] = \xi[k, t].$$

Für $1 \leq k, l \leq n$ setzen wir schließlich $\xi[k, l, t] = \xi[k, t] \cap \xi[l, t]$.

Weiter sei $\mathfrak{x}_{n+1}^k \subset \mathfrak{v}_{n+1}$ der Unterraum aller Elemente (4.9) mit $f^{[l]} \in \xi[k, l]$, ebenso $\mathfrak{x}_{n+1}^{k,l} = \mathfrak{x}_{n+1}^k \cap \mathfrak{x}_{n+1}^l$ der aller Elemente (4.9) mit $f^{[l]} \in \xi[k, l, l]$. $\mathfrak{g}_{n+1}^k \subset \mathfrak{f}_{n+1}^k$ sei das Bild von \mathfrak{x}_{n+1}^k bei der kanonischen Abbildung von \mathfrak{v}_{n+1} auf \mathfrak{f}_{n+1} , und

$$\mathfrak{x}_{n+1} = \sum_k \mathfrak{x}_{n+1}^k, \quad \mathfrak{g}_{n+1} = \sum_k \mathfrak{g}_{n+1}^k.$$

Nach (5.4) sind alle diese Räume gegen die Ableitung abgeschlossen. Umgekehrt werden wir zeigen, daß aus $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{g}_{n+1}$ auch $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}_{n+1}$ folgt (Satz 2). Offenbar besteht \mathfrak{g}_{n+1}^k aus den endlichen Summen von Elementen

$$(5.5) \quad (\mathfrak{b} \circ g \circ c \circ f)^{(l)}, \quad \begin{cases} \mathfrak{b} \in \mathfrak{f}_{k-1}, f \in \varphi, \\ c \in (\mathfrak{f}_{n-k})^m, g \in \varphi^m, \\ m, l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Insbesondere besteht $\mathfrak{g}_2^1 = \mathfrak{g}_2$ also aus den endlichen Summen von Elementen $f^{(l)}$, $f \in \varphi_2$. Daraus folgt, daß $a \circ b$ und $b \circ a$ nur gleichzeitig in \mathfrak{g}_2 liegen.

Satz 1. Es sei $\mathfrak{a} = \sum_k \mathfrak{a}^k \in \mathfrak{g}_{n+1}$, $\mathfrak{a}^k \in \mathfrak{g}_{n+1}^k$ mit $\eta(\mathfrak{a}) = m$. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{a}^k = \mathfrak{b}^k + \mathfrak{c}^k$, wo die \mathfrak{b}^k , $\mathfrak{c}^k \in \mathfrak{g}_{n+1}^k$ Repräsentanten \mathfrak{b}^k , $\mathfrak{c}^k \in \mathfrak{x}_{n+1}^k$ mit

$$\mathfrak{b}^k = \sum_{l \neq k} \mathfrak{b}^{k,l}, \quad \begin{cases} \mathfrak{b}^{k,l} \in \mathfrak{x}_{n+1}^{k,l} \\ \mathfrak{b}^{k,l} + \mathfrak{b}^{l,k} = 0 \end{cases}$$

und $\eta(\mathfrak{c}^k) \leq m$ besitzen.

Beweis. Es seien $\mathfrak{a} = \sum_l f^{[l]} \delta^l$, $\mathfrak{a}^k = \sum_l f^{[k,l]} \delta^l \in \mathfrak{x}_{n+1}^k$ Repräsentanten von \mathfrak{a} , \mathfrak{a}^k mit $\eta(\mathfrak{a}) = m$, $\text{Max}_k \eta(\mathfrak{a}^k) = M \geq m$. Für $M = m$ ist nichts zu beweisen; wir nehmen also $M > m$ an und beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach M . Aus

$$\mathfrak{a} - \sum_k \mathfrak{a}^k = \sum_{\substack{l \\ |l| \leq M}} \left(f^{[l]} - \sum_{\substack{k \\ t_k = 0}} f^{[k,l]} \right) \delta^l \in [\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]_{n+1}$$

folgt nach (4.13) und Hilfssatz 4 für $|t| = M$

$$(5.6) \quad \sum_k f^{[k,t]} = 0,$$

worin

$$(5.7) \quad f^{[\lambda,t]} \in \chi[\lambda, t] = \begin{cases} \xi[\lambda, t] & \text{für } 1 \leq \lambda \leq n, t_\lambda = 0, \\ \varphi_{n+1}^{(\lambda)} & \text{für } 1 \leq \lambda \leq n, t_\lambda \neq 0 \text{ oder } \lambda = n+1 \end{cases}$$

ist und die $f^{[n+1,t]}$ (3.5) erfüllen. Auf die Gleichungen (5.6) für $t_n \neq 0$ wenden wir Hilfssatz 1 an:

$$(5.8) \quad f^{[\lambda,t]} = \sum_{\alpha + \lambda} f^{[\lambda, \alpha, t]}, \quad \begin{cases} f^{[\lambda, \alpha, t]} \in \chi[\lambda, \alpha, t] = \chi[\lambda, t] \cap \chi[\alpha, t], \\ f^{[\lambda, \alpha, t]} + f^{[\alpha, \lambda, t]} = 0, \end{cases}$$

und setzen für $t_n = 0$, $1 \leq k \leq n$:

$$(5.9) \quad f^{[n+1,k,t]} = \sum_{\substack{p \\ |p| = M-1}} (-1)^{p_n + p_{n+1} - t_{n+1}} I_{t-p} f^{[n+1,k,p+e_n]},$$

$$(5.10) \quad f^{[n+1,t]} = \sum_k f^{[n+1,k,t]}.$$

Wegen (5.3) gilt also für beliebiges t : $f^{[n+1, k, t]} \in \varphi_{n+1}^{(k, n+1)}$; auch für $t_n = 0$ haben wir im Falle $t_k \neq 0$ wieder $f^{[n+1, k, t]} \in \chi[k, n+1, t]$. Im Falle $t_k = 0$ aber ist dies für $k = n$ wegen (5.2) klar, und für $k \neq n$ folgt es daraus, daß in der Summe (5.9) dann nur Summanden p mit $t_1 + \dots + t_k + t_{n+1} \geq p_1 + \dots + p_k + p_{n+1}$, $p_{k+1} + \dots + p_n + 1 \geq t_{k+1} + \dots + t_n$, also $\chi[k, p + e_n] \subset \chi[k, t]$ auftreten.

Die Gleichungen (5.6) schreiben sich für $t_n = 0$ jetzt

$$\sum_k (f^{[k, t]} + f^{[n+1, k, t]}) = 0;$$

in diesem Falle brauchen wir den Hilfssatz 1 wegen (5.2) nicht noch einmal anzuwenden, sondern erhalten die Zerlegung (5.8) direkt in der Form

$$\begin{aligned} f^{[k, t]} &= f^{[k, n, t]} + \hat{f}^{[k, n+1, t]} \quad (k \neq n), \\ f^{[n, t]} &= \sum_{k \neq n} f^{[n, k, t]} + f^{[n, n+1, t]} \end{aligned}$$

mit $f^{[k, n+1, t]} = -f^{[n+1, k, t]}$.

Diese Zerlegung ergibt nun

$$a_M^k = \sum_{\substack{t_n=0 \\ |t|=M}} f^{[k, t]} \delta^t = b_M^k + c_M^k + d_M^k$$

mit

$$\begin{aligned} b_M^k &= \sum_{t_k=0} \left(\sum_{\substack{l \neq k \\ t_l=0}} f^{[k, l, t]} \right) \delta^t \in \mathcal{K}_{n+1}^k, \\ c_M^k &= \sum_{t_k=0} \left(\sum_{\substack{l \neq k \\ t_l=0}} f^{[k, l, t]} \right) \delta^t \in \mathcal{K}_{n+1}^k, \\ d_M^k &= \sum_{t_k=0} f^{[k, n+1, t]} \delta^t \in \mathcal{K}_{n+1}^k \end{aligned}$$

Hierin ist erstens

$$b_M^k = \sum_{l \neq k} b_M^{k, l}, \quad \begin{cases} b_M^{k, l} \in \mathcal{K}_{n+1}^{k, l}, \\ b_M^{k, l} + b_M^{l, k} = 0. \end{cases}$$

Zweitens ist modulo $[u, v]_{n+1}$

$$c_M^k = c_{M-1}^k = \sum_{\substack{p \\ p_k=0 \\ |p|=M-1}} \left(\sum_{l \neq k} (f^{[k, l, p+e_l]})'_l \right) \delta^p \in \mathcal{K}_{n+1}^k$$

Und drittens hat man wegen (5.9) und Hilfssatz 2, sofern nur $n > 1$ ist,

$$\begin{aligned} d_M^k &= - \sum_{\substack{q \\ q_k=0 \\ |q|=M-1}} g^{[k, q]} \delta^{q+e_k} \\ &\quad + \sum_{t_k=0} \left(\sum_{\substack{j \\ t_j=0}} g^{[k, t-e_j]} - g^{[k, t-e_{n+1}]} \right) \delta^t + \sum_{t_k=1} g^{[k, t-e_k]} \delta^t \end{aligned}$$

mit

$$(5.11) \quad g^{[k, q]} = \sum_{p_k=0} (-1)^{p_1 - q_1 + p_{n+1} - q_{n+1}} \Gamma_{(p-q)l} f^{[k, n+1, p+e_l]}$$

($q_k = 0$) bei beliebigem $l \neq k$. Nach (4.13) ist also modulo $[u, v]_{n+1}$

$$\mathfrak{b}_M^k \equiv \mathfrak{b}_{M-1}^k = - \sum_{\substack{q \\ q_k = 0 \\ |q| = M-1}} ((g^{[k, q]})_k' + (g^{[k, q]})_{n+1}') 3^q.$$

Im Falle $k = n$ liegt \mathfrak{b}_{M-1}^k sicher in \mathfrak{x}_{n+1}^k . Im Falle $k \neq n$ hat man in (5.11) $l = n$ zu setzen; für alle vorkommenden Summanden p gilt dann $q_1 + \dots + q_k + q_{n+1} \geq p_1 + \dots + p_k + p_{n+1}$, $v_{k+1} + \dots + p_n + 1 \geq q_{k+1} + \dots + q_n + 1$, also $\chi[k, p + e_n] \subset \chi[k, q + e_n]$; mithin ist $g^{[k, q]} \in \chi[k, q + e_n]$ und folglich auch hier $\mathfrak{b}_{M-1}^k \in \mathfrak{x}_{n+1}^k$. — Für $n = 1$ kann man dies offensichtlich direkt einsehen.

Insgesamt haben wir also modulo $[u, v]_{n+1}$

$$\mathfrak{a}^k \equiv \mathfrak{b}_M^k + \hat{\mathfrak{a}}^k$$

mit

$$\hat{\mathfrak{a}}^k = (\mathfrak{a}^k - \mathfrak{a}_M^k) + \mathfrak{c}_{M-1}^k + \mathfrak{b}_{M-1}^k \in \mathfrak{x}_{n+1}^k$$

und mit $\eta(\hat{\mathfrak{a}}^k) \leq M - 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt daher die Richtigkeit der Behauptung auch für M , w.z.b.w.

Corollar 1. Ein Element $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}_{n+1}$ mit $\eta(\mathfrak{a}) = m$ besitzt eine Zerlegung $\mathfrak{a} = \sum_k \mathfrak{a}^k$, worin $\mathfrak{a}^k \in \mathfrak{g}_{n+1}^k$ einen Repräsentanten $\mathfrak{a}^k \in \mathfrak{x}_{n+1}^k$ mit $\eta(\mathfrak{a}^k) \leq m$ besitzt.

Corollar 2. Es sei $\mathfrak{a}^k \in \mathfrak{g}_{n+1}^k$, $\sum_k \mathfrak{a}^k = 0$. Dann besitzt jedes \mathfrak{a}^k einen Repräsentanten

$$\mathfrak{a}^k = \sum_{l \neq k} \mathfrak{a}^{k, l}, \quad \begin{cases} \mathfrak{a}^{k, l} \in \mathfrak{x}_{n+1}^{k, l}, \\ \mathfrak{a}^{k, l} + \mathfrak{a}^{k, l} = 0. \end{cases}$$

Wir beweisen weiter den angekündigten

Satz 2. Aus $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{g}_{n+1}$ folgt $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}_{n+1}$.

Beweis. Es sei $\eta(\mathfrak{a}) = m$. Für $m = 0$ ist der Satz trivial; wir nehmen also $m > 0$ an und beweisen ihn durch vollständige Induktion nach m . Ist (4.9) ein Repräsentant mit $\eta(\mathfrak{a}) = m$, so folgt aus (4.11), dem eben bewiesenen Corollar 1 und Hilfssatz 4 nach Voraussetzung für $|t| = m + 1$:

$$(5.12) \sum_{\substack{k \\ t_k = 0}} f^{[k, t]} - \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[k, t - e_k]} + \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[n+1, t - e_k]} - g^{[n+1, t - e_{n+1}]} = \begin{cases} f^{[t - e_{n+1}]} & \text{für } t_{n+1} \neq 0, \\ 0 & \text{für } t_{n+1} = 0 \end{cases}$$

mit $f^{[k, t]} \in \xi[k, t]$, $g^{[k, q]} \in \mathfrak{g}_{n+1}^{(k)}$. Wir setzen für

$$\begin{aligned} |t| = m + 1, \quad t_{n+1} \neq 0: & f^{[k, t]} = \hat{f}^{[k, t - e_{n+1}]} \in \xi[k, t - e_{n+1}], \\ |q| = m, \quad q_{n+1} \neq 0: & g^{[k, q]} = \hat{g}^{[k, q - e_{n+1}]} \end{aligned}$$

und erhalten aus den Gleichungen (5.12) für $t_{n+1} \neq 0$ mit $t = q + e_{n+1}$

$$(5.13) \quad f[q] = \hat{f}[q] - g^{[n+1, q]},$$

wo der Summand $-g^{[n+1, q]}$ nur für $q_{n+1} = 0$ auftritt und

$$(5.14) \quad \hat{f}[q] = \sum_{\substack{k \\ q_k = 0}} \hat{f}^{[k, q]} - \sum_{\substack{k \\ q_k \neq 0}} \hat{g}^{[k, q - e_k]} + \sum_{\substack{k \\ q_k \neq 0}} \hat{g}^{[n+1, q - e_k]} - \hat{g}^{[n+1, q - e_{n+1}]}$$

ist. Die Gleichungen (5.12) für $t_{n+1} = 0$ ergeben

$$\sum_{\substack{k \\ t_k=0}} g^{[k, t]} - \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[k, t-e_k]} + \sum_{\substack{k \\ t_k \neq 0}} g^{[n+1, t-e_k]} = 0,$$

also nach Hilfssatz 3 für $q_{n+1} = 0$

$$g^{[n+1, q]} = \sum_k h^{[k, q]}$$

mit

$$h^{[k, q]} = - \sum_{(p+e_n)_k=0} (-1)^{p_n-q_n} \Gamma_{(q-p)^n} f^{[k, p+e_n]} + \sum_{(p+e_n)_k \neq 0} (-1)^{p_n-q_n} \Gamma_{(q-p)^n} g^{[k, p+e_n-e_k]},$$

woraus man wie beim Beweis von Satz 1 $h^{[k, q]} \in \varphi_{n+1}^{(k)}$ und für $q_k = 0$ $h^{[k, q]} \in \xi[k, q]$ schließt. Dies und (5.13), (5.14) liefern modulo $[u, v]_{n+1}$

$$a_m = \sum_{\substack{t \\ t_l = m}} f^{[t]} \delta^t \equiv b_m + c_m$$

mit $b_m \in \mathfrak{r}_{n+1}$, $\eta(c_m) \leq m-1$; also $a = b + c$ mit $b \in \mathfrak{g}_{n+1}$, $\eta(c) \leq m-1$. Nach der Induktionsvoraussetzung folgt aus $c' \in \mathfrak{g}_{n+1}$ jetzt $c \in \mathfrak{g}_{n+1}$, also $a \in \mathfrak{g}_{n+1}$, w.z.b.w.

Aus dem Beweis ergibt sich noch das folgende

Corollar. Es sei $\eta(d) \leq \eta(a) = m$, $a' - d \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Dann ist a von der Form $a = b + c$ mit $b \in \mathfrak{g}_{n+1}$, $\eta(c) \leq m-1$.

§ 6. Die Abbildungen μ_{n+1}^k .

Es sei \mathfrak{h}_{n+1}^k der aus den endlichen Summen von Elementen

$$(b \circ g \circ c \circ f)^{(l)}, \quad \begin{cases} b \in \mathfrak{f}_{k-1}, & c \in \mathfrak{f}_{n-k}, \\ f, g \in \varphi, & l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

bestehende Unterraum von \mathfrak{f}_{n+1} . Er ist gegen die Ableitung abgeschlossen und enthält \mathfrak{g}_{n+1}^k . Durch

$$\mu_{n+1}^k (b \circ g \circ c \circ f) = b \circ c \circ (g \cdot f)$$

wird eine lineare Abbildung

$$(6.1) \quad \mu_{n+1}^k : \mathfrak{f}_{k-1} \otimes \varphi \otimes \mathfrak{f}_{n-k} \otimes \varphi \rightarrow \mathfrak{f}_{n-1} \otimes \varphi$$

definiert, und wir behaupten den

Satz 3. Die Abbildung (6.1) läßt sich zu einer mit der Ableitung vertauschbaren und folglich durch

$$(6.2) \quad \mu_{n+1}^k (b \circ g \circ c \circ f)^{(l)} = (b \circ c \circ (g \cdot f))^{(l)}$$

eindeutig bestimmten linearen Abbildung

$$(6.3) \quad \mu_{n+1}^k : \mathfrak{h}_{n+1}^k \rightarrow \mathfrak{f}_n$$

fortsetzen.

Beweis. Für den mit der Ableitung vertauschbaren Automorphismus π_{n+1}^k von \mathfrak{f}_{n+1} , der in der Vertauschung des k -ten und des n -ten Faktors besteht, gilt

$$(6.4) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}_{k-1} \otimes \varphi \otimes \mathfrak{f}_{n-k} \otimes \varphi \cong \mathfrak{f}_{n-1} \otimes \varphi_2, \\ \mathfrak{h}_{n+1}^k \cong \mathfrak{f}_{n-1} \otimes \mathfrak{h}_2^1, \end{cases}$$

und die Abbildung (6.1) kann man, wenn ι_{n-1} den identischen Automorphismus von \mathfrak{f}_{n-1} bezeichnet, in der Form

$$(6.5) \quad \mu_{n+1}^k = (\iota_{n-1} \otimes \mu_2^1) \circ \pi_{n+1}^k$$

schreiben. Wir brauchen von Satz 3 also nur den Spezialfall $k = n = 1$ zu beweisen; denn ist μ_2^1 zu einer mit der Ableitung vertauschbaren Abbildung $\mathfrak{h}_2^1 \rightarrow \mathfrak{f}_1$ fortgesetzt, so wird die gesuchte Fortsetzung von μ_{n+1}^k wieder durch (6.5) gegeben. Es bleibt also zu zeigen:

Lemma. Aus $\sum_{l=0}^m f_l^{(l)} = 0$, $f_l \in \varphi_2$ folgt $\sum_{l=0}^m f_l^{(l)} = 0$, $f_l = \mu_2^1 f_l$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist für $0 \leq |s| \leq m$

$$(6.6) \quad \Gamma_s f_{|s|} = \sum_{\substack{\alpha \\ s_\alpha \neq 0}} g_{s-e_\alpha}^\alpha - \sum_{\alpha} (g_s^\alpha)'_\alpha$$

mit $g_s^\alpha = 0$ für $|s| = m$. Wir zeigen der Reihe nach für alle $|s| = l$, daß

$$(6.7) \quad \sum_{\alpha} (g_s^\alpha)'_\alpha = \Gamma_s (g_l - f_l) - \sum_{\substack{\alpha \\ s_\alpha \neq 0}} h_{s-e_\alpha}^\alpha$$

mit $h_q^\alpha \in \varphi_2^{(\alpha)}$ und

$$(6.8) \quad \sum_{\alpha} (h_q^\alpha)'_\alpha = 0$$

ist. Für $l = m$ kann man nämlich einfach $h_q^\alpha = 0$, $g_m = f_m$ setzen; und wird die Behauptung für ein $0 < l \leq m$ als richtig angenommen, so erhält man durch Einsetzen von (6.7) in (6.6) für $|s| = l$

$$\Gamma_s g_l = \sum_{\substack{\alpha \\ s_\alpha \neq 0}} (g_{s-e_\alpha}^\alpha + h_{s-e_\alpha}^\alpha)$$

oder

$$\sum_{\substack{\alpha \\ s_\alpha \neq 0}} (\Gamma_{s-e_\alpha} g_l - g_{s-e_\alpha}^\alpha - h_{s-e_\alpha}^\alpha) = 0.$$

Hieraus folgt erstens $g_l \in \varphi_2^{(1,2)}$ und zweitens nach Hilfssatz I

$$\Gamma_{s-e_\alpha} g_l - g_{s-e_\alpha}^\alpha - h_{s-e_\alpha}^\alpha = \sum_{\substack{\lambda \neq \alpha \\ s_\lambda \neq 0}} h_{s-e_\alpha}^{\alpha, \lambda}, \quad \begin{cases} h_{s-e_\alpha}^{\alpha, \lambda} \in \varphi_2^{(1,2)}, \\ h_{s-e_\alpha}^{\alpha, \lambda} + h_{s-e_\alpha}^{\lambda, \alpha} = 0. \end{cases}$$

Es ergibt sich also, wenn man $s = q + e_\alpha$ setzt, den α -ten Faktor ableitet, bei festem q über α summiert und (6.8) berücksichtigt,

$$\sum_{\alpha} (g_q^\alpha)'_\alpha = \Gamma_q ((g_l)'_1 + (g_l)'_2) - \sum_{\substack{\lambda \\ q_\lambda \neq 0}} \left(\sum_{\alpha \neq \lambda} (h_{q+e_\alpha}^{\alpha, \lambda})'_\alpha \right).$$

Das ist aber (6.7) für $|q| = l - 1$; (6.8) ist wegen der schiefen Symmetrie der $h_{\epsilon}^{\alpha, \lambda}$ offensichtlich erfüllt. Also gilt (6.7) für alle $0 \leq l \leq m$, und man kann

$$\begin{aligned} g_m &= f_m, \\ g_l &= f_l + (g_{l+1})'_1 + (g_{l+1})'_2 \quad (0 \leq l \leq m-1) \end{aligned}$$

wählen. Hieraus folgt mit $g_l = \mu_2^1 g_l \in \varphi^1$ aber

$$\begin{aligned} f_m &= g_m, \\ f_l &= g_l - g'_{l+1} \quad (0 \leq l \leq m-1), \end{aligned}$$

d. h. $\sum_{l=0}^m f_l z^l \in u$ oder $\sum_{l=0}^m f_l^{(l)} = 0$, womit das Lemma und also auch Satz 3 bewiesen ist.

Corollar. Bei der Abbildung μ_{n+1}^k ist jedes Element von f_n schon Bild eines Elementes von g_{n+1}^k .

Setzt man nämlich in (5.5) $g = 1$, so erkennt man, daß jedes Element der Form $(a \circ f)^{(l)}$, $a \in f_{n-1}$ Bild eines Elementes von g_{n+1}^k ist. Nach (4.5) ist aber jedes Element von f_n endliche Summe solcher speziellen Elemente.

Offenbar ist

$$(6.9) \quad \begin{cases} f_m \otimes h_{n+1}^k = h_{m+n+1}^{m+k}, \\ f_m \otimes g_{n+1}^k = g_{m+n+1}^{m+k}, \\ f_m \otimes g_{n+1} \subset g_{m+n+1} \end{cases}$$

und für $c \in f_m$, $a \in h_{n+1}^k$:

$$(6.10) \quad c \circ \mu_{n+1}^k a = \mu_{m+n+1}^{m+k} (c \circ a).$$

Für $a \in g_{n+1}$ bezeichnen wir nun mit $p_n[a] \subset f_n$ die Menge der aus allen Zerlegungen $a = \sum_k a^k$, $a^k \in g_{n+1}^k$ resultierenden Elemente $\sum_k \mu_{n+1}^k a^k \in f_n$.

$p_n[0] = p_n$ ist ein gegen die Ableitung abgeschlossener Unterraum von f_n , und die $p_n[a]$ sind die nach dem eben bewiesenen Corollar f_n ganz ausfüllenden Nebenklassen nach p_n . Weiter werde $q_{n+1} \subset g_{n+1}$ von allen Elementen a mit

$$(6.11) \quad p_n[a] = p_n \text{ oder } 0 \in p_n[a]$$

gebildet, und es werde $q_1 = \{0\}$ gesetzt. q_n ist gleichfalls ein gegen die Ableitung abgeschlossener Unterraum von f_n , und es ist

$$(6.12) \quad f_m \otimes p_n \subset p_{m+n}, \quad f_m \otimes q_n \subset q_{m+n}.$$

Satz 4. Es ist $p_n = q_n$.

Beweis. Nach dem Lemma zu Satz 3 ist $p_1 = q_1 = \{0\}$; wir können also $n > 1$ annehmen.

a) Aus $b \in q_n$ folgt nach (6.12) $1 \circ b \in q_{n+1}$ und hieraus nach (6.11) $b \in p_n$. Also ist $q_n \subset p_n$.

b) Es sei $b \in p_n$, d. h. $b = \sum_k \mu_{n+1}^k a^k$ mit $\sum_k a^k = 0$, $a^k \in g_{n+1}^k$. Nach Corollar 2 zu Satz 1 besitzt es also einen Repräsentanten

$$(6.13) \quad \begin{aligned} b &= \sum_{1 \leq k \leq n} \mu_{n+1}^k a^k = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \mu_{n+1}^k a^{k, l} \\ &= \sum_{1 \leq l \leq n-1} \left(\sum_{l < k \leq n} \mu_{n+1}^k a^{k, l} + \sum_{1 \leq k \leq l} \mu_{n+1}^k a^{k, l+1} \right). \end{aligned}$$

Nun ist offenbar

$$\begin{aligned} \mu_n^{k+1} a^{k,l} &\in \mathfrak{X}_n^l & \text{für } l < k \leq n, \\ \mu_n^{k+1} a^{k,l+1} &\in \mathfrak{X}_n^l & \text{für } k \leq l < n, \end{aligned}$$

sowie etwa für $k \leq l < n$

$$\mu_n^l \mu_{n+1}^k a^{k,l+1} = \mu_n^k \mu_{n+1}^{l+1} a^{k,l+1}.$$

Daraus folgt erstens $\mathfrak{b} \in \mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{g}_n$ und zweitens

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq l \leq n-1} \mu_n^l \left(\sum_{l < k \leq n} \mu_{n+1}^k a^{k,l} + \sum_{1 \leq k \leq l} \mu_{n+1}^k a^{k,l+1} \right) \\ &= \sum_{1 \leq l < k \leq n} \mu_n^l \mu_{n+1}^k a^{k,l} + \sum_{1 \leq k \leq l < n} \mu_n^k \mu_{n+1}^{l+1} a^{k,l+1} \\ &= \sum_{1 \leq l < k \leq n} (\mu_n^l \mu_{n+1}^k a^{k,l} + \mu_n^k \mu_{n+1}^l a^{l,k}) = 0, \end{aligned}$$

nach (6.11) also $\mathfrak{b} \in \mathfrak{q}_n$. Es ist mithin auch $\mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{q}_n$, womit der Satz bewiesen ist.

Corollar. Aus $1 \circ \mathfrak{b} \in \mathfrak{q}_{n+1}$ folgt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{q}_n$.

Denn nach (6.11) folgt aus der Voraussetzung $\mathfrak{b} \in \mathfrak{p}_n [1 \circ \mathfrak{b}] = \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_n$.

§ 7. Der Unterraum ϱ und der Quotientenraum π .

Der Unterraum ϱ von \mathfrak{f} sei das von allen Elementen der Form

$$(7.1) \quad g \circ a - g \cdot a, \quad \begin{cases} a \in \mathfrak{f}^m, g \in \varphi^m, \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

in \mathfrak{f} erzeugte Differential-Linksideal, d. h. das kleinste gegen die Ableitung abgeschlossene Linksideal, das alle Elemente (7.1) enthält.

ϱ erfüllt also die Forderungen (ii'), (iii') der Einleitung; offenbar auch (iv'). Die Forderung (ii'_2) folgt für $a \in \varphi^m$, $b \in \mathfrak{f}^m$ unmittelbar aus (7.1), und für $a \in \mathfrak{f}^m$, $b \in \varphi^m$ hat man nach (1.6), (4.5)

$$\begin{aligned} a \circ b - a \cdot b &= \sum_{l=0}^m (f_l^{(l)} \circ b - f_l^{(l)} \cdot b) \\ &= \sum_{l=0}^m \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} (f_l \circ b^{(l-j)} - f_l \cdot b^{(l-j)})^{(j)}, \end{aligned}$$

also wieder $a \circ b - a \cdot b \in \varrho$. Hieraus und aus (4.6) folgt weiter (ii'_3). Andererseits ist ϱ offensichtlich der kleinste Unterraum von \mathfrak{f} mit allen diesen Eigenschaften, es gilt also auch (v').

Satz 5. ϱ besteht aus den endlichen Summen von Elementen

$$(7.2) \quad a - \mu_{n+1}^k a, \quad \begin{cases} a \in \mathfrak{g}_{n+1}^k, \\ 1 \leq k \leq n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Beweis. Der Unterraum der endlichen Summen von Elementen (7.2) ist nach (6.9), (6.10) ein Linksideal und nach Satz 3 gegen die Ableitung abgeschlossen und in ϱ enthalten. Es bleibt also zu zeigen, daß er alle Elemente (7.1) enthält. Dazu können wir in (7.1)

$$a = c \circ f^{(i)} = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (c^{(i-j)} \circ f)^{(j)}$$

mit $c \in (f_{n-1})^{(m-i)}$ ($0 \leq i \leq m$) annehmen und erhalten

$$g \circ a - g \cdot a = \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^j (-1)^{i-l} \binom{j}{l} \binom{i}{j} (g^{(j-l)} \circ c^{(i-j)} \circ f - c^{(i-j)} \circ (g^{(j-l)} \cdot f))^{(l)},$$

wegen $g^{(j-l)} \in \varphi^{(m-j)}$, $c^{(i-j)} \in (f_{n-1})^{m-j}$ also in der Tat eine endliche Summe von Elementen (7.2).

Wir setzen wieder $\varrho_n = \varrho \cap f_n$, $\varrho^m = \varrho \cap f^m$. Es gilt dann der

Satz 6. *Es ist $\varrho_n = \varrho_n$.*

Beweis. Offenbar ist $\varrho_n \subset \varrho_n$. Umgekehrt ist ein $b \in \varrho_n$ nach Satz 5 von der Form

$$b = \sum_{i=2}^N (a_i - b_{i-1}), \quad \begin{cases} a_i \in g_i, \\ b_{i-1} \in p_{i-1}[a_i] \end{cases}$$

mit $N \geq n$. Daraus folgt

$$1 \circ \underbrace{\cdots}_{N-n} 1 \circ b = \sum_{i=2}^N 1 \circ \underbrace{\cdots}_{N-i} 1 \circ (a_i - 1 \circ b_{i-1}),$$

und das liegt wegen $a_i - 1 \circ b_{i-1} \in q_i$ in q_N . Nach dem Corollar zu Satz 4 folgt also $b \in q_n$ und damit $\varrho_n \subset q_n$, w.z.b.w.

Dieser Satz besagt insbesondere, daß ϱ auch die Forderung (i') der Einleitung erfüllt:

Corollar 1. *Es ist $\varrho_1 = \varrho \cap f = \{0\}$.*

Corollar 2. *Das Element $a = \sum_{i=1}^n a_i \in f_n$, $a_i \in f_i$, liegt genau dann in ϱ , wenn*

$$\langle a \rangle_n = \sum_{i=1}^n 1 \circ \underbrace{\cdots}_{n-i} 1 \circ a_i \in q_n \text{ gilt.}$$

Denn a und $\langle a \rangle_n$ unterscheiden sich nur um endlich viele Summanden $1 \circ b - b$, gehören also nur gemeinsam zu ϱ .

Satz 7. ϱ^m ist φ^m -Untermodul von f^m .

Denn aus $a \in \varrho^m$, $g \in \varphi^m$ folgt $g \cdot a = g \circ a - (g \circ a - g \cdot a) \in \varrho^m$.

Wir führen jetzt den Quotientenraum $\pi = f/\varrho$ ein. Für $\alpha \in \pi$ seien $\sigma(\alpha) = \text{Min } \sigma(a)$, $\eta(\alpha) = \text{Min } \eta(a)$. Die Ungleichungen (2.3), (1.2) übertragen sich; die Elemente α mit $\sigma(\alpha) \leq n$ bzw. $\eta(\alpha) \leq m$ bilden einen Unterraum π_n bzw. π^m .

Satz 8. *Ist $\sigma(\alpha) = n$, so gilt für $n > 1$: $\alpha \cap g_n = \emptyset$ und für $N > n$: $\alpha \cap f_N \subset g_N$.*

Beweis. Es sei $a \in \alpha \cap f_n$, $b \in \alpha \cap f_N$. Dann ist nach Corollar 2 zu Satz 6 $b - 1 \circ \underbrace{\cdots}_{N-n} 1 \circ a \in q_N$, also $b \in g_N$. Für $n > 1$ hätte $a \in g_n$ andererseits $p_{n-1}[a] \subset \alpha$, also $\sigma(\alpha) \leq n-1$ zur Folge.

Satz 9. *Jedes $\alpha \in \pi$ besitzt einen Repräsentanten $a \in f$, für den zugleich $\sigma(a) = \sigma(\alpha)$ und $\eta(a) = \eta(\alpha)$ ist.*

Beweis. Es sei a ein Repräsentant von α mit $\sigma(a) = N > \sigma(\alpha)$ und $\eta(a) = m = \eta(\alpha)$. Nach Satz 8 ist $\langle a \rangle_N \in g_N$, also nach Corollar 1 zu Satz 1 $\langle a \rangle_N = \sum_k a^k$, $a^k \in (g_N^k)^m$. Daraus gewinnt man den Repräsentanten $\hat{a} = \sum_k \mu_N^k a^k$ von α mit $\sigma(\hat{a}) \leq N-1$, $\eta(\hat{a}) = m$. Damit ist der Satz, durch vollständige Induktion nach N , bewiesen.

Hieraus und aus Corollar 1 zu Satz 6 folgt der

Satz 10. *Es ist $\pi_1 \cong \mathfrak{f}$. Die Ordnungen $\eta(a)$ von $a \in \mathfrak{f}$ als Element von \mathfrak{f} und als Element von π sind gleich.*

Im folgenden dürfen wir also \mathfrak{f} und π_1 identifizieren; und da aus $\eta(\alpha) = 0$ offenbar $\sigma(\alpha) = 1$, $\alpha \in \varphi$ folgt, können wir $\eta(\alpha)$ wieder zu $\zeta(\alpha)$ verfeinern.

Über die algebraische Struktur von π hat man sofort den

Satz 11. *Für $a \in \mathfrak{f}$, $\alpha \in \pi$ ist ein bilineares „tensorielles“ oder „formales Produkt“ $a \circ \alpha \in \pi$ erklärt. Für $\zeta(a) + \zeta(\alpha) \leq 0$ ist ein „inneres Produkt“ $a \cdot \alpha \in \pi$ erklärt, das mit dem tensoriellen Produkt übereinstimmt und das in \mathfrak{f} gebildete innere Produkt $a \cdot b$ zweier Distributionen $a, b \in \mathfrak{f}$ verallgemeinert. In bezug auf dieses Produkt ist π^m unitärer φ^m -Modul.*

Aus der Definition (4.6) des inneren Produktes in $\mathfrak{v}, \mathfrak{f}$ erhalten wir ferner für $\zeta(g) + \eta(a) + \eta(\alpha) \leq 0$ die Relation

$$(7.3) \quad g \cdot (a \circ \alpha) = a \circ (g \cdot \alpha),$$

die der Formel (ii₃) der Einleitung gleichwertig ist.

Satz 12. *In π ist eine lineare Ableitung erklärt, die die in \mathfrak{f} definierte verallgemeinert und der Produktregel $(a \circ \alpha)' = a' \circ \alpha + a \circ \alpha'$ genügt.*

Zum Abschluß dieses Paragraphen untersuchen wir die Beziehungen zwischen Ableitung, Stufe und Ordnung.

Satz 13. *Es ist $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha')$.*

Beweis. Offenbar ist zunächst $\sigma(\alpha') \leq \sigma(\alpha) = n$. Für $a \in \alpha \cap \mathfrak{f}_n$ ($n > 1$) ist nach Satz 8 $a \notin \mathfrak{g}_n$, nach Satz 2 also $a' \notin \mathfrak{g}_n$ und damit $\sigma(\alpha') = n$. Für $n = 1$ aber ist nichts zu beweisen.

Satz 14. *Es ist $\zeta(\alpha) = \zeta(\alpha') - 1$ und $\eta(\alpha) = \text{Max}(0, \eta(\alpha') - 1)$.*

Beweis. Für $\zeta(\alpha') \leq 0$ ist $\sigma(\alpha') = \sigma(\alpha) = 1$, die Behauptung also aus § 1 bekannt. Es bleibt also zu zeigen, daß für $\zeta(\alpha') = \eta(\alpha') > 0$ in $\eta(\alpha') \leq \eta(\alpha) + 1$ die Gleichheit gilt. Für $\sigma(\alpha) = 1$ können wir wieder auf § 1 verweisen; den allgemeinen Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach $\sigma(\alpha)$, setzen also $\sigma(\alpha) = n + 1$ voraus. Wäre nun

$$(7.4) \quad 0 < \eta(\alpha') \leq \eta(\alpha) = m$$

und wären $a \in \alpha \cap \mathfrak{f}_{n+1}$, $d \in \alpha' \cap \mathfrak{f}_{n+1}$ mit $\eta(a) = m$, $\eta(d) \leq m$, so hätte man $a' - d \in \mathfrak{q}_{n+1} \subset \mathfrak{g}_{n+1}$ und nach dem Corollar zu Satz 2 $a = b + c$ mit $b \in \mathfrak{g}_{n+1}$, $\eta(c) \leq m - 1$, also, wenn man zu π übergeht, $\alpha = \beta + \gamma$ mit $\sigma(\beta) \leq n$, $\eta(\gamma) \leq m - 1$ und

$$\eta(\beta) = \eta(\alpha - \gamma) = m,$$

$$\eta(\beta') = \eta(\alpha' - \gamma') \leq m.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist das aber für $\eta(\beta') > 0$ unmöglich, und aus $\eta(\beta') = 0$ folgte $\eta(\beta) = 0$. Also ist auch (7.4) unmöglich, w.z.b.w.

§ 8. Reduktion des tensoriellen Produktes.

Besitzen zwei Distributionen aus \mathfrak{f} in \mathfrak{f} ein inneres Produkt, so stimmt, wie wir sahen, ihr in π gebildetes tensorielles Produkt damit überein (Satz 11). Wir fragen jetzt allgemein, in welchem Maße das formale tensorielle Produkt

in \mathfrak{f} durch den Übergang zum Quotientenraum π „reduziert“ wird. Diese Frage wird weitgehend beantwortet durch den

Satz 15. *Es sei $a \in \mathfrak{f}$ mit $\zeta(a) = \eta(a) = m \geq 0$. Für $\gamma \in \pi$ gilt dann*

$$(8.1) \quad \sigma(a \circ \gamma) = \sigma(\gamma) + 1$$

außer für $\gamma \in \varphi^m$, d. h. $\zeta(a) + \zeta(\gamma) \leq 0$.

Offenbar ist wegen (2.4) stets $\sigma(a \circ \gamma) \leq \sigma(\gamma) + 1$. Wir haben also erstens zu zeigen, daß (immer unter der über a gemachten Voraussetzung)

$$(8.2) \quad \sigma(a \circ \gamma) \leq \sigma(\gamma)$$

für $\eta(\gamma) > 0$ unmöglich ist, und zweitens, daß für $\eta(\gamma) = 0$, d. h. $\gamma = g \in \varphi$, daraus $g \in \varphi^m$ folgt:

(B) *Aus $g \in \varphi$, $a \circ g \in \mathfrak{g}_2$ folgt $g \in \varphi^m$.*

Die erste Behauptung folgt aus

(A) *Für $n = 1$ ist $c \in \mathfrak{f}_n$, $\eta(c) = M > 0$, $a \circ c \in \mathfrak{g}_{n+1}$ unmöglich. Für $n \geq 2$ folgt daraus $c = d + e$ mit $d \in \mathfrak{g}_n$, $\eta(e) < M$.*

Sei nämlich $\sigma(\gamma) = n$, $c \in \gamma \cap \mathfrak{f}_n$, $\eta(\gamma) = \eta(c) = M > 0$. Dann bedeutet (8.2) nach Satz 8 $a \circ c \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Für $n = 1$ erhält man also unmittelbar die Behauptung, und für $n \geq 2$ durch Übergang zu $\pi: \gamma = \delta + \varepsilon$ mit $\sigma(\delta) < n$, $\eta(e) < M$ und $\sigma(a \circ e) \leq \sigma(\gamma) = \sigma(e) = n$, also, da für $M = 0$ nichts zu beweisen ist, durch vollständige Induktion nach M ebenfalls die Behauptung.

Wir beweisen zunächst (A) und lassen dabei vorerst auch $M = 0$ zu. Nach Voraussetzung besitzt a einen Repräsentanten (1.1) mit $f_m \notin \varphi^1$. Ist

$$c = \sum_{|u| \leq M} f_u \tilde{x}^u = \sum_{|u| \leq M} f^{(u)} \delta^u$$

ein Repräsentant von c , so hat $a \circ c$ den Repräsentanten

$$a \circ c = \sum_{|s| \leq m+M} f_{s^1} \circ f_{s^2} x^s = \sum_{|t| \leq m+M} h^{(t)} \delta^t$$

mit

$$h^{(t)} = \sum_s P_{t,s} f_{s^1} \circ f_{s^2}.$$

Für $|t| = m + M$ ist also insbesondere

$$h^{(t)} = f_m \circ \sum_{s^1, s^2} P_{t,s} f_{s^1} = \begin{cases} f_m \circ f^{(t)} & \text{für } t_1 = m, \\ 0 & \text{für } t_1 < m, \end{cases}$$

mithin nach Voraussetzung

$$(8.3) \quad \sum_{t_k=0} g^{[k,t]} - \sum_{t_k \neq 0} g^{[k,t-e_k]} + \sum_{t_k \neq 0} g^{[n+1,t-e_k]} - \\ - g^{[n+1,t-e_{n+1}]} = \begin{cases} f_m \circ f^{(t)} & \text{für } t_1 = m, \\ 0 & \text{für } t_1 < m \end{cases}$$

mit $f^{[k,t]} \in \xi[k,t]$, $g^{[k,t]} \in \varphi_{n+1}^{(k)}$. Es sei nun $\kappa: \varphi \rightarrow \varphi/\varphi_1 \rightarrow R$ eine lineare Abbildung, bei der $f_m \notin \varphi^1$ das Bild 1 hat. Wir unterwerfen (8.3) der Abbildung

$\kappa \otimes t_n : \varphi_{n+1} \rightarrow \varphi_n$ und bezeichnen das Bild von $f \in \varphi_{n+1}$ mit $\check{f} \in \varphi_n$. Das ergibt

$$(8.4) \quad \sum_{l+1 \atop t_1=0} \check{f}^{[l, t]} - \sum_{l+1 \atop t_1 \neq 0} \check{g}^{[l, t-e_1]} + \sum_{l+1 \atop t_1 \neq 0} \check{g}^{[n+1, t-e_1]} - \check{g}^{[n+1, t-e_{n+1}]} \\ = -\check{g}^{[n+1, t-e_1]} - \check{f}^{[1, t]} + \begin{cases} f^{[1]} & \text{für } t_1 = m \\ 0 & \text{für } t_1 < m, \end{cases}$$

wobei auf der rechten Seite der erste Summand nur für $t_1 \neq 0$ und der zweite Summand nur für $t_1 = \dots = t_n = 0$ auftritt.

Es sei nun erstens $n \geq 2$. Hier können wir den Summanden $-\check{f}^{[1, t]}$ weglassen, indem wir ihn einfach zu $\check{f}^{[n, t]}$ hinzuschlagen. Für $m = 0$ erhalten wir dann unmittelbar die Behauptung (A). Für $m > 0$ gewinnt man unter Benutzung des Hilfssatzes 2 wie beim Beweis von Satz 1 nacheinander für $q_1 = 0, 1, \dots, m-1$, $|q| = m + M - 1$:

$$\check{g}^{[n+1, q]} = \sum_{l+1 \atop q_1=0} \check{f}^{[l, q]} - \sum_{l+1 \atop q_1 \neq 0} \check{g}^{[l, q-e_1]}$$

mit $\check{f}^{[l, q]} \in \xi[l-1, q^1]$, $\check{g}^{[l, q]} \in \varphi_n^{(l-1)}$. Diese Gleichungen für $q_1 = m-1$ aber ergeben, in (8.4) für $t_1 = m$ eingesetzt, auch in diesem Falle die Behauptung (A).

Es sei zweitens $n = 1$. Für $m > 0$ folgte aus (8.4) $f^{[M]} \in \varphi^1$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\eta(e) = M > 0$; also muß $m = 0$ sein. In diesem Falle aber vertauschen wir die Rollen von a und e , m und M . $a \circ e \in \mathfrak{g}_2$ ist gleichbedeutend mit $e \circ a \in \mathfrak{g}_2$, und hieraus würde nach dem eben Gesagten für $M > 0$ $a \in \varphi^1$ folgen. Das widerspräche aber der Voraussetzung $\zeta(a) \geq 0$; also ist die Behauptung (A) auch für $n = 1$ richtig.

Zum Beweise der Behauptung (B) definieren wir zunächst die Zahlen A_s^k , $s = (s_1, s_2)$, $1 \leq |s| + 1 \leq k \leq m$, rekursiv durch

$$\begin{cases} A_s^{|s|+1} = \Gamma_{s+e_1}, \\ A_s^k = A_{s+e_2}^k - \Gamma_{s+e_1} A_{|s|+1, e_1}^k, \end{cases} \quad (k > |s| + 1).$$

Man findet leicht nacheinander für $|s| = l = m-1, m-2, \dots, 0$:

$$A_s^m = \sum_{k=1}^{m-l} (-1)^{m-l-k} \binom{m}{m-l-k} \Gamma_{s+ke_1}.$$

Hieraus folgt erstens

$$A_{l, e_1}^m = \sum_{k=1}^{m-l} (-1)^{m-l-k} \binom{m}{m-l-k} \binom{l+k}{k} = \sum_{k=1}^{m-l} (-1)^{m-l-k} \binom{m}{l} \binom{m-l}{k} = -(-1)^{m-l} \binom{m}{l}$$

und zweitens

$$A_{l, e_2}^m = \sum_{k=1}^{m-l} (-1)^{m-l-k} \binom{m}{m-l-k} = \sum_{k=0}^{m-l-1} (-1)^k \binom{m}{k},$$

also für $0 < l < m$

$$(8.5) \quad A_{l, e_2}^m - A_{l, e_1}^m = \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^{m-l} \binom{m-l}{m-l} \neq 0.$$

Es sei weiter $f_1, \dots, f_m \in \varphi$, $g \in \varphi^{m-l}$, $0 \leq l < m$. Wir setzen für $|s| = l$

$$(8.6) \quad e_s = \sum_{k=l+1}^m A_s^k f_k \circ g^{(k-l)},$$

ferner $e_s = 0$ für $|s| = m$. Ist auch noch $g \in \varphi^{m-(l-1)}$, so folgt für $|q| = l-1$

$$\begin{aligned} e_q &= \sum_{k=l}^m A_q^k f_k \circ g^{(k-l+1)} \\ &= \Gamma_{q+e_s} f_l \circ g' + \sum_{k=l+1}^m (A_{q+e_s}^k - \Gamma_{q+e_s} A_{l e_s}^k) (f_k \circ g^{(k-l)})'_2, \end{aligned}$$

also

$$(8.7) \quad e_q = \Gamma_{q+e_s} f_l \circ g' + (e_{q+e_s})'_2 - \Gamma_{q+e_s} (e_{l e_s})'_2.$$

Unsere Voraussetzung $a \circ g \in g_s$ schreibt sich nun nach Corollar 1 zu Satz 1 und Hilfssatz 4 für $0 \leq |s| = l \leq m$:

$$(8.8) \quad \Gamma_s h_l - \sum_{s_\alpha \neq 0} g_{s-e_\alpha}^\alpha + \sum_\alpha (g_s^\alpha)'_\alpha = \begin{cases} f_l \circ g & \text{für } s_2 = 0, \\ 0 & \text{für } s_2 \neq 0 \end{cases}$$

mit $g_s^\alpha = 0$ für $|s| = m$. Wir beweisen nacheinander für $l = m, m-1, \dots, 0$:

1) Es ist $g \in \varphi^{m-l}$.

2) Für $|s| = l$ gibt es eine Darstellung

$$(8.9) \quad \sum_\alpha (g_s^\alpha)'_\alpha = \Gamma_s (a_l - h_l) - \sum_{s_\alpha \neq 0} h_{s-e_\alpha}^\alpha + e_s$$

mit $h_q^\alpha \in \varphi_2^{(\alpha)}$ und

$$(8.10) \quad \sum_\alpha (h_q^\alpha)'_\alpha = 0.$$

Für $l = m$ ist wegen $g_s^\alpha = e_s = 0$ nichts zu beweisen; und wird die Behauptung für ein $0 < l \leq m$ als richtig angenommen, so erhält man durch Einsetzen von (8.9) in (8.8) für $|s| = l$

$$(8.11) \quad \Gamma_s a_l - \sum_{s_\alpha \neq 0} \tilde{g}_{s-e_\alpha}^\alpha + e_s = \begin{cases} f_l \circ g & \text{für } s_2 = 0, \\ 0 & \text{für } s_2 \neq 0 \end{cases}$$

mit

$$(8.12) \quad \sum_\alpha (\tilde{g}_q^\alpha)'_\alpha = \sum_\alpha (g_q^\alpha)'_\alpha.$$

Zum Beweise von 1) wenden wir auf die Gleichungen (8.11) für $s = l e_\alpha$ die Operation $\varkappa \otimes \iota_1$ an und erhalten im Falle $l = m$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m &= g, \\ \tilde{a}_m &\in \varphi^1 \end{aligned}$$

und im Falle $0 < l < m$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_l + A_{l e_\alpha}^m g^{(m-l)} &\in \varphi^1, \\ \tilde{a}_l + A_{l e_\alpha}^m g^{(m-l)} &\in \varphi^1, \end{aligned}$$

wegen (8.5) also in beiden Fällen die Behauptung $g \in \varphi^{m-l+1}$.

Hieraus folgt weiter $e_s \in \varphi_2^{(2)}$. Wir setzen

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \hat{g}_q^2 &= \tilde{g}_q^2 - e_{q+e_2}, \\ \hat{a}_i &= a_i - f_i \circ g + e_{ie_1} \end{aligned}$$

und erhalten aus (8.11)

$$\Gamma_s \hat{a}_i - \tilde{g}_{s-e_1}^1 - \hat{g}_{s-e_2}^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } s_2 = 0, \\ \Gamma_s (e_{ie_1} - f_i \circ g) & \text{für } s_2 \neq 0 \end{cases}$$

oder

$$(\tilde{g}_{s-e_1}^1 - \Gamma_{s-e_1} \hat{a}_i) + (\hat{g}_{s-e_2}^2 - \Gamma_{s-e_2} \hat{a}_i - \Gamma_s (f_i \circ g - e_{ie_1})) = 0,$$

wo der erste Summand nur für $s_1 \neq 0$ und der zweite nur für $s_2 \neq 0$ auftritt. Hieraus folgt $\hat{a}_i \in \varphi_2^{(1,2)}$; also liefert Hilfssatz 1 wie beim Beweis des Lemmas zu Satz 3 für $|q| = l-1$

$$(\hat{g}_q^1)'_1 + (\hat{g}_q^2)'_2 = \Gamma_q ((\hat{a}_i)'_1 + (\hat{a}_i)'_2) + \Gamma_{q+e_1} (f_i \circ g' - (e_{ie_1})'_2) - \sum_{q_\alpha \neq 0} h_{q-e_\alpha}^\alpha,$$

wo die $h_r^\alpha \in \varphi_2^{(3)}$ (8.10) erfüllen. Wegen (8.7), (8.12), (8.13) folgt weiter

$$\sum_\alpha (g_q^\alpha)'_\alpha = \Gamma_q ((\hat{a}_i)'_1 + (\hat{a}_i)'_2) - \sum_{q_\alpha \neq 0} h_{q-e_\alpha}^\alpha + e_q,$$

also die Behauptung 2) für $|q| = l-1$. Damit gelten 1) und 2) für alle $0 \leq l \leq m$; insbesondere ist $g \in \varphi^m$, die Behauptung (B) also bewiesen.

Aus dem hiermit bewiesenen Satz 15 folgt nun sogleich der angekündigte

Satz 16. Das Produkt $a \circ b$ zweier Distributionen $a, b \in \mathfrak{f}$ ist genau dann wieder eine Distribution aus \mathfrak{f} , wenn $\zeta(a) + \zeta(b) \leq 0$ ist, also wenn a, b in \mathfrak{f} ein inneres Produkt $a \cdot b$ besitzen. Beide Produkte stimmen dann überein.

Denn für $\zeta(a) = \eta(a) = m \geq 0$ muß nach Satz 15 $b \in \varphi^m$ sein, ebenso für $\zeta(b) = \eta(b) = m \geq 0$ wegen der Symmetrie von g_2 notwendig $a \in \varphi^m$. Dann bleibt aber nur noch der triviale Fall $\zeta(a), \zeta(b) < 0$.

Kapitel 2: Betrachtung im Großen.

§ 9. Distributionen.

In diesem Paragraphen benötigen wir von Kapitel 1 dieser Arbeit nur den Inhalt des § 1.

Es sei Ω eine offene Punktmenge der reellen Achse R . Die Definition des Raumes \mathfrak{F} der „(verallgemeinerten) Distributionen von Ω “ in [K], § 3 und der damalige Satz 16 ergeben den folgenden Zusammenhang zwischen \mathfrak{F} und dem in § 1 dieser Arbeit definierten Raum \mathfrak{f} der „(verallgemeinerten) Distributionen endlicher Ordnung“:

1) Die Restriktion einer Distribution $S \in \mathfrak{F}$ auf ein relativ zu Ω kompaktes offenes Intervall U ist dort eine Distribution endlicher Ordnung $S_U \in \mathfrak{f}$.

2) Ist in einer gewissen, relativ zu Ω kompakten offenen Umgebung U_x eines jeden Punktes $x \in \Omega$ eine Distribution endlicher Ordnung $a_x \in \mathfrak{f}_x$ gegeben und sind für alle $x, y \in \Omega$ mit $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ die Restriktionen von a_x, a_y auf

diesen Durchschnitt gleich, so gibt es eine eindeutig bestimmte Distribution $S \in \mathfrak{F}$, deren Restriktion S_x auf U_x für jedes $x \in \Omega$ mit a_x übereinstimmt.

Das heißt also, daß wir die Distribution aus \mathfrak{F} und die Struktur von \mathfrak{F} durch ein solches „Zusammensetzen“ von Distributionen endlicher Ordnung aus \mathfrak{f} definieren können.

Wir setzen

$$(9.1) \quad \eta_x(S) = \inf_{x \in U} \eta(S_U), \quad \zeta_x(S) = \inf_{x \in U} \zeta(S_U),$$

wo U alle relativ zu Ω kompakten offenen Umgebungen von x durchläuft. $\zeta_x(S)$ kann also wieder den Wert $-\infty$ annehmen, und das natürlich auch dann, wenn alle $\zeta(S_U)$ endlich sind. Für eine Punktmenge $A \subset \Omega$ sei weiter

$$(9.2) \quad \eta_A(S) = \sup_{x \in A} \eta_x(S), \quad \zeta_A(S) = \sup_{x \in A} \zeta_x(S),$$

insbesondere

$$(9.3) \quad \eta(S) = \eta_\Omega(S), \quad \zeta(S) = \zeta_\Omega(S),$$

endlich oder unendlich. Für alle diese Größen gilt wieder (1.2). Die Distributionen S mit $\eta_x(S) \leq m_x$ bzw. $\eta(S) \leq m$ bilden einen Unterraum \mathfrak{F}^{m_x} bzw. \mathfrak{F}^m von \mathfrak{F} . $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}^0$ ist isomorph. zum Raum Φ der Klassen von in Ω definierten und dort fast überall gleichen reellen Funktionen. Φ^{m_x} bzw. Φ^m bzw. Φ^∞ sei der von allen „Funktionen“ g mit $\zeta_x(g) \leq -m_x$ bzw. $\zeta(g) \leq -m$ bzw. $\zeta(g) = -\infty$ gebildete Unterraum von Φ .

Für zwei Distributionen S, T mit $\zeta_x(S) + \zeta_x(T) \leq 0$ ist wieder ein „inneres Produkt“ $S \cdot T \in \mathfrak{F}$ erklärt, das das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen verallgemeinert. Wählen wir nämlich zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung U_x , in der $\zeta(S_x) + \zeta(T_x) \leq 0$ gilt, so erfüllen die in den zugehörigen \mathfrak{f}_x nach § 1 gebildeten inneren Produkte $S_x \cdot T_x$ die Voraussetzung von 2) und definieren mithin eine eindeutig bestimmte Distribution $S \cdot T$ ⁵⁾. Insbesondere ist $S \cdot T$ also für $\zeta(S) + \zeta(T) \leq 0$ erklärt. In bezug auf dieses Produkt ist \mathfrak{F}^{m_x} unitärer Φ^{m_x} -Modul, \mathfrak{F}^m unitärer Φ^m -Modul und \mathfrak{F} unitärer Φ^∞ -Modul.

Für die in analoger Weise in \mathfrak{F} definierte Ableitung gibt es wieder die Regeln (1.4), (1.5), (1.9).

§ 10. Der Raum II.

Den in der Einleitung und im vorigen Paragraphen charakterisierten Zusammensetzungsprozeß führen wir jetzt von den Elementen des Raumes π aus durch.

Ist jedem Punkte $x \in \Omega$ eine relativ zu Ω kompakte offene Umgebung U_x und dort ein Element $\alpha_x \in \pi_x$ zugeordnet mit der Eigenschaft, daß für alle $x, y \in \Omega$ mit $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ die Restriktionen von α_x, α_y auf diesen Durchschnitt übereinstimmen, so fassen wir diese Größen zu einem System $\{U_x, \alpha_x\}$ zusammen. Zwei Systeme $\{U_x^1, \alpha_x^1\}, \{U_x^2, \alpha_x^2\}$ heißen äquivalent, wenn α_x^1, α_x^2 in

⁵⁾ Diese allgemeinere „lokale“ Definition des inneren Produktes wurde für die SCHWARTZschen Distributionen schon von I. HALPERIN ([H], § 7) gegeben.

einer gewissen Umgebung $U_x \subset U_x^1 \cap U_x^2$ eines jeden Punktes $x \in \Omega$ übereinstimmen⁶⁾. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und teilt also die Menge der genannten Systeme in Klassen ein. Der Bereich Π dieser Klassen $A = \langle U_x, \alpha_x \rangle$, $B = \langle U_x, \beta_x \rangle$, ... wird durch die (wie alle folgenden offenbar vom Repräsentanten unabhängige) Definition

$$rA + sB = \langle U_x \cap V_x, r\alpha_x + s\beta_x \rangle$$

wieder zu einem R -Vektorraum.

Analog zu (9.1) setzen wir

$$(10.1) \quad \sigma_x(A) = \inf \sigma(\alpha_x), \quad \eta_x(A) = \inf \eta(\alpha_x), \quad \zeta_x(A) = \inf \zeta(\alpha_x),$$

wo $\sigma(\alpha_x)$, $\eta(\alpha_x)$, $\zeta(\alpha_x)$ in U_x und die unteren Grenzen für alle Repräsentanten $\{U_x, \alpha_x\}$ zu nehmen sind. Wie in (9.2), (9.3) definieren wir weiter $\sigma_\Delta(A)$, $\eta_\Delta(A)$, $\zeta_\Delta(A)$ für $\Delta \subset \Omega$ und $\sigma(A)$, $\eta(A)$, $\zeta(A)$. Für alle diese Größen gilt wieder (2.3) bzw. (1.2). Die von den Elementen A mit $\sigma_x(A) \leq n_x$ bzw. $\sigma(A) \leq n$ bzw. $\eta_x(A) \leq m_x$ bzw. $\eta(A) \leq m$ gebildeten Unterräume von Π bezeichnen wir mit Π_{n_x} bzw. Π_n bzw. Π^{m_x} bzw. Π^m .

Jeder Punkt $x \in \Omega$ besitzt eine Umgebung, in der $\sigma_v(A) \leq \sigma_x(A)$ und $\eta_v(A) \leq \eta_x(A)$ ist. Hieraus folgt mit Hilfe des BORELSCHEN Überdeckungssatzes der

Satz 17. Für ein relativ zu Ω kompaktes Δ sind $\sigma_\Delta(A)$ und $\eta_\Delta(A)$ endlich.

Aus Satz 10 und den Tatsachen 1), 2) des vorigen Paragraphen folgt weiter der

Satz 18. Es ist $\Pi_1 \cong \mathfrak{F}$. Die Ordnungen $\eta_x(S)$, $\zeta_x(S)$ usw. von $S \in \mathfrak{F}$ als Element von \mathfrak{F} und als Element von Π sind gleich.

Jede Distribution $S \in \mathfrak{F}$ bestimmt nämlich nach 1) zunächst ein eindeutiges Bild $\langle U_x, S_x \rangle \in \Pi_1$. Sei umgekehrt $A \in \Pi_1$ mit den Repräsentanten $\{U_x^i, \alpha_x^i\}$, $\sigma(\alpha_x^i) = 1$ ($i = 1, 2$). Diese Systeme bestimmen nach 2) eindeutig zwei Distributionen S^i , und diese beiden stimmen, da ihre Differenz in einer hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes von Ω die Restriktion Null hat, wiederum nach 2) überein. A bestimmt also eindeutig eine Distribution S , die ihrerseits offenbar wieder A als Bild hat. Diese Zuordnung ist natürlich ein Isomorphismus, und der Rest der Behauptung folgt unmittelbar aus (9.1), (10.1).

Im folgenden dürfen wir also \mathfrak{F} und Π_1 identifizieren und direkt $S = \langle U_x, S_x \rangle$ schreiben.

Über die algebraische Struktur von Π liefern die Sätze 11, 12, 15 und 16 die folgenden Resultate:

Satz 19. Durch

$$(10.2) \quad S \circ A = \langle U_x, S_x \circ \alpha_x \rangle$$

wird für $S \in \mathfrak{F}$, $A \in \Pi$ ein bilineares „tensorielles“ oder „formales Produkt“

⁶⁾ Daraus folgt, anders wie bei f, nicht, daß α_x^1, α_x^2 im ganzen Durchschnitt $U_x^1 \cap U_x^2$ übereinstimmen. Es sei z. B. $U_x^1 = U_x^2$ beliebig, aber zwei feste Punkte a, b enthaltend, und $\alpha_x^1 = 0$, $\alpha_x^2 = \delta_{(a)} \circ \delta_{(b)}$, wo $\delta_{(x)}$ die DIRAC-Distribution in bezug auf den Punkt x bedeutet.

erklärt. Durch

$$(10.3) \quad S \cdot A = \langle U_x, S_x \alpha_x \rangle$$

wird für $\zeta_x(S) + \zeta_x(A) \leq 0$ ein „inneres Produkt“ erklärt, das mit dem tensoriellen Produkt übereinstimmt und das in \mathfrak{F} gebildete innere Produkt $S \cdot T$ zweier Distributionen $S, T \in \mathfrak{F}$ verallgemeinert. In bezug auf dieses Produkt ist $\Pi^{m,x}$ unitärer $\Phi^{m,x}$ -Modul, Π^m unitärer Φ^m -Modul und Π unitärer Φ^∞ -Modul.

Satz 20. Allgemein ist $\sigma_x(S \circ A) \leq \sigma_x(A) + 1$. Das Gleichheitszeichen gilt für $\zeta_x(S) + \zeta_x(A) \leq 0$ nie und für $\zeta_x(S) + \zeta_x(A) > 0$, $\zeta_x(S) \geq 0$ immer.

Satz 21. Das Produkt

$$(10.4) \quad S \circ T = \langle U_x, S_x \circ T_x \rangle$$

zweier Distributionen $S, T \in \mathfrak{F}$ ist genau dann wieder eine Distribution, wenn $\zeta_x(S) + \zeta_x(T) \leq 0$ ist, also wenn S, T in \mathfrak{F} ein inneres Produkt $S \cdot T$ besitzen. Beide Produkte stimmen dann überein.

Zur Berechnung des inneren Produktes erhalten wir aus (7.3) für $\zeta_x(g) + \eta_x(S) + \eta_x(A) \leq 0$ die Relation

$$(10.5) \quad g \cdot (S \circ A) = S \circ (g \cdot A),$$

die wieder der Formel (II₃) der Einleitung gleichwertig ist.

Aus den Sätzen 12, 13, 14 folgt schließlich:

Satz 22. Durch $A' = \langle U_x, \alpha'_x \rangle$ wird in Π eine lineare Ableitung erklärt, die die in \mathfrak{F} definierte verallgemeinert und der Produktregel $(S \circ A)' = S' \circ A + S \circ A'$ genügt.

Satz 23. Es ist $\sigma_x(A) = \sigma_x(A')$ sowie $\zeta_x(A) = \zeta_x(A') - 1$ und $\eta_x(A) = \max(0, \eta_x(A') - 1)$.

Mit A' ist also auch stets A eine Distribution. Insbesondere folgt aus $A' = 0$, daß A eine Konstante ist, usw.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einigen einfachen Beispielen.

1) Es sei $Y = Y(x)$ die HEAVISIDESCHE Sprungfunktion, die für negatives x den Wert 0 und für positives x den Wert 1 hat, sowie $\delta = Y'$ die DIRAC-Distribution in bezug auf den Nullpunkt. Nach Satz 21 sind dann $Y \circ \delta$, $\delta \circ Y$, $\delta^2 = \delta \circ \delta$ usw. keine Distributionen. Durch Differentiation von $Y = Y^2$ folgt jedoch $\delta = \delta \circ Y + Y \circ \delta$; hieraus schließt man weiter $\delta \circ Y \neq Y \circ \delta$.

2) Aus Satz 21 folgt, daß $\frac{1}{x} \circ \delta, \delta \circ \frac{1}{x}$ keine Distributionen sind; desgleichen, wenn man $\frac{1}{x}$ durch $\text{Pf. } \frac{1}{x} = (\log|x|)'$ ersetzt. Aus (10.5) folgt jedoch

$$\frac{1}{x} \circ x \circ \delta = x \circ \frac{1}{x} \circ \delta = \frac{1}{x} \circ \delta \circ x = 0,$$

$$\delta \circ \frac{1}{x} \circ x = \delta \circ x \circ \frac{1}{x} = x \circ \delta \circ \frac{1}{x} = \delta.$$

3) Nach (10.5) ist weiter für $m = 1, 2, \dots$

$$x \circ \delta^m = \delta \circ (x \circ \delta^{m-1}) = \dots = 0,$$

ebenso für $r + 1 > m$

$$|x|^r \circ \delta^m = \delta \circ (|x|^r \circ \delta^{m-1}) = \dots = 0.$$

Alle diese Gleichungen kann man mehr oder weniger plausibel machen, indem man δ^m durch die m -ten Potenzen f_j^m von Funktionen f_j „approximiert“, die im Sinne der Theorie der Distributionen gegen δ konvergieren.

§ 11. Beweis der Forderungen (IV).

Beim Übergang von Ω zu einer offenen Teilmenge Δ besitzt jedes Element $A = \langle U_x, \alpha_x \rangle = \langle U_x, \alpha_x \rangle_{x \in \Omega}$ aus Π in Π_Δ eine wohlbestimmte Restriktion auf Δ , nämlich $A_\Delta = \langle U_x \cap \Delta, \alpha_x \rangle = \langle U_x \cap \Delta, \alpha_x \rangle_{x \in \Delta}$. Die Forderung (IV₁) der Einleitung ist offenbar erfüllt. — Der Einfachheit halber lassen wir den Index Δ im folgenden wieder fort.

In U_y ist insbesondere, mit der Definition (10.2),

$$A = \langle U_x \cap U_y, \alpha_x \rangle = \langle U_x \cap U_y, \alpha_y \rangle = \alpha_y.$$

Wir haben also den

Satz 24 (Minimaleigenschaft). *Die Restriktion eines Elementes $A \in \Pi$ auf eine hinreichend kleine Umgebung eines jeden Punktes von Ω ist dort eine endliche Summe von Produkten endlich vieler Distributionen endlicher Ordnung.*

Es gilt weiter das

Lemma. *Ist die Restriktion von $A \in \Pi$ auf eine gewisse Umgebung $\Omega_y \subset \Omega$ eines jeden Punktes $y \in \Omega$ Null, so ist auch $A = 0$.*

Denn in Ω_y ist $A = \langle U_x \cap \Omega_y, \alpha_x \rangle$. Nach Voraussetzung ist also insbesondere α_y in einer gewissen Umgebung $V_y \subset U_y \cap \Omega_y$ von y Null. Daraus folgt $A = \langle V_x, \alpha_x \rangle = 0$, w.z.b.w.

Satz 25 (Lokalisationsprinzip). *Ist in einer gewissen Umgebung $\Omega_y \subset \Omega$ eines jeden Punktes $y \in \Omega$ ein Element $A^y \in \Pi_y$ gegeben und sind für alle $y, z \in \Omega$ mit $\Omega_y \cap \Omega_z \neq \emptyset$ die Restriktionen von A^y, A^z auf diesen Durchschnitt gleich, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $A \in \Pi$, dessen Restriktion auf Ω_y für jedes $y \in \Omega$ mit A^y übereinstimmt.*

Beweis. Daß $A \in \Pi$ mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist, folgt aus dem eben bewiesenen Lemma; es braucht also nur noch die Existenz eines solchen A gezeigt zu werden. — Ferner brauchen wir von A nur nachzuweisen, daß es in einer evtl. kleineren Umgebung $V_y \subset \Omega_y$ eines jeden $y \in \Omega$ mit A^y übereinstimmt. Für jedes $z \in \Omega_y$ sind dann nämlich in $V_z \cap \Omega_y$ sowohl A und A^z als auch A^y und A^z , mithin auch A und A^y einander gleich; nach dem Lemma, angewandt auf Ω_y , stimmen A und A^y also auch hier überein.

Es sei nun $A^y = \langle U_x^y, \alpha_x^y \rangle$. Für $z \in U_y^y$ ist in $U_y^y \cap U_z^y$ also $\alpha_y^y = \alpha_z^y$. Im Durchschnitt $\Omega_y \cap \Omega_z$ ist weiter

$$A^y - A^z = \langle U_x^y \cap U_z^y, \alpha_x^y - \alpha_x^z \rangle,$$

in einer gewissen, in $U_x^y \cap U_z^y$ enthaltenen Umgebung von z also $\alpha_z^y = \alpha_z^z$. Insgesamt ist für $z \in U_y^y$ in einer gewissen, von y abhängigen Umgebung $V_z^y \subset U_y^y \cap U_z^y$ von z folglich $\alpha_y^y = \alpha_z^z$.

Die Intervalle U_y^y sind relativ zu Ω kompakt und bilden eine offene Überdeckung von Ω . Aus ihnen wählen wir eine lokal endliche Überdeckung $\{U_{y_k}^y\}$ ($k = 1, 2, \dots$) aus. $\{U_k\}$ sei eine feinere lokal endliche Überdeckung:

$U_k \subset U_{y_k}^{y_k}$, und $\{f_k\}$, $f_k \in \Phi^\infty$ eine zu $\{U_k\}$ gehörige Teilung der Einheit. Bei festem $y \in \Omega$ gilt dann für fast alle k $U_y^y \subset \mathfrak{C} U_{y_k}^{y_k} \subset \mathfrak{C} \bar{U}_k$, also $\mathfrak{C} \bar{U}_k \cap U_y^y = U_y^y$, und nur für endlich viele k ist $y \in \bar{U}_k$. Zu jedem $y \in \Omega$ ist also

$$W_y = \bigcap_{\substack{k \\ y \in \bar{U}_k}} U_{y_k}^{y_k} \cap \bigcap_{\substack{k \\ y \notin \bar{U}_k}} (\mathfrak{C} \bar{U}_k \cap U_y^y) \subset U_y^y$$

eine offene Umgebung. Hierin verschwinden alle f_k mit $y \notin \bar{U}_k$, es ist also

$$(11.1) \quad \sum_{\substack{k \\ y \in \bar{U}_k}} f_k = 1.$$

In W_y setzen wir nun

$$\alpha_y = \sum_{\substack{k \\ y \in \bar{U}_k}} f_k \cdot \alpha_{y_k}^{y_k}$$

und haben im Durchschnitt $W_y \cap W_z$

$$\alpha_y = \alpha_z = \sum_{\substack{k \\ y, z \in \bar{U}_k}} f_k \cdot \alpha_{y_k}^{y_k}.$$

Wir setzen daher $A = \langle W_x, \alpha_x \rangle$ und haben in

$$V_y = W_y \cap \bigcap_{\substack{k \\ y \in \bar{U}_k}} V_{y_k}^{y_k} \subset U_y^y$$

nach dem im zweiten Absatz des Beweises Gesagten

$$\alpha_y - \alpha_y^y = \sum_{\substack{k \\ y \in \bar{U}_k}} f_k \cdot (\alpha_{y_k}^{y_k} - \alpha_y^y) = 0$$

und folglich

$$\begin{aligned} A - A^y &= \langle W_x \cap V_y, \alpha_x \rangle - \langle U_x^y \cap V_y, \alpha_x^y \rangle \\ &= \langle U_x^y \cap W_x \cap V_y, \alpha_y - \alpha_y^y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Damit ist, nach den Bemerkungen des ersten Absatzes, der Beweis des Satzes erbracht.

Corollar. *Es ist*

$$\sigma_y(A) = \sigma_y(A^y), \quad \eta_y(A) = \eta_y(A^y), \quad \zeta_y(A) = \zeta_y(A^y).$$

Sind alle A^y Distributionen, so ist auch A eine Distribution.

Nach Satz 25 (übrigens schon nach dem vorangehenden Lemma) besitzt jedes $A \in \Pi$ eine (evtl. leere) maximale offene Teilmenge von Ω , in der es Null ist. Deren Komplement in Ω nennen wir den „Träger“ $T(A)$ von A ⁷⁾. $x \in T(A)$ bedeutet also, daß A in keiner Umgebung von x Null ist. $T(A)$ ist in Ω abgeschlossen.

Satz 26. *Der Träger von $S \circ A$ ist im Durchschnitt der Träger von S und von A enthalten: $T(S \circ A) \subset T(S) \cap T(A)$.*

⁷⁾ In Übereinstimmung mit [S] I, S. 27f. Vgl. daselbst S. 116, Théorème I.

§ 12. Beweis der Forderung (V).

Zum Abschluß beweisen wir den angekündigten

Satz 27. *Erfüllt \mathfrak{P} die Forderungen (I)–(IV) der Einleitung, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von Π auf \mathfrak{P} , die alle Distributionen fest läßt und ein Homomorphismus in bezug auf die Multiplikation mit einer Distribution, in bezug auf die Ableitung und auf die Restriktion des Definitionsbereiches ist.*

Beweis. Wir brauchen nur die Existenz einer Abbildung mit den verlangten Eigenschaften zu zeigen. Hat nämlich $A \in \Pi$ bei zwei solchen Abbildungen die Bilder $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}^2 \in \mathfrak{P}$, so stimmen beide wegen Satz 24 in einer hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes von Ω überein, und nach (IV₃) ist folglich $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^2$.

Es sei nun zunächst U ein relativ zu Ω kompaktes offenes Intervall. Wie in der Einleitung folgt aus (III₂), (IV₁), daß die kanonische Abbildung der Tensoralgebra \mathfrak{f}_U in \mathfrak{P}_U die im Satz genannten Eigenschaften hat (wenn man sich auf Distributionen endlicher Ordnung beschränkt). Wegen (II) haben bei dieser Abbildung alle Elemente der Form (7.1) und also alle Elemente von \mathfrak{P}_U das Bild Null. Wir erhalten somit auch eine lineare Abbildung von π_U in \mathfrak{P}_U mit denselben Eigenschaften.

Es sei weiter $A \in \Pi$, mit den Repräsentanten $\{U_x^i, \alpha_x^i\}$ ($i = 1, 2$). Bei der eben genannten Abbildung gehe $\alpha_x^i \in \pi_x^i$ in $\mathfrak{A}_x^i \in \mathfrak{P}_x^i$ über. Nach (IV₃) bestimmen die \mathfrak{A}_x^i eindeutig je ein Element $\mathfrak{A}^i \in \mathfrak{P}$. In einer hinreichend kleinen Umgebung $U_x \subset U_x^1 \cap U_x^2$ eines jeden Punktes $x \in \Omega$ stimmen aber die α_x^i und folglich die \mathfrak{A}_x^i und die \mathfrak{A}^i überein; wiederum nach (IV₃) ist also $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^2$, und $A \in \Pi$ besitzt ein eindeutig bestimmtes Bild $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$. Von dieser Abbildung brauchen wir offenbar nur noch zu zeigen, daß umgekehrt auch jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ mindestens ein Urbild $A \in \Pi$ besitzt.

Hierzu wählen wir zu jedem Punkte $y \in \Omega$ eine relativ zu Ω kompakte offene Umgebung U_y^y , in der wir die Restriktion von \mathfrak{A} auf Grund von (IV₂) als endliche Summe von Produkten endlich vieler Distributionen endlicher Ordnung schreiben können. Dadurch wird uns ein Element $\alpha_y^y \in \pi_y^y$ geliefert, das bei der obigen Abbildung in U_y^y in diese Restriktion von \mathfrak{A} übergeht. Wie beim Beweise von Satz 25 wählen wir aus den U_y^y jetzt eine lokal endliche Überdeckung $\{U_{y_k}^{y_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) von Ω aus, ferner eine feinere lokal endliche Überdeckung $\{U_k\}$ und eine zugehörige Teilung der Einheit $\{f_k\}$, schließlich zu jedem Punkte $y \in \Omega$ die Umgebung $W_y \subset U_y^y$. In W_y setzen wir

$$\alpha_y = \sum_{k \in \bar{U}_k} f_k \circ \alpha_{y_k}^{y_k}$$

und erhalten in $W_y \cap W_z$ wieder $\alpha_y = \alpha_z$. Wegen (11.1) und (II) geht α_y in W_y in die Restriktion von \mathfrak{A} über, das Element $A = \langle W_y, \alpha_y \rangle$ aus Π hat also das Bild $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[B] N. BOURBAKI: *Eléments de Mathématique*. Livre II, Chap. III: Algèbre multilinéaire. Actual. sci. industr. **1044** (1947). — [H] I. HALPERIN: Introduction to the theory of distributions. Based on lectures by L. SCHWARTZ, Toronto 1952. — [K] H. KÖNIG: Neue Begründung der Theorie der „Distributionen“ von L. SCHWARTZ. Math. Nachr. **9** (1953), 129–148. — [S] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions* I, II. Actual. sci. industr. **1091** (1950), **1122** (1951).

(Eingegangen am 8. Juni 1954.)

Zur Realisierung Riemannscher Flächen.

Von

HORST TIETZ in Braunschweig.

§ 1. Problemstellung.

Eine Riemannsche Fläche wird durch eine auf ihr eindeutige Funktion eineindeutig und konform abgebildet auf eine Überlagerungsfläche der Ebene; wir wollen sagen, daß diese konkrete Riemannsche Fläche jene gegebene *realisiert*. Eine Realisierung mit besonderen Eigenschaften ist also gleichbedeutend mit der Existenz einer Funktion von entsprechendem Verhalten.

Während eine Riemannsche Fläche nur dann durch schlichte Gebiete realisierbar ist, wenn sie das Geschlecht Null hat¹⁾, kann man nach Realisierungen einer Fläche von höherem Geschlecht fragen, durch die wenigstens eine vorgegebene schlichtartige Teilfläche schlicht realisiert wird. Diese Frage ist ein Beispiel zu folgendem allgemeinen

Problem: *F* sei eine Riemannsche Fläche und \mathfrak{M} eine Punktmenge auf *F*. Gibt es auf *F* Funktionen, die auf \mathfrak{M} eine vorgeschriebene Eigenschaft *E* besitzen?

Es wird ein Prinzip angegeben, das in manchen Fällen die aufgeworfene Frage zu bejahen gestattet; es ist eine einfache Anwendung der allgemeinen Approximationssätze, die man den Herren BEHNKE und STEIN²⁾ verdankt.

Zuvor seien einige Bezeichnungen und Begriffe eingeführt, die z. T. mit denjenigen in (BS) übereinstimmen.

Wir reden von einer *Teilfläche* F' der Riemannschen Fläche *F*, wenn F' eine offene Punktmenge ist, die aus endlich vielen Komponenten (maximalen zusammenhängenden Punktmenge) besteht. Wenn die Punktmenge *A* in F' kompakt ist, schreiben wir $A \subseteq F'$. Auf *F* ist die Teilfläche F' *relativ einfach zusammenhängend*, wenn jedes endliche System in F' gelegener geschlossener Kurven, das in *F* berandet, schon in F' berandet.

Funktionen sollen in ihrem Definitionsbereich (der in endlich viele Komponenten zerfallen darf) stets eindeutig analytisch und bis auf endlich viele Pole regulär sein. Wenn eine Funktion auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche nur eine Polstelle besitzt, soll sie *Elementarfunktion* heißen.

Eine Aussage über Funktionen ist auf einer Punktmenge *A* gültig, wenn sie noch auf der im Definitionsbereich der Funktionen gebildeten abgeschlossenen Hülle von *A* besteht.

Eine Funktion ist auf der Punktmenge *A* ihres Definitionsbereiches *k*-wertig, wenn sie auf *A* jeden Wert höchstens *k*-mal annimmt.

¹⁾ Die Uniformisierung durch mehrdeutige Funktionen ist keine Realisierung im obigen Sinne.

²⁾ H. BEHNKE und K. STEIN: Entwicklung analytischer Funktionen auf RIEMANNschen Flächen. Math. Ann. 120, 430—461 (1948); diese Arbeit wird hier mit (BS) zitiert.

In § 4 werden wir zwei verschiedene Zerschneidungen einer geschlossenen Riemannschen Fläche F betrachten. Ein volles System C nichtzerlegender punktfremder Jordankurven auf F bezeichnen wir kurz als R-System: $F - C$ ist schlichtartig. Führen wir noch, unter Vermeidung unnötiger Doppelpunkte, von einem weiteren Punkt von F aus die konjugierten Schnitte zu einem R-System, so erhalten wir in der Gesamtheit der Schnittpaare ein RP-System Γ ; $F - \Gamma$ ist einfach zusammenhängend.

Mit $E_{\mathfrak{M}}(F)$ bezeichnen wir die Klasse derjenigen Funktionen von F , welche auf \mathfrak{M} die Eigenschaft E besitzen. — Unser Problem verlangt also, festzustellen, ob $E_{\mathfrak{M}}(F)$ nicht-leer ist, und es erscheint interessant jedenfalls dann, wenn $E_F(F)$ selbst leer ist.

§ 2. Ein Lösungsprinzip.

Die zu entwickelnde Methode besteht in der Umkehrung einer bekannten Schlußweise: anstatt aus den Eigenschaften einer Funktionenfolge auf Eigenschaften der Grenzfunktionen zu schließen, werden hier aus dem Verhalten einer vorgegebenen Funktion Aussagen über dasjenige von Näherungsfunktionen gewonnen, und diese Aussagen sind für uns wertvoll, weil es nach (BS) Näherungsfunktionen gibt, deren Definitionsbereich denjenigen der Grenzfunktion umfaßt, falls diese nicht auf der ganzen Riemannschen Fläche erklärt ist.

Bemerkung: In (BS) werden die Ergebnisse nur für offene Riemannsche Flächen formuliert. Sie gelten aber samt den Beweisen auch für geschlossene Riemannsche Flächen, wenn man für die Näherungsfunktionen noch eine beliebig gewählte zusätzliche Polstelle zuläßt; das erkennt man, wenn man in der Cauchyschen Integralformel, die den Ausgangspunkt von (BS) bildet, anstelle des dort benutzten $A(\zeta, z) d\zeta$ ein Elementardifferential verwendet, das in z außer dem Pol ζ nur eine beliebig gewählte Polstelle besitzt; solche Elementardifferentiale sind in allgemeinsten Form von Herrn RÖHRL³⁾ angegeben worden.

Satz 1: $E_{\mathfrak{M}}(F)$ ist nicht leer, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a) es ist $\mathfrak{M} \subset F$, und es gibt zwei Teilflächen F_0 und F_1 mit $\mathfrak{M} \subset F_0 \subset F_1 \subset F$, so daß $E_{F_0}(F_1)$ reguläre Funktionen enthält,
- b) die Eigenschaft E ist stetig in dem Sinne, daß es zu jedem regulären $f \in E_{F_0}(F_1)$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, derart, daß $f_s \in E_{\mathfrak{M}}(F_0)$ aus $|f_s - f| < \varepsilon$ auf F_0 folgt.

Beweis: Sei f eine reguläre Funktion aus $E_{F_0}(F_1)$. Nach (BS) und obiger Bemerkung kann f auf F_0 gleichmäßig durch Funktionen auf F approximiert werden. Zu sei $\varepsilon > 0$ nach (b) gewählt und f_s eine Funktion auf F mit $|f_s - f| < \varepsilon$ auf F_0 ; nach (b) gilt dann $f_s \in E_{\mathfrak{M}}(F_0)$ und, da f_s auf ganz F erklärt ist, sogar $f_s \in E_{\mathfrak{M}}(F)$.

Zusatz: Falls F_1 relativ zu F einfach zusammenhängend gewählt werden kann, enthält $E_{\mathfrak{M}}(F)$ Funktionen, die auf F sogar überall regulär sind, falls F offen ist, und Elementarfunktionen mit beliebiger Polstelle, falls F geschlossen ist.

³⁾ H. RÖHRL: Die Elementartheoreme der Funktionenklassen auf algebraischen Flächen. Math. Nachr. 7, 65—84 (1952).

Diese Aussage ist enthalten in (BS), Satz 6, für ein offenes F ; falls F geschlossen ist, folgt sie aus dem Beweis dieses Satzes unter Berücksichtigung obiger Bemerkung.

Hilfssatz 1: F_1 ist dann und nur dann relativ zu F einfach zusammenhängend, wenn

- a) F offen ist, und $F - F_1$ keine kompakte Komponente enthält; das ist insbesondere dann der Fall, wenn F_1 kompakt und $F - F_1$ zusammenhängend ist;
 b) F geschlossen und $F - F_1$ zusammenhängend ist.

Beweis: Zu a). $F - F_1$ enthalte eine kompakte Komponente F' . Der Rand C' von F' ist im Rand von F_1 enthalten. Würde C' auch in F_1 einen kompakten Teil F'_1 beranden, so wäre $F' + F'_1$ kompakt und randlos und daher mit F identisch, das entgegen der Voraussetzung geschlossen wäre. Ein in F_1 zu C' hinreichend benachbartes Kurvensystem berandet also auf F , aber nicht auf F_1 , und F_1 ist relativ zu F mehrfach zusammenhängend.

Nun sei C ein Kurvensystem in F_1 , das auf F , aber nicht auf F_1 berandet. Es gibt also ein nicht in F_1 enthaltenes kompaktes F'' , dessen Rand C ist. Der Durchschnitt $F'' = (F - F_1) \cap F'$ ist nicht leer und ebenfalls kompakt. Der Rand C'' von F'' ergibt sich zu

$$C'' = \text{Rand } (F - F_1) \cap F' + (F - F_1) \cap \text{Rand } F';$$

wegen $\text{Rand } F' = C \in F_1$ verschwindet der letzte Summand, und C'' ist im Rand von $F - F_1$ enthalten; also enthält $F - F_1$ den kompakten Teil F'' , der innerhalb $F - F_1$ keinen Randpunkt besitzt. Jede Komponente von F'' ist daher eine kompakte Komponente von $F - F_1$.

Sei insbesondere F_1 kompakt, dann ist $F - F_1$ nicht kompakt; ist letzteres überdies zusammenhängend, so enthält es auch keine kompakte Komponente.

Zu b). $F - F_1$ sei nicht zusammenhängend, enthalte also zwei Komponenten F' und F'' . Ist C in F_1 ein zum Rand von F' hinreichend benachbartes Kurvensystem, so ist es der Rand einer Komponente \bar{F}' von F , die F' enthält; C ist aber auch der Rand von $F - F' = \bar{F}''$, in welchem F'' enthalten ist. C berandet also auf F , aber nicht auf F_1 .

$F - F_1$ sei zusammenhängend und $C \in F_1$ ein auf F berandendes endliches Kurvensystem. $F - C$ zerfällt also in eine endliche Anzahl von Komponenten, von denen eine, etwa F' , ganz $F - F_1$ enthalten muß; die übrigen, deren Summe F'' sei, liegen also alle in F_1 , und C berandet auf F_1 die Teilfläche F'' .

§ 3. Anwendung auf k -Wertigkeit.

Sei $F_0 \subset F$ und f eine auf F_0 reguläre Funktion; weiter sei f_ε eine auf F_0 gleichmäßige ε -Approximation von f . Mit $f(G)$ bzw. $f_\varepsilon(G)$ bezeichnen wir das Bild, das von der Punktmenge $G \subset F_0$ durch f bzw. f_ε in der Wertebene entworfen wird.

Hilfssatz 2: Zu jeder Punktmenge $\mathfrak{G} \subset f(F_0)$ gibt es ein $\varepsilon(\mathfrak{G}) > 0$, derart, daß f_ε und f für $\varepsilon < \varepsilon(\mathfrak{G})$ auf F_0 jeden Wert aus \mathfrak{G} gleich oft annehmen.

Beweis⁴⁾: Wegen $\mathfrak{G} \subset f(F_0)$ und der Gleichmäßigkeit der Approximation ist für hinreichend kleine ε auch $\mathfrak{G} \subset f_\varepsilon(F_0)$. Bezeichnet C den Rand von F_0 , so ist für $w \in \mathfrak{G}$ die Differenz der Häufigkeiten, mit denen w auf F_0 von f_ε und f angenommen wird, gegeben durch

$$A(w, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta(C)} d \ln \left(1 + \frac{f_\varepsilon(z) - f(z)}{f(z) - w} \right).$$

Nun ist $|f(z) - w|$ für $z \in C$ und $w \in \mathfrak{G}$ gleichmäßig nach unten beschränkt, während $|f_\varepsilon(z) - f(z)| < \varepsilon$ für $z \in C$. Es folgt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(w, \varepsilon) = 0$ gleichmäßig in $w \in \mathfrak{G}$; andererseits ist $A(w, \varepsilon)$ eine ganze Zahl, und das ergibt die Behauptung.

Hilfssatz 3: *f sei auf F_0 regulär und k-wertig, und es sei $\mathfrak{M} \subset F_0$. Jede hinreichend scharfe, auf F_0 gleichmäßige Approximation f_ε von f ist dann k-wertig auf \mathfrak{M} .*

Beweis: Da die Spurabbildung der Bildfläche von F_0 auf das Gebiet⁵⁾ $f(F_0)$ stetig ist, folgt aus $\mathfrak{M} \subset F_0$ auch $f(\mathfrak{M}) \subset f(F_0)$. Es gibt also ein Gebiet \mathfrak{G} mit $f(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{G} \subset f(F_0)$, und wegen der Gleichmäßigkeit der Approximation wird für genügend kleine ε auch $f_\varepsilon(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{G} \subset f_\varepsilon(F_0)$ gelten. Wegen Hilfssatz 2 und der Voraussetzung nehmen daher alle hinreichend scharfen Näherungen f_ε auf F_0 jeden Wert aus \mathfrak{G} höchstens k-mal an; sie sind also insbesondere k-wertig auf \mathfrak{M} ⁶⁾.

Satz 2: *Sei $\mathfrak{M} \subset F$. Falls es eine Teilfläche F_1 mit $\mathfrak{M} \subset F_1 \subset F$ gibt, auf der reguläre k-wertige Funktionen existieren, so gibt es auf F Funktionen, die k-wertig auf \mathfrak{M} sind.*

Beweis: Der Satz folgt daraus, daß für die Eigenschaft „k-wertig“ die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt sind. Denn nach Voraussetzung genügt jedes Zwischengebiet F_0 mit $\mathfrak{M} \subset F_0 \subset F_1$ der Bedingung a), während b) wegen Hilfssatz 3 befriedigt wird.

§ 4. Existenz- und Realisierungssätze.

Auf der Riemannschen Fläche F sei eine kompakte abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} vom Geschlecht Null gegeben, das soll heißen, daß \mathfrak{M} in eine schlichtartige Teilfläche⁷⁾ eingebettet werden kann. Dann gibt es aber auch eine schlichtartige Teilfläche F_1 mit $\mathfrak{M} \subset F_1 \subset F$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es in jeder Komponente von F_1 reguläre und schlichte (einwertige) Funktionen; da diese wegen der Kompaktheit von F_1 als beschränkt angenommen werden können, ist es erlaubt, ihre Wertmengen als getrennt liegend voranzusetzen; d. h. aber, daß es auf F_1 einwertige reguläre Funktionen

⁴⁾ Der Beweis ist derselbe wie der des ROUCHÉschen Theorems; über dieses hinaus liefert er die erforderliche Gleichmäßigkeit in \mathfrak{G} .

⁵⁾ Ein Gebiet darf endlich viele Komponenten enthalten.

⁶⁾ Dabei ist $\mathfrak{M} \subset F_0$ wesentlich. Denn sei z. B. $F_0: |z| \leq 1$, $f = z$, $k = 1$ und $f_n = z \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{z^{n+1}}{n+1}$; jedes f_n hat n Kreuzungspunkte im Innern von $|z| \leq 1$, und jeder Punkt auf dem Rande des Einheitskreises ist Häufungspunkt solcher Kreuzungspunkte.

⁷⁾ D. h. jede Komponente ist schlichtartig.

gibt; falls $F - \mathfrak{M}$ zusammenhängend ist, kann das auch von $F - F_1$ angenommen werden. Damit folgt aus Satz 2, Hilfssatz 1 und dem Zusatz von Satz 1

Satz 3: Eine Riemannsche Fläche F kann stets so realisiert werden, daß eine vorgegebene kompakte abgeschlossene Punktmenge \mathfrak{M} vom Geschlecht Null schlicht dargestellt wird; wenn $F - \mathfrak{M}$ zusammenhängend ist, gibt es sogar reguläre bzw. Elementarfunktionen, die eine solche Realisierung vermitteln.

Korollar 1: Zu jedem endlichen System C punktfremder Jordankurven auf F gibt es Realisierungen von F , die C schlicht abbilden. — Ist F insbesondere geschlossen und C ein R -System, so gibt es Elementarfunktionen, die auf C einwertig sind.

F sei eine Riemannsche Fläche von endlichem Geschlecht; nach einem Einbettungssatz von BOCHNER und SARIO⁹⁾ kann F in eine geschlossene Riemannsche Fläche \bar{F} von demselben Geschlecht eingebettet werden. Sei nun C auf F , also auch auf \bar{F} , ein beliebiges R -System, dann ist $\bar{F} - C$ schlichtartig; ist C speziell ein RP -System, dann ist $\bar{F} - C$ einfach-zusammenhängend, und zu jeder abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} aus $\bar{F} - C$ gibt es daher eine einfach-zusammenhängende Teilfläche F_1 mit $\mathfrak{M} \subset F_1$, und dann ist $\bar{F} - F_1$ zusammenhängend. Es folgt

Korollar 2: C sei ein beliebiges R -System auf der Riemannschen Fläche F von endlichem Geschlecht. Zu jeder abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M} \subset F - C$ gibt es Realisierungen von F , in denen \mathfrak{M} schlicht liegt. Es gibt solche Realisierungen durch reguläre bzw. Elementarfunktionen, falls C ein RP -System ist.

Dieses Ergebnis besagt im wesentlichen, daß es auf einer Riemannschen Fläche von endlichem Geschlecht Funktionen gibt, deren Mehrwertigkeiten nur in beliebiger Nähe eines willkürlichen R -Systems auftreten; es läßt daher die folgende Anwendung auf die Theorie der algebraischen Funktionen zu, wenn man bedenkt, daß eine Funktion f in der Umgebung einer Nullstelle oder eines Poles von df mehrwertig ist:

Satz 4: Unter den algebraischen Funktionen, die zu der geschlossenen Riemannschen Fläche F gehören, gibt es solche, deren Pole sowie die Stellen ihres Differentialdivisors in beliebiger Nähe eines willkürlich vorgegebenen R -Systems liegen; und es gibt Elementarfunktionen mit vorgegebener Polstelle δ , deren Differentialdivisor nur Stellen enthält, die in beliebiger Nähe eines durch δ geführten, aber sonst willkürlichen RP -Systems liegen.

Eine weitere Folgerung aus Satz 2 möge diese Untersuchung abschließen.

F sei wieder eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p < \infty$. Ein System C aus $p - 1$ punktfremden Jordankurven auf F nennen wir eine Kommutatorbasis, wenn $F - C$ aus p Komponenten vom Geschlecht Eins besteht. Da jede solche Komponente in ein elliptisches Gebilde einbettbar ist, gibt es auf ihr zweiwertige Funktionen, die offenbar als regulär voraus-

⁹⁾ L. SARIO: Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Ann. Acad. Sci. fenn. Ser. A 1, 50, 1948, Satz 16.

gesetzt werden dürfen. Die Begründung von Satz 3 bewirkt hier, daß es auf $F_1 = F - C$ zweiwertige reguläre Funktionen gibt. Damit folgt

Satz 5: *Auf einer Riemannschen Fläche F von endlichem Geschlecht sei C eine beliebige Kommutatorbasis. Es gibt Realisierungen von F , in denen eine vorgegebene abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M} \subset F - C$ die Wertebene höchstens zweifach überdeckt. — Insbesondere gibt es Funktionen auf F , die auf einem beliebigen System getrennt liegender kanonischer Rückkehrschnittpaare zweiwertig sind.*

Dieser Satz kann dahingehend interpretiert werden, daß die „Abweichung“ einer Riemannschen Fläche endlichen Geschlechtes von einer geeigneten hyperelliptischen Fläche durch die Umgebung einer beliebigen Kommutatorbasis bedingt ist.

(Eingegangen am 29. Juni 1954.)

Über die wesentlichen Singularitäten einer Abbildungsschar.

Von

JOSEF WEIER in Fulda.

Sind q der Nullpunkt in einem Euklidischen Zahlenraum R , Z ein Zyklus und Z_1, Z_2 stetige Bilder von Z in $R - q$, so erhebt sich die Frage: kann man Z_1 so in Z_2 deformieren, daß während der Deformation keine Nullstelle auftritt; kann man also Z_1 und Z_2 innerhalb $R - q$ ineinander deformieren? Dies ist ein bekanntes Problem der Verschlingungstheorie.

Eine mit diesem Problem verwandte Frage lautet:

1. Es seien f und f' homotope Abbildungen eines Polyeders in sich ohne Fixpunkte. Lassen sich dann f und f' derart ineinander deformieren, daß während der Deformation kein Fixpunkt auftritt?

Die vorstehende Frage läßt sich in verschiedener Richtung abwandeln, etwa in folgender:

2. Es seien f und f' homotope Abbildungen eines Polyeders in sich, deren jede genau einen Fixpunkt hat. Gibt es dann eine f in f' überführende Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ derart, daß für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung f^τ genau einen Fixpunkt hat?

Weiter kann man fragen:

3. Es seien f und f' homotope Abbildungen eines Polyeders in sich, deren jede als Fixpunktzahl die Fixpunktmindestzahl der Homotopieklasse von f und f' hat. Existiert dann eine f in f' überführende Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, so daß für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung f^τ als Fixpunktzahl die Fixpunktmindestzahl ihrer Homotopieklasse hat?

Endlich erhebt sich allgemein die Frage, und es besteht die Aufgabe der Präzisierung dieser Frage:

4. Wie kann man zwei homotope Abbildungen eines Polyeders in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, derart ineinander überführen, daß während der Überführung möglichst wenig Fixpunkte auftreten?

Geht man den Fragen 1 bis 4 nach, so erweist sich der durch sie bestimmte Problemkreis als verzweigt und mannigfaltig. Und Untersuchungen, die tief liegende Ergebnisse hierzu bringen, lassen sich in eine kürzere Arbeit nicht wohl zusammendrängen. Wir beschränken uns deshalb auf die Behandlung eines Problems, das, mit den vorerwähnten Problemen verwachsen, doch eine gesonderte Untersuchung zuläßt.

Es bedeute, und diese Bedeutung bleibe bis Schluß der Arbeit, n eine natürliche Zahl, P ein endliches Polyeder in dem n -dimensionalen Euklidischen Zahlenraum R^n ; ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat. Statt $f^\tau(p)$ schreiben wir auch $F(p, \tau)$, so daß also $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$. Wir nennen F

eine „isolierte“ Abbildungsschar in P und fragen, in welcher Weise die Abbildungsschar F die Fixpunkte von f^0 in diejenigen von f^1 überführt. Geschieht diese Überführung, da über f^0 keine weiteren Voraussetzungen als nur die, für $0 \leq \tau \leq 1$ habe die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte, gemacht sind, in einer Art, für die Bezeichnungen wie „ungeordnet“, „beliebig“, „planlos“ treffend sind? Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, nachzuweisen, daß im Gegenteil einfache Gesetze bestehen, nach denen sich die durch F vermittelte Überführung von f^0 in f^1 vollzieht.

Ein Ergebnis sei vorweggenommen. Sind $\tau_1, \dots, \tau_n, \tau$ irgendwelche Zahlen und p der Punkt (τ_1, \dots, τ_n) des R^n , so bezeichnen wir den Punkt $(\tau_1, \dots, \tau_n, \tau)$ des R^{n+1} auch mit (p, τ) ; im übrigen weisen wir auf die in Abschnitt I gemachten Bemerkungen, die Bezeichnungsweise betreffend, hin. Ist dann S die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} , für die p wesentlicher Fixpunkt der Abbildung f^τ , so ist entweder S leer, oder es gibt Punkte a_i^τ , $\alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1}$, in P und von Null verschiedene ganze Zahlen ζ_i , $i = 1, 2, \dots$ evtl. ad inf., mit den Eigenschaften I bis III:

I. Es bedeute a_i die durch $a_i(\tau) = a_i^\tau$, $\alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1}$, bestimmte Abbildung von $(\alpha_{i0}, \alpha_{i1})$ in P . Dann ist a_i stetig.

II. Für $\alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1}$ ist a_i^τ Fixpunkt mit dem Index ζ_i von f^τ .

III. Ist A_i die aus den Punkten (a_i^τ, τ) , $\alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1}$, bestehende Menge des R^{n+1} , so sind die A_i paarweise zueinander fremd. Und es ist $\sum \bar{A}_i = \bar{S}$.

In den untenstehenden Definitionen 2 und 2' haben wir die Mengen A_i auf einem unmittelbaren Weg erklärt und sie als die „wesentlichen Singularitäten“ von F bezeichnet. — Zunächst einige Bemerkungen über den Index isolierter Fixpunkte.

Ist T ein r -dimensionales Simplex, $r > 0$, im R^n , L die Trägerebene von T , ferner $a \in T \subset P$ und die Menge T in P offen, f eine stetige Abbildung von P in sich, f auf T affin und a der einzige Fixpunkt von f auf T , so bezeichnen wir a als einen „affinen“ Fixpunkt von f und als „Index“ von a bei f die Zahl $+(-1)^r$ oder $-(-1)^r$, je nachdem die durch $g(p) = f(p) - p$, $p \in T$, bestimmte Abbildung g von T in L positiv oder negativ ist.

Wenn U eine in P offene Menge, a ein Punkt aus U , f eine stetige Abbildung von P in sich und a der einzige Fixpunkt von f auf U , so heißt a ein „isolierter“ Fixpunkt von f ; und der „Index“ von a bei f ist die Summe der Indexe der in U liegenden Fixpunkte einer wie folgt bestimmten Abbildung f' . Für $p \in P - U$ ist $f'(p) = f(p)$, die Abbildungen f und f' sind homotop, jeder in U liegende Fixpunkt von f' ist affin. — Ist der Index von a bei f nicht Null, so nennen wir a einen „wesentlichen“ Fixpunkt von f .

Wir können nun erklären:

Definition 1. Es seien q ein Punkt aus P , α eine Zahl aus $[0, 1]$, q ein wesentlicher Fixpunkt von f^α , U eine in P offene Menge $\ni q$ und ε eine positive Zahl derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ auf U genau einen wesentlichen Fixpunkt hat. Dann heißt (q, α) ein „Normalpunkt“ von F .

Definition 2. Es seien α_0, α_1 Zahlen mit $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq 1$ und a eine stetige Abbildung von (α_0, α_1) in P . Für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ sei, wenn der Punkt $a(\tau)$ auch mit a^τ bezeichnet wird, (a^τ, τ) ein Normalpunkt von F . Ferner möge gelten: zu keinem (α_0, α_1) als echten Teil enthaltenden Intervall (β_0, β_1) existiert eine stetige Abbildung b von (β_0, β_1) in P derart, daß mit $b^\tau = b(\tau)$ die Gleichung $a^\tau = b^\tau$ für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ gilt und (b^τ, τ) für $\beta_0 < \tau < \beta_1$ ein Normalpunkt von F ist. Dann heißt die aus den Punkten (a^τ, τ) , $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$, des R^{n+1} bestehende Menge, die wir auch kürzer durch $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ bezeichnen, eine „wesentliche Singularität“ von F .

Definition 3. Ist $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F und ζ eine ganze Zahl derart, daß a^τ für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ Fixpunkt mit dem Index ζ von f^τ , so heißt ζ der „Grad“ von A bei F .

Die Erklärungen 1 und 2 sind, wie in Abschnitt 1 gezeigt wird, mit den folgenden Definitionen 1' und 2' gleichwertig.

Definition 1'. Es seien q ein Punkt aus P , α eine Zahl aus $[0, 1]$, q ein wesentlicher Fixpunkt von f^α und U eine offene Menge $\ni (q, \alpha)$ im R^{n+1} von der Beschaffenheit: zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ gibt es in U höchstens einen Punkt (p, τ) derart, daß p wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist. Dann heißt (q, α) ein „Normalpunkt“ von F .

Definition 2'. Es seien α_0, α_1 Zahlen mit $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq 1$, U eine offene Menge im R^{n+1} und a eine stetige Abbildung von (α_0, α_1) in P , so daß, wenn für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ der Punkt $a(\tau)$ auch a^τ genannt wird, IV bis VI gilt. Dann heißt $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine „wesentliche Singularität“ von F .

IV. Für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ ist a^τ ein wesentlicher Fixpunkt der Abbildung f^τ und (a^τ, τ) in U gelegen.

V. Zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ gibt es in U höchstens einen Punkt (p, τ) derart, daß p wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist.

VI. Sind V eine offene Menge $\supset U$ im R^{n+1} , (β_0, β_1) ein (α_0, α_1) als echten Teil enthaltendes Intervall und b eine stetige Abbildung von (β_0, β_1) in P mit $b(\tau) = a(\tau)$ für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$, so sind IV und V bei Ersetzung von α_0, α_1, a, U durch β_0, β_1, b, V nicht mehr richtig.

Die folgenden Untersuchungen werden das Bild einer isolierten Abbildungsschar, welches durch das bis hierher Gesagte entstanden ist, ergänzen und wesentlich verschärfen.

1. Normalpunkte.

Der vorliegende Abschnitt dient unter anderem dem Zweck, die obigen Definitionen 1 und 1', ebenso die Definitionen 2 und 2' als gleichwertig zu erweisen. Einige weitere Bemerkungen bereiten die Beweise der in Abschnitt 2 und 3 angeführten Sätze vor.

Zunächst Bemerkungen zur Bezeichnungsweise. Sind a und b Punkte des R^n , so bedeutet \bar{a} die aus dem Punkt a bestehende Menge, $\varrho(a, b)$ die Entfernung der Punkte a und b . Ist jedem Punkt p einer Menge M genau ein Punkt $f(p)$ einer anderen Menge zugeordnet, so bezeichnet $f(p)$ stets den

Punkt, während die ganze Zuordnungsvorschrift — also die aus den Paaren $(p, f(p))$, $p \in M$, bestehende Menge — mit f , nirgends mit $f(p)$ bezeichnet wird. Die Bezeichnung $i = 1, 2, \dots$ bedeutet, daß i alle natürlichen Zahlen durchläuft. Durchläuft i nur endlich viele Zahlen, so geben wir, wie dies z. B. in $i = 1, \dots, m$ geschehen ist, stets das letzte Glied an. Im R^n liegende „Simplexe“ sind offen und gradlinig gemeint. Wenn S_1, \dots, S_m Simplexe im R^n , so nennen wir ΣS_i ein „*endliches Polyeder*“.

Die oben definierte Abbildung F ist auf der Menge P' aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärt. Die eingangs gemachte Voraussetzung, es sei F eine „*Abbildungsschar*“, bedeutet, daß F eine stetige Abbildung von P' in P ist.

Ist U eine in P offene Menge und f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so bezeichnen wir als „*Indexsumme*“ von f auf U , wenn f auf U keinen Fixpunkt hat, die Zahl 0, sonst die Summe der Indexe der in U liegenden Fixpunkte von f .

Aus der Erklärung des Indexes folgt, nachdem man die Eindeutigkeit und Möglichkeit dieser Erklärung etwa mit Hilfe der HOPFSCHEN Spurformel bewiesen hat, leicht:

Satz 1. *Es sei U eine in P offene Menge und α eine Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$, so daß $p \neq f^\alpha(p)$ für $p \in \bar{U} - U$. Dann gibt es eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildungen f^α und f^τ auf U in ihren Indexsummen übereinstimmen.*

Aus Satz 1 folgt weiter:

Satz 1'. *Ist U eine in P offene Menge, q ein in U liegender wesentlicher Fixpunkt von f^α und $p \neq f^\alpha(p)$ für $p \in \bar{U} - q$, so gibt es eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat.*

Der letzte Satz ermöglicht, die obigen Definitionen 1 und 1', ebenso die Definitionen 2 und 2' als gleichwertig nachzuweisen.

Die Definitionen 1 und 1' sind gleichwertig. Zum Beweis sei zunächst (q, α) ein Normalpunkt von F im Sinne der Definition 1. Dann gibt es eine offene Menge U_1 im R^n mit $q \in U_1$ und eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in $U_1 \cdot P$ genau einen wesentlichen Fixpunkt hat. Bedeutet hierauf U die Menge aller (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in U_1$ und $|\alpha - \tau| < \varepsilon$, so ist U eine offene Menge $\supset (q, \alpha)$ im R^{n+1} von der in Definition 1' bestimmten Art. Verbleibt zu zeigen:

Ist (q, α) ein Normalpunkt von F im Sinne der Definition 1', so ist (q, α) ein Normalpunkt von F im Sinne der Definition 1.

Beweis. Es sei U_1 eine offene Menge $\supset (q, \alpha)$ im R^{n+1} von der Beschaffenheit: Zu jedem τ aus $[0, 1]$ gibt es in U_1 höchstens einen Punkt (p, τ) derart, daß p ein wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist.

Bedeutet dann U_2 die Menge aller Punkte p des R^n mit $(p, \alpha) \in U_1$, so ist $U_2 = P \cdot U_1$ eine in P offene Menge $\supset q$, und es gibt eine positive Zahl ε_1 derart, daß die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in U_2$ und $|\alpha - \tau| < \varepsilon_1$ in U_1

liegt. Somit gilt: zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon_1$ existiert in U_3 höchstens ein Punkt p , der wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist.

Es bezeichne nun U eine in P offene Menge, so daß $q \in U \subset U_3$ und q der einzige Fixpunkt von f^τ auf \bar{U} ist. Da q wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist, gibt es nach Satz 1' eine Zahl ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ und der Eigenschaft, daß für alle τ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat.

Für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ hat die Abbildung f^τ auf U genau einen wesentlichen Fixpunkt: wegen $\varepsilon < \varepsilon_1$ und $U \subset U_3$ hat f^τ in U höchstens einen wesentlichen Fixpunkt, und es hat f^τ in U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt.

Damit ist der Beweis beendet.

Die Definition 2 und 2' sind gleichwertig. Um dies nachzuweisen, wollen wir zunächst zeigen:

Ist $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2, so ist $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ auch wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2'.

Beweis. Es sei ζ eine Zahl aus (α_0, α_1) . Nach Definition 1 gibt es dann eine offene Menge U_1 im R^n mit $a^\zeta \in U_1$ und eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\zeta - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in $U_1 \cdot P$ höchstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Wenn ε nur hinreichend klein, liegt für alle τ mit $|\zeta - \tau| < \varepsilon$ der Punkt a^τ in U_1 . Es gibt also eine positive Zahl ε_1 derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\zeta - \tau| < \varepsilon_1$ der Punkt a^τ in U_1 liegt und der einzige wesentliche Fixpunkt von f^τ in $U_1 \cdot P$ ist. Bezeichnen wir alsdann mit U_1^ζ die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} , für die p in U_1 gelegen und $|\zeta - \tau| < \varepsilon_1$, so ist U_1^ζ eine offene Menge des R^{n+1} der Eigenschaft: ist (p, τ) ein Punkt aus U_1^ζ derart, daß p wesentlicher Fixpunkt von f^τ , so ist τ in (α_0, α_1) gelegen und $p = a^\tau$.

Nun sei U^ζ die Vereinigungsmenge aller offenen Mengen U_2^ζ des R^{n+1} folgender Art: der Punkt (a^ζ, ζ) liegt in U_2^ζ ; ist (p, τ) ein Punkt aus U_2^ζ derart, daß p wesentlicher Fixpunkt von f^τ , so ist τ in (α_0, α_1) gelegen und $p = a^\tau$. Die Menge U_1^ζ ist von der Art der Mengen U_2^ζ . Wir bezeichnen die Menge $\Sigma U^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1$, mit $U = U^*$.

Dann gilt IV bis VI über die Abbildung a .

Zu IV. Da (a^τ, τ) ein Normalpunkt von F , ist a^τ ein wesentlicher Fixpunkt von f^τ . Wegen $(a^\tau, \tau) \in U^\tau$ ist $(a^\tau, \tau) \in U$.

Zu V. Es seien ζ eine Zahl aus $[0, 1]$ und p_1, p_2 Punkte aus P derart, daß p_1 wie p_2 wesentlicher Fixpunkt von f^ζ ist und (p_1, ζ) wie (p_2, ζ) in U liegt. Dann gibt es Zahlen ζ_1 und ζ_2 mit $(p_1, \zeta) \in U^{\zeta_1}$ und $(p_2, \zeta) \in U^{\zeta_2}$. Und aus der Bedeutung der Mengen U^τ folgt, daß $p_1 = p_2 = a^\zeta$.

Zu VI. Angenommen, es wäre V eine offene Menge $\supset U$ im R^{n+1} , (β_0, β_1) ein (α_0, α_1) als echten Teil enthaltendes Intervall und b eine stetige Abbildung von (β_0, β_1) in P mit $b(\tau) = a(\tau)$, $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$, und der Eigenschaft, daß IV und V bei Ersetzung von α_0, α_1, a, U durch β_0, β_1, b, V richtig sind. Nach

Definition 1' ist dann (b^τ, τ) für $\beta_0 < \tau < \beta_1$ Normalpunkt von F : ein Widerspruch zur Eigenschaft von $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2 zu sein.

Weiter gilt:

Ist $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2', so ist $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2.

Beweis. Wegen IV, V und Definition 1' ist (a^τ, τ) für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ ein Normalpunkt von F .

Angenommen, es existierte ein (α_0, α_1) als echten Teil enthaltendes Intervall (β_0, β_1) und eine stetige Abbildung b von (β_0, β_1) in P mit den Eigenschaften: für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ ist $a(\tau) = b(\tau)$; wird der Punkt $b(\tau)$ auch b^τ genannt, so ist (b^τ, τ) für $\beta_0 < \tau < \beta_1$ ein Normalpunkt von F . Dann ergibt sich, wie oben die Menge U^* erklärt wurde, die Existenz einer offenen Menge V^* des R^{n+1} , über die gilt: für $\beta_0 < \tau < \beta_1$ liegt der Punkt (b^τ, τ) in V^* ; ist (p, τ) ein Punkt aus V^* und p ein wesentlicher Fixpunkt von f^τ , so liegt τ in (β_0, β_1) , und es ist $p = b^\tau$.

Die Existenz von V^* widerspricht aber der Eigenschaft von $(a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, wesentliche Singularität von F im Sinne der Definition 2' zu sein. Und damit ist der Beweis beendet.

Die Erklärung eines Normalpunktes wird durch den folgenden Satz weiter erläutert.

Satz 2. Wenn (q, α) ein Normalpunkt von F , so existieren eine in P offene Menge $U \ni q$, eine positive Zahl ε , eine stetige Abbildung a von $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ in U und eine ganze Zahl $\zeta \neq 0$ derart, daß gilt: für alle Zahlen τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ ist der Punkt $a(\tau)$ der einzige in U gelegene wesentliche Fixpunkt von f^τ und sein Index bei f^τ gleich ζ .

Beweis. Nach der Erklärung eines Normalpunktes gibt es eine in P offene Menge $U_1 \ni q$ und eine positive Zahl ε_1 derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon_1$ die Abbildung f^τ auf U_1 genau einen wesentlichen Fixpunkt hat.

Hierauf bezeichne U eine in P offene Menge derart, daß $q \in U \subset U_1$ und q der einzige Fixpunkt von f^α auf \bar{U} ist. Nach Satz 1 existiert eine Zahl ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ und der Eigenschaft, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildungen f^α und f^τ auf U in ihren Indexsummen übereinstimmen.

Da q ein wesentlicher Fixpunkt von f^α , ist sein Index $\zeta \neq 0$. Es hat also f^τ für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ auf U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt, wegen $U \subset U_1$ und $\varepsilon < \varepsilon_1$ weiter höchstens einen wesentlichen Fixpunkt, daher genau einen wesentlichen Fixpunkt. Bedeutet dann $a^\tau = a(\tau)$ für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ den in U liegenden wesentlichen Fixpunkt von f^τ , so ist für alle diese τ der Index von a^τ bei f^τ gleich ζ .

Verbleibt nachzuweisen, daß die Abbildung a stetig. Zum Beweis bezeichne β eine Zahl aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, ferner γ eine positive Zahl und V eine in P offene Menge mit den Eigenschaften: der Punkt a^β liegt in V und ist der einzige Fixpunkt von f^β auf \bar{V} , der Durchmesser von V ist $< \gamma$, es ist $V \subset U$.

Nach Satz 1' gibt es eine positive Zahl δ , so daß erstens $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ in $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ liegt und zweitens für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\beta - \tau| < \delta$ die Abbildung f^τ in V wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Hieraus und aus $V \subset U$ folgt, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\beta - \tau| < \delta$ der Punkt a^τ in V liegt, also von a^β einen Abstand $< \gamma$ hat. Mithin, da γ irgendeine positive Zahl: die Abbildung a ist in β stetig.

Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

2. Einfache Intervalle.

Die Bedeutung von n , P , f^τ und F ist schon in der Einleitung erklärt: Es bezeichnet n eine natürliche Zahl, P ein endliches Polyeder in dem n -dimensionalen Euklidischen Zahlenraum R^n und $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts leisten in der Frage, nach welchen Gesetzen die durch F vermittelte Deformation von f^0 in f^1 vor sich geht, ein Erstes. Wir werden nämlich zeigen, daß es paarweise zueinander fremde Intervalle (α_i, α_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots$ evtl. ad inf., gibt, die sämtlich „einfach“ sind im Sinne der folgenden Erklärung und für die $\bar{\Sigma}(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = [0, 1]$ gilt.

Definition. Sind α_0, α_1 Zahlen mit $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq 1$, so bezeichnen wir (α_0, α_1) als ein „einfaches Intervall“ von F , wenn eine ganze Zahl $m \geq 0$ existiert, so daß 1) und 2) gilt. 1). Für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ hat die Abbildung f^τ genau m wesentliche Fixpunkte. 2). Wenn (β_0, β_1) ein (α_0, α_1) als echten Teil enthaltendes Intervall, so existiert in (β_0, β_1) eine Zahl γ derart, daß die Anzahl der wesentlichen Fixpunkte von f^γ nicht m .

Dann wollen wir zeigen:

Satz 3. Sind α eine Zahl aus $[0, 1]$ und ε eine positive Zahl, so gibt es ein einfaches Intervall (α_0, α_1) von F mit $\varrho(\alpha, (\alpha_0, \alpha_1)) < \varepsilon$.

Beweis. Wenn p ein Punkt im R^n und δ eine positive Zahl, so bezeichne $U(p; \delta)$ die δ -Umgebung von p bezüglich des R^n .

Wir führen nun zunächst folgende Annahme auf einen Widerspruch: Zu jeder Zahl σ aus $(0, 1)$ mit $|\alpha - \sigma| < \varepsilon$ und jeder positiven Zahl η gibt es eine Zahl τ mit $\sigma < \tau < 1$ sowie $\tau - \sigma < \eta$ und der Eigenschaft, daß die Abbildungen f^σ und f^τ in der Anzahl ihrer wesentlichen Fixpunkte nicht übereinstimmen.

In $(0, 1)$ existiert eine Zahl α_1 mit $|\alpha - \alpha_1| < \varepsilon$ derart, daß f^{α_1} wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Denn sonst wäre die Annahme falsch.

Hierauf seien m eine natürliche Zahl, weiter $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \delta_1, \dots, \delta_m$ positive Zahlen und $q_i^k, k = 1, \dots, i, i = 1, \dots, m$, Punkte aus P derart, daß I_i bis III_i für $i = 1, \dots, m$ gilt und ferner: wenn $m > 1$, ist

$$(I) \quad 0 < \alpha_i < \alpha_{i+1} < 1 \text{ für } i = 1, \dots, m-1;$$

es ist $|\alpha - \alpha_m| < \varepsilon$; für $i = 1, \dots, m$ ist $\delta_i < 1/i$.

I_i . Jeder der Punkte q_1^i, \dots, q_i^i ist wesentlicher Fixpunkt der Abbildung f^{α_i} .

II_i . Für $r \neq s$ ist $\varrho(q_r^i, q_s^i) > 2\delta_i$.

III_i. In allen Paaren (i, k) natürlicher Zahlen i, k mit $k < i$ ist $U(q_i^k; \delta_i) \subset U(q_{i-1}^k; \delta_{i-1})$.

Sind q_m^1, \dots, q_m^m die sämtlichen wesentlichen Fixpunkte von f^m , so sei $\mu = m$. Sonst bezeichnen wir die von q_m^1, \dots, q_m^m verschiedenen wesentlichen Fixpunkte der Abbildung f^m mit $q_m^{m+1}, \dots, q_m^\mu$. Ferner seien V^1, \dots, V^μ in P offene Mengen mit den Eigenschaften: für $k = 1, \dots, \mu$ ist $q_m^k \in V^k$ der einzige Fixpunkt von f^m auf V^k ; für $k = 1, \dots, m$ liegt \bar{V}^k in $U(q_m^k; \delta_m)$; die Mengen V^1, \dots, \bar{V}^μ sind paarweise zueinander fremd.

Wegen Satz 1' existiert für $k = 1, \dots, \mu$ eine positive Zahl ω^k derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha_m - \tau| < \omega^k$ die Abbildung f^τ auf V^k wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Es sei $\omega = \min(\omega^1, \dots, \omega^\mu)$.

Die Zahl α_m liegt in $(0, 1) \cdot (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Nach der obigen Annahme gibt es daher eine Zahl α_{m+1} mit $\alpha_m < \alpha_{m+1} < 1$ und $\alpha_{m+1} - \alpha_m < \omega$ derart, daß die Abbildungen f^m und $f^{\alpha_{m+1}}$ in der Anzahl ihrer wesentlichen Fixpunkte nicht übereinstimmen.

Wegen $\alpha_{m+1} - \alpha_m < \omega \leq \omega^k$ hat die Abbildung $f^{\alpha_{m+1}}$ für $k = 1, \dots, m$ in V^k wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt. Wir bezeichnen mit q_{m+1}^k einen solchen.

Da die Punkte q_m^1, \dots, q_m^μ die sämtlichen wesentlichen Fixpunkte der Abbildung f^m , die V^1, \dots, V^μ paarweise zueinander fremd sind und für $k = 1, \dots, \mu$ in V^k ein wesentlicher Fixpunkt von f^m liegt, hat $f^{\alpha_{m+1}}$ wenigstens so viele wesentliche Fixpunkte wie f^m . Da weiter f^m und $f^{\alpha_{m+1}}$ in der Anzahl ihrer wesentlichen Fixpunkte nicht übereinstimmen, hat $f^{\alpha_{m+1}}$ mehr wesentliche Fixpunkte als f^m , im besonderen also außer den Punkten $q_{m+1}^1, \dots, q_{m+1}^m$ noch mindestens einen weiteren wesentlichen Fixpunkt. Bezeichnen wir mit q_{m+1}^{m+1} einen solchen, so sind die Punkte $q_{m+1}^1, \dots, q_{m+1}^{m+1}$ paarweise verschieden.

Wegen $q_{m+1}^k \in V^k \subset U(q_m^k; \delta_m)$, $k = 1, \dots, m$, gibt es eine Zahl δ_{m+1} mit $0 < \delta_{m+1} < 1/(m+1)$ derart, daß II_{m+1} und III_{m+1} richtig sind.

Damit ist gezeigt: es gibt positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots$ mit $0 < \alpha_i < \alpha_{i+1} < 1$ und $\delta_i < 1/i$, $i = 1, 2, \dots$, sowie Punkte q_i^k , $k = 1, \dots, i$, $i = 1, 2, \dots$, in P derart, daß I_i bis III_i für $i = 1, 2, \dots$ gilt.

Für jedes Paar natürlicher Zahlen i und k mit $k \leq i$ folgt aus den III_{i+j}, $j = 1, 2, \dots$, daß

$$(2) \quad q_{i+j}^k \in U(q_i^k; \delta_i) \text{ für } j = 0, 1, \dots$$

Wir bezeichnen für $k = 1, 2, \dots$ die Folge $(q_k^k, q_{k+1}^k, \dots)$ mit F^k . Dann gilt, wie wir zeigen wollen, IV und V.

IV. Jede der Folgen F^1, F^2, \dots konvergiert.

V. Für $r \neq s$ haben F^r und F^s verschiedene Grenzwerte.

Zu IV. Nach (2) ist $\sum_{j=0}^{\infty} q_{i+j}^k \subset U(q_i^k; \delta_{k+i})$ für alle natürlichen Zahlen i , daher IV wegen $\delta_{k+i} < 1/(k+i)$ richtig.

Zu V. Es sei etwa $r < s$. Nach II_s ist dann

$$(3) \quad \bar{U}(q_s^r; \delta_s) \cdot \bar{U}(q_s^s; \delta_s) = 0.$$

Nach (2) ist weiter

$$(4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_{s+j}^r \subset U(q_s^r; \delta_s), \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_{s+j}^s \subset U(q_s^s; \delta_s).$$

Da ferner $F^r = (q_r^r, q_{r+1}^r, \dots)$ und $F^s = (q_s^s, q_{s+1}^s, \dots)$, so folgt V aus (3) und (4).

Für $k = 1, 2, \dots$ bezeichnen wir den nach IV existierenden Punkt $\lim q_{k+i}^k$, i gegen ∞ , mit q^k . Nach V ist $q^r \neq q^s$ für $r \neq s$. Die Zahl $\lim \alpha_i$, i gegen ∞ , nennen wir β .

Jeder der Punkte q^1, q^2, \dots ist Fixpunkt der Abbildung f^β . Zum Beweis wollen wir, wenn ζ eine positive Zahl bedeutet, zeigen, daß $\varrho(q^k, f^\beta(q^k)) < 3\zeta$ ist: Wenn nur i hinreichend groß, ist

$$\varrho(q^k, q_i^k) < \zeta, \quad \varrho(f^{z_i}(q_i^k), f^{z_i}(q^k)) < \zeta, \quad \varrho(f^{z_i}, f^\beta) < \zeta,$$

wegen $f^{z_i}(q_i^k) = q_i^k$ also $\varrho(q^k, f^{z_i}(q_i^k)) + \varrho(f^{z_i}(q_i^k), f^{z_i}(q^k)) + \varrho(f^{z_i}(q^k), f^\beta(q^k)) < 3\zeta$, woraus $\varrho(q^k, f^\beta(q^k)) < 3\zeta$ folgt.

Mithin hat die Abbildung f^β unendlich viele Fixpunkte, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Die obige Annahme ist also falsch; woraus leicht Satz 3 folgt.

Zur Herleitung von Satz 4 benutzen wir folgenden

Hilfssatz. Sind (α_0, α_1) ein einfaches Intervall von F , α eine Zahl aus (α_0, α_1) und q ein wesentlicher Fixpunkt von f^α , so ist (q, α) ein Normalpunkt von F .

Beweis. Wir bezeichnen mit q_1, \dots, q_m die wesentlichen Fixpunkte von f^α derart, daß $q = q_1$. Weiter seien U_1, \dots, U_m in P offene Mengen mit den Eigenschaften: für $i = 1, \dots, m$ ist $q_i \in U_i$ der einzige Fixpunkt von f^α auf U_i ; die U_1, \dots, U_m sind paarweise zueinander fremd. Statt U_1 schreiben wir auch U .

Nach Satz 1' existiert eine positive Zahl ε , so daß: für alle (i, τ) , wobei i eine der Zahlen $1, \dots, m$ und τ eine Zahl aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ bedeutet, die Abbildung f^τ in U_i wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat; und überdies $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ in (α_0, α_1) liegt.

Gäbe es eine Zahl β in $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ und unter den Zahlen $1, \dots, m$ eine Zahl j derart, daß in U_j zwei wesentliche Fixpunkte von f^β lägen, so hätte, da die U_i paarweise zueinander fremd sind und in jedem U_i ein wesentlicher Fixpunkt von f^β liegt, f^β mehr wesentliche Fixpunkte als f^α , obschon doch α und β Zahlen aus (α_0, α_1) sind.

Mithin: Für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ hat die Abbildung f^τ in U genau einen wesentlichen Fixpunkt. Nach Definition 1 ist daher (q, α) ein Normalpunkt von F , womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 4. Ist q ein wesentlicher Fixpunkt von f^α und ε eine positive Zahl, so gibt es einen Normalpunkt (r, β) von F mit $\varrho((q, \alpha), (r, \beta)) < \varepsilon$.

Beweis. Es seien U eine in P offene Menge $\ni q$ und δ eine positive Zahl mit den Eigenschaften: der Punkt q ist der einzige Fixpunkt von f^α auf \bar{U} , jeder Punkt (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in U$ und $|\alpha - \tau| < \delta$ ist von (q, α) um weniger als ε entfernt.

Nach Satz 1' gibt es eine positive Zahl δ_1 , so daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \delta_1$ die Abbildung f^τ in U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Nach Satz 3 existiert ein einfaches Intervall (α_0, α_1) von F mit $\varrho(\alpha, (\alpha_0, \alpha_1)) < \min(\delta, \delta_1)$.

Hierauf sei β eine Zahl aus (α_0, α_1) mit $|\alpha - \beta| < \min(\delta, \delta_1)$. Dann hat die Abbildung f^β in U wenigstens einen wesentlichen Fixpunkt, wir bezeichnen

mit r einen solchen. Nach dem obigen Hilfssatz ist (r, β) ein Normalpunkt von F . Schließlich ist $\varrho((q, \alpha), (r, \beta)) < \varepsilon$ wegen $r \in U$ und $|\alpha - \beta| < \delta$, also (r, β) von der verlangten Art.

3. Wesentliche Singularitäten.

Bis zum Schluß der Arbeit bedeute S die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} , für die p wesentlicher Fixpunkt der Abbildung f^τ ist. Dann finden sich in der Einleitung über S die Aussagen I bis III gemacht, die zu Ende des vorliegenden Abschnitts bestätigt und um die Sätze 5 bis 8 vermehrt werden.

Bezüglich der eingangs gegebenen Erklärung einer wesentlichen Singularität von F sei noch bemerkt: Wenn $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F , so ist für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ der Punkt a^τ ein wesentlicher Fixpunkt von f^τ . Jedoch ist nicht notwendig, wenn $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine Kurve von Punkten a^τ aus P und a^τ für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ wesentlicher Fixpunkt von f^τ ist, A eine wesentliche Singularität von F .

Satz 5. Ist $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine wesentliche Singularität von F , so gibt es eine ganze Zahl $\zeta \neq 0$ derart, daß a^τ für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ Fixpunkt mit dem Index ζ von f^τ ist.

Beweis. Es sei β eine Zahl aus (α_0, α_1) und b der Punkt a^β , ferner ζ der Index von b bei f^β und β_0 die untere Grenze aller Zahlen $\gamma_0 \leq \beta$ der Eigenschaft: für alle τ mit $\gamma_0 \leq \tau \leq \beta$ hat a^τ bei f^τ den Index ζ . Entsprechend bezeichnen wir mit β_1 die obere Grenze aller Zahlen $\gamma_1 \geq \beta$ derart, daß für $\beta \leq \tau \leq \gamma_1$ der Punkt a^τ bei f^τ den Index ζ hat. Die Annahme, es sei $\alpha_0 < \beta_0$, führt wie folgt auf einen Widerspruch.

Da (a^{β_0}, β_0) ein Normalpunkt von F , gibt es eine in P offene Menge $U \ni a^{\beta_0}$ und eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ auf U höchstens einen wesentlichen Fixpunkt hat.

Dann bedeute U_1 eine in P offene Menge, so daß $q \in U_1 \subset U$ und $p \neq f^{\beta_0}(p)$ für $p \in \bar{U}_1 - q$. Mit a bezeichnen wir die durch $a(\tau) = a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1$, bestimmte Abbildung von (α_0, α_1) in P .

Wegen Satz 1 und der Stetigkeit der Abbildung a existiert eine Zahl ε_1 mit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ und den Eigenschaften: für alle τ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon_1$ ist die Indexsumme von f^τ auf U_1 gleich dem Index η von a^{β_0} bei f^{β_0} ; für alle τ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon_1$ liegt der Punkt a^τ in U_1 .

Da $U_1 \subset U$ und $\varepsilon_1 < \varepsilon$, ist für alle τ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon_1$ der Punkt a^τ der einzige in U_1 liegende wesentliche Fixpunkt von f^τ . Mithin: Für alle τ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon_1$ hat a^τ bei f^τ den Index η .

Unter den Zahlen τ mit $|\beta_0 - \tau| < \varepsilon_1$ gibt es solche, für die a^τ bei f^τ den Index ζ hat. Es ist also $\zeta = \eta$. Daher hat für alle Zahlen τ aus $(\beta_0 - \varepsilon_1, \beta)$ der Punkt a^τ bei f^τ den Index ζ , ein Widerspruch zur Bedeutung von β_0 .

Wie $\alpha_0 = \beta_0$ findet man $\alpha_1 = \beta_1$, und damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6. Die wesentlichen Singularitäten von F sind paarweise zueinander fremd.

Beweis. Gäbe es zwei verschiedene Singularitäten $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ und $B = (b^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$ von F sowie eine Zahl γ in $(\alpha_0, \alpha_1) \cdot (\beta_0, \beta_1)$ mit $a^\gamma = b^\gamma$, so existierte weiter eine Zahl δ , über die entweder 1) oder 2) gälte.

- 1). Es kommt δ unter den Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ vor, δ liegt in $(\alpha_0, \alpha_1) + (\beta_0, \beta_1)$, und für alle Zahlen τ mit $\min(\gamma, \delta) < \tau < \max(\gamma, \delta)$ ist $a^\tau = b^\tau$.
- 2). Es liegt δ in $(\alpha_0, \alpha_1) \cdot (\beta_0, \beta_1)$, für alle τ mit $\min(\gamma, \delta) \leq \tau \leq \max(\gamma, \delta)$ ist $a^\tau = b^\tau$, in jeder Nähe von δ existieren Zahlen τ mit $a^\tau \neq b^\tau$.

Wenn 1) gilt, kann man annehmen, daß $\alpha_0 = \delta$ und $\beta_0 < \alpha_0$. Denn die Fälle $\alpha_1 = \delta, \beta_0 = \delta, \beta_1 = \delta$ erledigen sich wie der Fall $\alpha_0 = \delta$. Ist dann c^τ für $\beta_0 < \tau \leq \alpha_0$ der Punkt b^τ und für $\alpha_0 < \tau < \alpha_1$ der Punkt a^τ , ferner c die durch $c(\tau) = c^\tau, \beta_0 < \tau < \alpha_1$, bestimmte Abbildung von (β_0, α_1) in P , so ist c stetig, ferner (c^τ, τ) für $\beta_0 < \tau < \alpha_1$ Normalpunkt von F und (α_0, α_1) echter Teil von (β_0, α_1) . Die Existenz der Kurve $C = (c^\tau, \beta_0 < \tau < \alpha_1)$ widerspricht aber der Eigenschaft von $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, wesentliche Singularität von F zu sein.

Gilt 2), so gibt es, da (a^δ, δ) Normalpunkt von F ist, eine in P offene Menge $U \ni a^\delta$ und eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in U höchstens einen wesentlichen Fixpunkt hat. Nun existieren aber in jeder Nähe von δ Zahlen τ mit $a^\tau \neq b^\tau$; wegen $a^\delta = b^\delta$ im besonderen eine Zahl ζ mit $|\alpha - \zeta| < \varepsilon, a^\zeta \neq b^\zeta$ und $a^\zeta \in U$ sowie $b^\zeta \in U$. Wegen $|\alpha - \zeta| < \varepsilon$ hat f^ζ in U höchstens einen wesentlichen Fixpunkt, wegen $a^\zeta \neq b^\zeta$ hat f^ζ in U wenigstens zwei wesentliche Fixpunkte, ein Widerspruch.

Der folgende Hilfssatz bereitet den Beweis von Satz 7 vor.

Hilfssatz. Es seien $\gamma_0, \gamma, \gamma_1$ Zahlen mit $0 \leq \gamma_0 < \gamma < \gamma_1 \leq 1$ und a, b stetige Abbildungen von (γ_0, γ_1) in P mit $a(\gamma) = b(\gamma)$ und der Eigenschaft: werden die Punkte $a(\tau), b(\tau)$ auch mit a^τ, b^τ bezeichnet, so ist für $\gamma_0 < \tau < \gamma_1$ der Punkt (a^τ, τ) und ebenso der Punkt (b^τ, τ) ein Normalpunkt von F . Dann ist $a^\tau = b^\tau$ für $\gamma_0 < \tau < \gamma_1$.

Beweis. Gäbe es Zahlen τ in (γ_0, γ_1) mit $a^\tau \neq b^\tau$, so existierte eine Zahl δ in (γ_0, γ_1) von der Beschaffenheit: es ist $a^\delta = b^\delta$, in jeder Umgebung von δ liegen Zahlen τ mit $a^\tau \neq b^\tau$.

Da (a^δ, δ) ein Normalpunkt von F ist, gibt es eine in P offene Menge $U \ni a^\delta$ und eine positive Zahl ε derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\delta - \tau| < \varepsilon$ die Abbildung f^τ in U höchstens einen wesentlichen Fixpunkt hat.

Wegen $a^\delta = b^\delta$ und der Bedeutung von δ gäbe es aber eine Zahl ζ mit $|\delta - \zeta| < \varepsilon$ und der Eigenschaft, daß a^ζ, b^ζ zwei in U gelegene verschiedene Punkte. Da a^ζ wie b^ζ wesentlicher Fixpunkt von f^ζ ist, hätte also f^ζ in U zwei wesentliche Fixpunkte, während doch $|\delta - \zeta| < \varepsilon$ ist.

Satz 7. Ist (q, α) ein Normalpunkt von F und $0 < \alpha < 1$, so gibt es eine wesentliche Singularität A von F mit $(q, \alpha) \in A$.

Beweis. Wegen Satz 2 existiert zunächst eine positive Zahl ε mit $0 < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < 1$ und eine stetige Abbildung f von $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ in P mit $f(\alpha) = q$ und der Eigenschaft, daß für $|\alpha - \tau| < \varepsilon$ der Punkt $(f(\tau), \tau)$ des R^{n+1} ein Normalpunkt von F ist.

Hierauf betrachten wir die offenen Intervalle des R^1 als Punktmengen und bezeichnen mit (α_0, α_1) die Summe aller α enthaltenden Intervalle (β_0, β_1) folgender Art: Es gibt eine stetige Abbildung g von (β_0, β_1) in P mit $g(\alpha) = q$ und der Eigenschaft, daß für alle Zahlen τ aus (β_0, β_1) der Punkt $(g(\tau), \tau)$ des R^{n+1} ein Normalpunkt von F ist.

Sind (β_0^i, β_1^i) , $i = 1, 2$, zwei Intervalle von der Beschaffenheit der Intervalle (β_0, β_1) und g^i , $i = 1, 2$, die zugehörigen Abbildungen g , so ist nach dem obigen Hilfssatz $g^1(\tau) = g^2(\tau)$ in allen Zahlen τ aus $(\beta_0^1, \beta_1^1) \cdot (\beta_0^2, \beta_1^2)$.

Daher ist die wie folgt bestimmte Abbildung a von (α_0, α_1) in P eindeutig, ja stetig: Es seien ζ eine Zahl aus (α_0, α_1) und (β_0^0, β_1^0) ein ζ enthaltendes Intervall von der Art der Intervalle (β_0, β_1) , ferner g^0 die zu (β_0^0, β_1^0) gehörige Abbildung g ; dann ist $a(\zeta) = g^0(\zeta)$.

Schreiben wir endlich statt $a(\tau)$ auch a^τ , so ist $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, wie leicht aus Definition 2 folgt, eine wesentliche Singularität von F . Und der Punkt (q, α) liegt in A , womit Satz 7 bewiesen ist.

Satz 8. Die isolierte Abbildungsschar F hat höchstens abzählbar viele wesentliche Singularitäten.

Beweis. Wir ordnen die rationalen Zahlen zu einer Folge ζ_1, ζ_2, \dots und bezeichnen für jede wesentliche Singularität $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ von F mit $\zeta(A)$ jene der Zahlen ζ_i , die die erste in (α_0, α_1) liegende Zahl der Folge ζ_1, ζ_2, \dots ist. Zum Beweis von Satz 8 genügt es dann nachzuweisen, daß zu jeder rationalen Zahl ζ_i höchstens endlich viele wesentliche Singularitäten A von F existieren mit $\zeta(A) = \zeta_i$.

Die Annahme, es seien η eine rationale Zahl und $A_i = (a_i^\tau, \alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1})$, $i = 1, 2, \dots$, paarweis verschiedene wesentliche Singularitäten von F mit $\zeta(A_i) = \eta$, widerspricht der Eigenschaft der Abbildung f^η , höchstens endlich viele Fixpunkte zu haben. Denn jeder der Punkte $a_1^\eta, a_2^\eta, \dots$ ist Fixpunkt von f^η . Und nach Satz 6 sind die Punkte a_i^η paarweis verschieden.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Die Menge S des R^{n+1} ist zu Anfang dieses Abschnittes erklärt. Unsere Untersuchungen schließen mit dem Nachweis, daß S die in der Einleitung angeführten Eigenschaften I, II und III hat. Zunächst folgt aus Satz 4 und Satz 7: Wenn $S \neq 0$, besitzt F wesentliche Singularitäten.

Hierauf seien $S \neq 0$ und $A_i = (a_i^\tau, \alpha_{i0} < \tau < \alpha_{i1})$, $i = 1, 2, \dots$ evtl. ad inf., die wesentlichen Singularitäten von F , ferner ζ_i der Grad von A_i . Dann gilt, unmittelbar aus den obigen Sätzen folgend, I und II. Die in III angegebene Gleichung $\bar{S} = \Sigma \bar{A}_i$, die eine um Häufungspunkte modifizierte Zerlegung von S in die wesentlichen Singularitäten von F darstellt, folgt aus 1) und 2).

1). Es ist $\Sigma \bar{A}_i \subset \bar{S}$. Zum Beispiel sei (q, α) ein Punkt aus ΣA_i . Dann ist q wesentlicher Fixpunkt von f^α , also $(q, \alpha) \in S$, mithin $\Sigma A_i \subset S$.

2). Es ist $\bar{S} \subset \Sigma \bar{A}_i$. Denn ist (q, α) ein Punkt aus S und ε eine positive Zahl, so gibt es nach Satz 4 einen Normalpunkt (r, β) von F mit $\varrho((q, \alpha), (r, \beta)) < \varepsilon$, nach Satz 7 daher weiter eine wesentliche Singularität A_i von F mit $\varrho((q, \alpha), A_i) < \varepsilon$. Mithin ist jeder Punkt der Menge S Häufungspunkt der Menge ΣA_i , woraus 2) folgt.

(Eingegangen am 12. Juni 1954.)

Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktionen*).

Von

HANS P. KÜNZI in Zürich.

1. Einleitung.

Nach dem DENJOY-AHLFORSschen [1, 2] Randstellensatz weiß man, daß die erzeugende Funktion einer Riemannschen Fläche des parabolischen Typus mit p logarithmischen Windungspunkten mindestens vom Mitteitypus der Ordnung $p/2$ ist. Als Beispiele solcher Flächen erwähne ich die von ULLRICH [5] und WITTICH [6] betrachtete Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen einfachperiodischen Enden. Die Ordnungen der erzeugenden Funktionen dieser Klasse lassen sich bekanntlich direkt aus den zugehörigen Streckenkomplexen (vgl. KÜNZI [3] und PÖSCHL [4]) berechnen. Besitzt ein derartiger Streckenkomplex p einfachperiodische Enden und weist die rechte bzw. linke¹⁾ Berandung einer Periode des Endes e_ν ($\nu = 1, \dots, p$) ω_ν bzw. ω'_ν Innenknoten auf, so hat die erzeugende Funktion die Ordnung

$$\lambda = \frac{p}{2} \cdot \beta \quad \text{mit} \quad \beta = 1 + \left(\frac{2}{p} \frac{\log A}{2\pi} \right)^2$$

und

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_p}{\omega'_1 \cdot \omega'_2 \cdots \omega'_p}.$$

Beispiel:

$$\omega_1 = 2, \quad \omega'_1 = 1$$

$$\omega_2 = 1, \quad \omega'_2 = 3 \quad A = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_3 = 2, \quad \omega'_3 = 2 \quad p = 3$$

$$\beta = 1 + \left(\frac{2}{3} \frac{\log 2/3}{2\pi} \right)^2 = 1,00185 \dots$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \cdot \beta = 1,50278 \dots$$

Gilt für sämtliche Enden $\omega_\nu = \omega'_\nu$, was z. B. für symmetrische Enden (vgl. Ende e_3) der Fall ist, so besitzt die erzeugende Funktion die kleinstmögliche Ordnung $p/2$, sobald hingegen $A > 1$ wird, was durch gewisse Asymmetrien im Aufbau der Enden bedingt wird, erhöht sich die Ordnung. (Vgl.

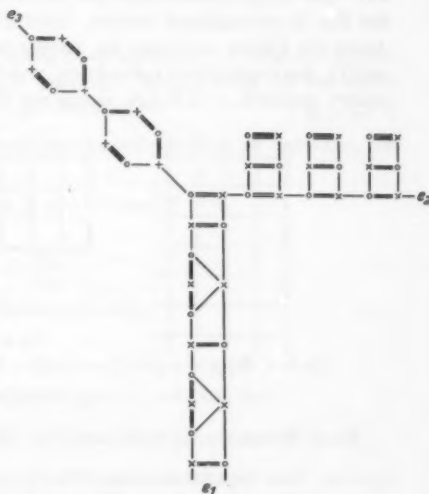


Fig. 1

*) Vortrag, gehalten am Internat. Mathematiker-Kongreß 1954 in Amsterdam.

¹⁾ Die rechte bzw. linke Berandung eines Endes wird vom Kern des Komplexes aus bestimmt.

auch die vom Verfasser betrachtete Klasse Riemannscher Flächen mit einfach — und doppelperiodischen Enden [3]).

Im Falle der einfachperiodischen Enden können Funktionen mit beliebig hoher (endlicher) Ordnung angegeben werden, denn

$$\lambda = f(p, A) = \frac{p}{2} \left[1 + \left(\frac{2}{p} \frac{\log A}{2\pi} \right)^2 \right].$$

Da aber A stets eine rationale Zahl darstellt, so ist es nicht möglich, mit Hilfe dieser Klasse Funktionen jeder beliebigen endlichen Ordnung zu erzeugen.

In der vorliegenden Arbeit geben wir eine Funktionsklasse an, die sich dadurch charakterisiert, daß jede beliebige Ordnung $\lambda > 1$ angenommen wird. Andererseits ist es möglich, zu irgendeiner Zahl $\lambda > 1$ eine Fläche zu konstruieren, die λ als Ordnung annimmt.

2. Die erzeugende Fläche eines Viertelsende.

In meiner früheren Arbeit [3] „Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre“ befaßte ich mich eingehend mit den sog. doppelperiodischen Enden. Ein solches Ende (Fig. 2a) kann als die Hälfte des Komplexes der Fig. 2c aufgefaßt werden, der bekanntlich von der Weierstraßschen \wp -Funktion erzeugt wird. Interessiert man sich nur für die Hälfte eines doppelperiodischen Endes (Fig. 2b), so sprechen wir von einem Viertelsende. Das Viertelsende weist ein logarithmisches sowie unendlich viele algebraische Elementargebiete auf. Der doppelperiodische Teil kann mit dem vierten Teil des Komplexes der Fig. 2c identifiziert werden. Sind die vier Grundpunkte a_1, \dots, a_4 , über denen die Fläche verzweigt ist, vorgegeben, so sind dadurch die Perioden Ω_1 und Ω_2 der zugehörigen \wp -Funktion, welche zum Streckenkomplex der Fig. 2c gehört, gegeben. — o.B.d.A. setzen wir $\text{Re } \Omega_1 > 0$ und $\Omega_2 = 2\pi i$.

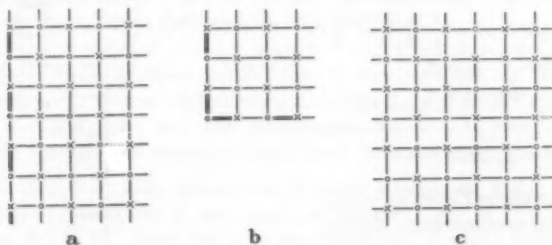


Fig. 2

Nach WEIERSTRASS normieren wir die Grundpunkte durch $\sum_{p=1}^3 a_p = 0$ und $a_4 = \infty$. Den logarithmischen Windungspunkt legen wir nach a_1 . Die erzeugende Funktion, die zur Fläche mit dem Viertelsende gehört, ist explizite nicht bekannt. Mit den in [3] entwickelten Methoden uniformisieren wir die Fläche teils konform, teils quasikonform in eine schlichte Z -Ebene, wobei die quasikonformen Abbildungen dem Teichmüller-Wittichschen Verzerrungssatz genügen, nach dem die Wertverteilungsgrößen statt im konformen ζ -Bild,

im quasikonformen Z -Bild der Riemannschen Fläche berechnet werden können (vgl. [3]). Auf die in [3] verwendeten konformen und quasikonformen Abbildungen wollen wir hier nicht weiter eingehen, sondern begnügen uns mit einem Hinweis auf die Hauptpunkte in der Uniformisierung.

In einem ersten Schritt schneiden wir eine Kreisumgebung des logarithmischen Windungspunktes um a_1 aus der Riemannschen Fläche und bilden diese Umgebung mit Hilfe des Logarithmus in eine Halbebene L_Z ab.

Mit Hilfe der Umkehrfunktion von $\wp(Z)$ wird der restliche Teil der Fläche in ein Gebiet P'_Z abgebildet. P'_Z wird mit bestimmt konstruierten quasikonformen Abbildungen in einen Sektor P_Z übergeführt mit $0 < \arg Z < \alpha$ für $\alpha = \arctg \frac{\operatorname{Re} \Omega_1}{\operatorname{Im} \Omega_1}$. Für die weiteren Untersuchungen legen wir die beiden Gebiete L_Z und P_Z nach Fig. 3 aneinander.

Die oben erwähnten quasikonformen Abbildungen können nach [3] so bestimmt werden, daß nachher die Ränder $\arg Z = \alpha$ für L_Z und P_Z identifiziert werden können. Desgleichen die Ränder von $\arg Z = 0$ und

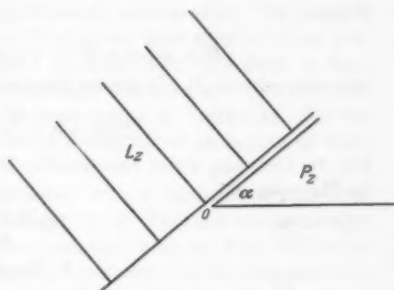


Fig. 3

$\arg \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_2|} Z = \pi + \alpha$.

Für die letzte Verheftung der Ränder $\arg Z = 0$ und $\arg Z = \alpha + \pi$ ist eine Spiralabbildung des Sektors $0 < \arg Z < \alpha + \pi$ auf die z -Ebene nötig, die wir durch

$$Z = z^{a+ib} = e^{(a+ib)(\log r + i\Phi)} \quad (z = re^{i\Phi})$$

darstellen. Dabei sind folgende Identifizierungsvorschriften zu beachten, die die Konstanten a und b bestimmen:

$$Z = X \rightarrow re^{i\Phi} \quad Z = AX e^{i(\pi + \alpha)} \rightarrow re^{i(\Phi + 2\pi)}$$

mit

$$A = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_2|}.$$

Durch Logarithmieren der obigen Gleichungen folgt:

$$\log X = a \log r - b \Phi + i(b \log r + a \Phi)$$

$$\log AX + i(\pi + \alpha) = a \log r - b(\Phi + 2\pi) + i(b \log r + a(\Phi + 2\pi)).$$

Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir

$$\log A = \pi(2a - 2b) - i(\pi + \alpha)$$

und daraus

$$a = \frac{\alpha + \pi}{2\pi} \quad b = -\frac{\log A}{2\pi}.$$

Legen wir in der z -Ebene einen Kreis mit dem Radius r , so entspricht diesem in der Z -Ebene ein Spiralbogen zwischen

$$Z = r^{\frac{\alpha + \pi}{2\pi} \beta} \quad \text{und} \quad Z = r^{\frac{\alpha + \pi}{2\pi} \cdot \beta} \cdot A e^{i(\alpha + \beta)}$$

mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{\alpha + \pi} \right)^2.$$

Zur Bestimmung der Ordnung beachten wir, daß jeder Wert a in einem Periodenparallelogramm genau 2 mal angenommen wird. Die Fläche eines Parallelogramms beträgt $2\pi \cdot \operatorname{Re} \Omega_1$. Die Anzahl der n Werte im Kreise $|Z| = R$ bzw. $|z| = r$ nennen wir nach NEVANLINNA $n(R, a)$ bzw. $n(r, a)$ und erhalten dafür

$$n(R, a) = \frac{R^2}{\frac{4\pi}{\alpha} \cdot \operatorname{Re} \Omega_1} (1 + \varepsilon(R)), \quad \varepsilon(R) \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Wegen

$$N(r, \infty) = c_1 R^2 (1 + \varepsilon(r)) = c_2 r^{\frac{\alpha + \pi}{\pi}} (1 + \varepsilon(r))$$

und $m(r, \infty) = 0$ (1) gilt für die NEVANLINNASche Charakteristik

$$T(r) = c_2 r^{\frac{\alpha + \pi}{\pi}} (1 + \varepsilon(r)).$$

Für die Ordnung λ der erzeugenden Funktion eines Viertelsende ergibt sich die Hauptformel:

$$\lambda = \frac{\alpha + \pi}{\pi} \beta.$$

3. Ergebnisse.

Aus der Hauptformel schließen wir, daß λ jeden reellen Wert zwischen 1 und unendlich annehmen kann.

Spezialfälle:

1. Für $\alpha \rightarrow 0$; $\beta \rightarrow 1$ strebt $\lambda \rightarrow 1$. Dieser Grenzwert wird aber nicht angenommen, da sonst $\operatorname{Re} \Omega_1 = 0$ würde.

2. Für $\alpha \rightarrow \pi/2$ wird $\Omega_1 > 0$, die Periodenparallelogramme werden zu Rechtecken. Für λ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda &= 3/2 \beta & \text{für } |\Omega_1| = |\Omega_2| \text{ also} \\ \lambda &= 3/2. \end{aligned}$$

3. Für $\alpha \rightarrow \pi$ strebt $\lambda \rightarrow 2 \beta$ und für $|\Omega_1| = |\Omega_2|$ wird $\lambda \rightarrow 2$.

Dies ist aber gerade die Ordnung des doppeltperiodischen Endes der Fig. 2a.

Bei gegebenem α und λ können wir aus der Hauptformel auf die Periode Ω_1 schließen nach

$$\Omega_1 = 2\pi e^{\sqrt{\lambda \pi (\alpha + \pi) - (\alpha + \pi)^2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Literatur.

- [1] AHLFORS, L.: Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. 6 Nr. 9 (1932). — [2] DENJOY, A.: Sur les fonctions entières de genre fini. C. r. Acad. Sci. Paris 145, 106 (1907). — [3] KÜNZI, H.: Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre. Comm. Math. Helv. 29, Nr. 3 (1955). — [4] PÖSCHL, K.: Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen RIEMANNscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden. Math. Ann. 123, 79–95 (1951). — [5] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N.F. 1, Nr. 9, (1936). — [6] WITTICH, H.: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. 122, 37–46 (1950).

(Eingegangen am 21. August 1954.)

Storage Problems.

By

J. M. HAMMERSLEY in Oxford*).

The general treatment of storage problems in economic theory (for instance, how large should a warehouse be to meet specified conditions of supply and demand?) leads to some rather sophisticated mathematics. The purpose of this note is to show, by means of an illustration, how some of these problems may be resolved by more familiar analytical tools. We shall, in fact, employ nothing more elaborate than distribution functions and characteristic functions, which are tools encountered in most statistical textbooks. For the sake of completeness, we begin by recalling briefly those properties of these functions which we shall need.

The distribution function $F(x)$ associated with a random variable ξ is defined to be the probability of the statement $\xi \leq x$. $F(x)$ is a non-decreasing function of x ; and it is continuous on the right, that is to say $F(x) = F(x+0) = \lim_{y \rightarrow 0+} F(x+y)$. It is not however necessarily continuous on the left, that is to say we may perhaps have $F(x) \neq F(x-0) = \lim_{y \rightarrow 0+} F(x-y)$. With the distribution function $F(x)$ there is associated the characteristic function

$$(1) \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Obviously F determines ψ uniquely, by virtue of this definition; and it is shown in the textbooks that the converse is true as well. In fact, we have the inversion formula

$$(2) \quad F(x+h) - F(x-h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \sin ht e^{-itx} \psi(t) dt/t$$

whenever F is continuous at the points $x \pm h$.

The specific problem we use for illustration is the following. A wholesale trader has a warehouse of capacity c , which he restocks completely each time the manufacturer is able to deliver supplies to him. The time intervals between successive deliveries by the manufacturer are independent of each other and $\varphi(t)$ is the characteristic function of their common distribution. In any small interval of time $\delta\tau$, there is a probability $\lambda\delta\tau + o(\delta\tau)$ (as $\delta\tau \rightarrow 0+$) that a retail trader will demand supplies from the warehouse, where λ is a constant and this probability is independent of time and of the corresponding probabilities in all other elementary time intervals. The amount demanded by a retailer is independent of the time of that demand and also of the times and

*) Lectureship in the Design and Analysis of Scientific Experiment University of Oxford.

amounts of all other demands by himself and other retailers, and has a characteristic function $\psi(t)$. What is the probability that the warehouse will not become empty during the period between one delivery and the next, assuming that retailers are supplied immediately upon demand either with their full demand or with as large a part of it as the then existing stocks permit?

The formulation of this problem has been to some extent determined by the analytical technique we wish to illustrate; but it is, nevertheless, a reasonably general formulation. For instance the time distribution between the manufacturer's deliveries is quite arbitrary, and, of course, includes as a particular case a deterministic supply scheme: thus, if the manufacturer delivers at fixed regular intervals T , we merely take $\varphi(t) = e^{itT}$. The same considerations apply to the amounts demanded by retailers. The main restrictions lie in the various assumptions of independence. Thus the formulation is quite inadequate when, say, shortage threatens the general market so that retailers as a whole simultaneously clamour for supplies. On the other hand, the independence clauses are probably satisfactory when the wholesaler is supplying a fairly large number of retailers under stable market conditions.

In solving the problem, let us write $G(\tau)$ for the cumulative distribution function of the time interval τ between successive deliveries by the manufacturer; and let $F(x)$ be the cumulative distribution function of the amount x demanded by a randomly selected retailer. This method of defining $F(x)$ makes due allowance for the possibility that the various retailers concerned will not necessarily engage in businesses of similar size or organization: so that, if we had instead fixed our attention on two specific retailers, their demand cumulative distribution functions might have been quite different in that, say, one of them orders large quantities at regular intervals while the other orders small quantities at irregular intervals. By definition of $\varphi(t)$ and $\psi(t)$ we have

$$(3) \quad \varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{it\tau} dG(\tau)$$

and

$$(4) \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

We write $-\infty$ for the lower limit of integration in (4) and not zero, since we may wish to allow for a negative demand corresponding to a return of material by a retailer to the wholesaler: it is assumed that the wholesaler can and will accept returns without limit, even when his warehouse is already full. Let $F_n(x)$ denote the n -fold convolution of $F(x)$, i.e. the distribution function of the sum of n independent demands. The characteristic function of $F_n(x)$ is then $[\psi(t)]^n$. The probability that exactly n demands are made in a specified time interval is $e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n/n!$; and hence the distribution function of the total demand in this interval is

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n F_n(x)/n!,$$

where

$$F_0(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

since, if no demands are made, the amount demanded will be nil. Therefore the cumulative distribution function of the amount demanded between any two successive manufacturer's deliveries is

$$(5) \quad H(x) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} F_n(x) dG(\tau)$$

whose characteristic function is

$$\begin{aligned} (6) \quad w(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} F_n(x) dG(\tau) \\ &= \int_0^{\infty} dG(\tau) e^{-\lambda \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) \\ &= \int_0^{\infty} dG(\tau) e^{-\lambda \tau} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \tau \psi(t)]^n}{n!} \right\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau + \lambda \tau \psi(t)} dG(\tau) \\ &= \int_0^{\infty} e^{i\tau(i\lambda[1-\psi(t)])} dG(\tau) \\ &= \varphi\{i\lambda[1-\psi(t)]\}. \end{aligned}$$

Hence by the inversion formula (2) with $x=0$ and $h=\gamma$

$$(7) \quad H(\gamma) - H(-\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \gamma t}{t} \varphi\{i\lambda[1-\psi(t)]\} dt,$$

provided that H is continuous at $\pm \gamma$. Let us now suppose that, between any two successive deliveries by the manufacturer, the total amount returned to the wholesaler by the retailers never exceeds the amount supplied from the warehouse by as much as the whole capacity of the warehouse. Then $H(-c) = 0$; and so $H(-c+0) = 0$, since H is continuous on the right. In (7) let $\gamma \rightarrow c-0$ through continuity points of H , which may be done because H is continuous on the right. We find

$$\begin{aligned} (8) \quad H(c-0) &= \lim_{\gamma \rightarrow c-0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \gamma t}{t} \varphi\{i\lambda[1-\psi(t)]\} dt \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow c-0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma t}{t} [\varphi\{i\lambda[1-\psi(t)]\} + \varphi\{i\lambda[1-\psi(-t)]\}] dt, \end{aligned}$$

which is the required probability that the warehouse will not become empty between two successive deliveries.

We have not yet justified the rearrangements in the manipulation of (6). To do so we observe that, when t is real, the infinite series is absolutely convergent. Further the integrand is bounded and the integrations are with respect to distribution functions, which are also bounded between 0 and 1. Hence the multiple integral exists; and therefore is equal (by FUBINI's theorem on the interchange of the order of integration) to either of the repeated integrals. Moreover the imaginary part of $i\lambda[1 - \psi(t)]$ is non-negative since $|\psi(t)| \leq 1$ for real t ; and hence the final integration is permissible, since φ is analytic in the upper half of the complex plane in view of the lower limit of integration in (3).

When φ and ψ are specified, the right-hand side of (8) can be evaluated numerically if not analytically; and thus we can plot $H(c-0)$ against c , namely the operating characteristic of the warehouse, which will yield the desired conclusions on the optimum size c .

References.

- DVORETZKY, A., J. KIEFER and J. WOLFOWITZ: "The inventory problem". *Econometrica* **20**, 187—222, 450—466 (1952). — KENDALL, D. G.: "Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain". *Ann. Math. Statist.* **24**, 338—354 (1953). — LINDLEY, D. V.: "The theory of queues with a single server." *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 277—289 (1952). — SMITH, W. L.: "Asymptotic renewal theorems." *Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A)* **64**, 9—48 (1954).

(Eingegangen am 15. September 1954.)

Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten.

Von

ERWIN KREYSZIG in Münster i. W.

1. Einleitung.

In der algebraischen Geometrie kennt man seit längerer Zeit das Verfahren, eine Funktion $f(z_1, z_2)$ zweier komplexer Variablen, die in einem Punkte P eine außerwesentlich singuläre Stelle zweiter Art¹⁾ besitzt, sich also dort als Quotient zweier holomorpher und teilerfremder Funktionen darstellen läßt, die beide im Punkt P verschwinden, eindeutig zu machen. Hierzu entfernt man auf dem Riemannschen Gebiete von f (dem zweidimensionalen²⁾ Analogon der Riemannschen Fläche) den Punkt P und ersetzt ihn mittels einer oder mehrerer quadratischer Transformationen durch eine oder mehrere eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten, deren jede homöomorph einer komplexen projektiven Geraden ist. H. HOFF³⁾ hat diese Methode auf topologische Fragen übertragen, indem er für zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten M^2 den sog. „ σ -Prozeß im Punkte $P \in M^2$ “ definierte. Dieser Prozeß besteht darin, daß der Punkt P ohne Änderung der komplexen Struktur von $M^2 - P$ durch eine komplexe Mannigfaltigkeit $S^1(P)$, die einer komplexen projektiven Geraden homöomorph ist, derart ersetzt wird, daß der dadurch entstehende Raum $'M^2 = (M^2 - P) \cup S^1(P)$ wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Es handelt sich also um einen lokalen Vorgang im Punkte P . Der Repräsentant von $S^1(P)$ ist das Büschel der Linienelemente mit dem Träger P . — H. BEHNKE und K. STEIN⁴⁾ haben dann kürzlich den Begriff der Modifikation einer komplexen Mannigfaltigkeit M^n und eines Riemannschen Gebietes eingeführt, dem sich der σ -Prozeß als Sonderfall unterordnet. Es handelt sich darum, einen abgeschlossenen Teil N aus M^n herauszunehmen und dann zu fragen, in welcher Weise der Rest $M^n - N$ zu einer umfassenden Mannigfaltigkeit $'M^n$ ergänzt werden kann, also um ein Fortsetzungsproblem⁵⁾.

¹⁾ Vgl. z. B. H. BEHNKE und P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. 3, 3 (1934).

²⁾ Die Dimension bezeichnet durchweg die Anzahl der komplexen Veränderlichen. Die (hier nicht interessierende) topologische Dimension des Riemannschen Gebietes von f ist also 4.

³⁾ H. HOFF: Über komplexe-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. Roma 10, 169—182 (1951).

⁴⁾ H. BEHNKE und K. STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124, 1—16 (1951). Den Verfassern danke ich sehr für die Anregung und Förderung der vorliegenden Untersuchungen.

⁵⁾ Bezüglich entprechender Fragen bei Funktionen von einer komplexen Veränderlichen siehe S. BOCHNER: Fortsetzung Riemannscher Flächen, Math. Ann. 98, 406—421 (1927); M. HEINS: On the continuation of a Riemann surface, Ann. of Math. 43, 280—297 (1942); L. SARIO: Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rande, Ann. Acad. Sci. fenn. No. 50 (1948).

Genauer:

(Def. 1) M^n und $'M^n$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten. $N \subset M^n$ und $'N \subset 'M^n$ seien abgeschlossene Mengen. Dann heißt $'M^n$ eine Modifikation von M^n in N , wenn

1. eine eindeutige analytische Abbildung T' von $'M^n - 'N$ auf $M^n - N$ existiert und wenn es

2. zu jeder beliebigen Umgebung $U(N)$ und zu jedem Punkte $'P \in 'N$ eine Umgebung gibt, deren Durchschnitt mit $'M^n - 'N$ in $U(N) - N$ abgebildet wird.

Die besondere Bedeutung des Modifikationsbegriffes erhellt unmittelbar, wenn man sich die Frage vorlegt, in welcher Weise der n -dimensionale komplexe Raum C^n der Veränderlichen z_1, z_2, \dots, z_n abgeschlossen werden kann; durch diese Frage wurden die genannten Verfasser angeregt, den Modifikationsbegriff einzuführen. Sie gaben eine wichtige und tief liegende Erweiterung eines Satzes von T. RADO⁶⁾ und bewiesen mit deren Hilfe den folgenden Satz: Das Riemannsche Gebiet $'G^n$ sei eine Modifikation des Riemannschen Gebietes G^n in der kompakten Menge $N \subset G^n$. In einer Umgebung $U(N)$ existiere eine eindeutige holomorphe Funktion, die nirgends identisch verschwindet und überall auf N den Wert Null annimmt. Dann unterscheidet sich $'G^n$ von $G^n - N$ nur durch Stücke eines analytischen Gebildes. — Sodann hat F. HIRZEBRUCH⁷⁾ das Verfahren der Modifikation mit großem Erfolg verwendet, um zweidimensionale Riemannsche Gebiete zu komplexen Mannigfaltigkeiten zu machen; modifiziert wird hierbei in den (in diesem Fall isoliert liegenden) nichtuniformisierbaren Punkten. Ob dieses Problem für höhere Dimensionen stets eine Lösung zuläßt, ist noch unbekannt. Die topologischen Prozesse korrespondieren dabei mit algebraisch-geometrischen, die von H. JUNG⁸⁾ herrühren. — Aus alledem ergibt sich die fundamentale Wichtigkeit des neuen Prozesses der Modifikation.

Bei verschiedenen Problemen ist es sehr oft möglich, eine stetige bzw. eine analytische Abbildung der modifizierten Mannigfaltigkeit in die ursprüngliche anzugeben. Man ist dann in der Lage, hieraus eine Reihe wesentlicher Folgerungen zu erschließen. Deshalb gilt unsere Untersuchung besonderen Formen der Modifikation, die wir folgendermaßen definieren:

(Def. 2) Läßt sich bei einer Modifikation nach Def. 1 die eindeutige analytische Abbildung T' des „Restbereiches“ $'M^n - 'N$ auf den Restbereich $M^n - N$ zu einer stetigen bzw. analytischen bzw. eigentlichen Abbildung T von $'M^n$ in M^n fortsetzen, so heiße die betreffende Modifikation stetig bzw. analytisch bzw.

⁶⁾ T. RADO: Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. 20, 1—6 (1924).

⁷⁾ F. HIRZEBRUCH: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Diss. Münster 1950. Vgl. auch das Exposé eines Vortrages von H. CARTAN im Séminaire Bourbaki, Fonctions et variétés algébroides, d'après HIRZEBRUCH, Dezember 1953.

⁸⁾ H. JUNG: Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$. J. reine u. angew. Math. 133, 289—314 (1908). Vgl. auch die Literaturangaben bei B. L. VAN DER WAERDEN: Die Bedeutung des Bewertungsbegriffes für die algebraische Geometrie. Jber. dtsh. Math. Ver. 52, 161—172 (1942).

eigentlich. T heißt die zu der Modifikation gehörende Modifikationsabbildung. Ist T eindeutig und analytisch, so heißt die Modifikation trivial. Dabei bezeichnet man eine Abbildung als *eigentlich* (propre im Sinne von N. BOURBAKI^{*)}), wenn das Urbild jeder kompakten Menge im Bildbereich wieder kompakt ist. Gemäß Forderung (2) von Definition 1 wird ' N in N abgebildet.

Wir können dann für diese besonderen Formen der Modifikation folgende Eigenschaften beweisen: Eine analytische Modifikation ist trivialerweise immer eine stetige. Ist N eine analytische Menge, so gilt auch die Umkehrung, und ' N muß ebenfalls eine analytische Menge sein, wie Satz 1 besagt. Aus den Sätzen 2 bis 5 und 7 ergibt sich, daß die Ringe der holomorphen und die Körper der meromorphen Funktionen von M^n und ' M^n isomorph sind und daß die natürliche Isomorphie der Verbände der analytischen Mengenkeime von $M^n - N$ und ' $M^n - N$ zu einer Homomorphie des genannten Verbandes von ' M^n auf denjenigen von M^n erweitert wird, wenn eine eigentliche analytische Modifikation vorliegt. Der Hilfssatz 6 besagt u. a., daß bei derartigen Modifikationen eine Abbildung von ' M^n auf M^n vorliegt. Sind überdies N und ' N irreduzible analytische Mengen gleicher Dimension, so ist nach Satz 8 die betreffende Modifikation trivial.

Im zweiten Teil der Arbeit, der die Abschnitte 3 und 4 umfaßt, wird gezeigt: Die verschiedenen n -dimensionalen einfach oder mehrfach projektiven Räume, die man durch die Abschließung des n -dimensionalen affinen Raumes unter Zugrundelegung verschiedener Transformationsgruppen gewinnen kann¹⁾, gehen durch eine Folge von analytischen Modifikationen, die wir unter dem Begriff der mehrfachen Modifikation zusammenfassen, in ganz bestimmter Weise auseinander hervor, wie in Satz 13 angegeben ist. Zur Behandlung dieser verschiedenen Abschließungen vom Standpunkt der Modifikationen aus definieren wir den „ $\sigma^{n,k}$ -Prozeß“, eine Verallgemeinerung des HOPFSCHEN σ -Prozesses. Das algebraisch-geometrische Analogon dieses Prozesses ist als monoidale Transformation bekannt. Der $\sigma^{n,k}$ -Prozeß ist nach Satz 9 eine analytische Modifikation und nach Satz 10 koordinateninvariant. Satz 11 betrifft die Auswirkungen des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses auf Teilmannigfaltigkeiten von M^n . Wie sich die Aussagen der Sätze 1 bis 6 auf mehrfache Modifikationen übertragen lassen, ist in Satz 12 angegeben.

2. Das Verhalten holomorpher und meromorpher Funktionen und analytischer Mengen bei Modifikationen.

Abkürzend setzen wir $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z)$ und $(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = (z')$. Eine analytische Modifikation ist immer eine stetige. Die Umkehrung gilt, wenn N eine analytische Menge ist:

Satz 1. ' M^n sei eine stetige Modifikation von M^n in N . Ist N eine analytische Menge, so ist ' N eine ebensolche, und ' M^n ist eine analytische Modifikation von M^n . (Für die Bezeichnungen vgl. Def. 1 und 2.)

^{*)} N. BOURBAKI: Topologie generale, Kap. I.

Beweis. $\bar{U}(P)$ sei eine Koordinatenumgebung eines Punktes $P \in N$ mit den Koordinaten (z) . Jedes Urbild $'P$ von P gehört zu $'N$. Die Modifikationsabbildung T ist stetig. Also gibt es zu $\bar{U}(P)$ eine Umgebung $'U('P)$, deren Bild $U(P)$ in $\bar{U}(P)$ liegt. $'U('P)$ liegt dann in einer Koordinatenumgebung von $'M^n$; deren Koordinaten bezeichnen wir mit (z) . — $U(P) \cap N$ ist nach Voraussetzung identisch mit dem gemeinsamen Nullstellengebilde von in $U(P)$ holomorphen Funktionen $g_s(z) \equiv 0$, $s = 1, 2, \dots, S$. Hätte $'N$ innere Punkte, so enthielte jede Umgebung $'U('Q)$ eines beliebigen Randpunktes $'Q \in 'N$ innere Punkte von $'N$. Außerdem ist sicher $'U('Q) \cap ('M^n - 'N) \neq \emptyset$. Die Abbildung T^{-1} existiert im Rest $M^n - N$. Folglich haben wir in $'U \cap ('M^n - 'N)$ holomorphe Funktionen¹⁰⁾ $'g_s = g_s T$, die genau für diejenigen Punkte von $'M^n$ verschwinden, für deren Bildpunkte auch $g_s = 0$ wird. Die Voraussetzungen der BEHNKE-STEINSCHEEN Erweiterung des RADOSCHEN Satzes⁴⁾ sind also für alle Funktionen g_s erfüllt; dem Teilgebiet G' bei BEHNKE und STEIN entspricht hier ein in $'U - ('U \cap 'N)$ enthaltenes maximales Teilgebiet. Also sind die Funktionen $'g_s$ in ganz $'U$ holomorph fortsetzbar und haben genau $'N \cap 'U$ als gemeinsame Nullstellenmenge. $'N$ ist also analytisch in dem beliebig gewählten Randpunkte $'Q \in 'N$, besitzt also keine inneren Punkte. $'N$ ist abgeschlossen. $'N$ ist folglich eine analytische Menge und es liegt, wie behauptet, eine analytische Modifikation vor.

Satz 1 hat eine unmittelbare wesentliche

Folge: Ist $'M^n$ eine stetige Modifikation in der analytischen Menge N , so kann $'N$ niemals n -dimensional sein.

Da die Einsetzung einer holomorphen Funktion in eine ebensolche wiederum eine holomorphe Funktion liefert und da jede meromorphe Funktion lokal als Quotient zweier holomorpher Funktionen darstellbar ist, so folgt mit Hilfe von Satz 1 unmittelbar der

Satz 2. Ist $'M^n$ eine stetige Modifikation von M^n in der analytischen Menge N , so entspricht jeder in M^n holomorphen bzw. meromorphen Funktion $g(z)$ eine in $'M^n$ holomorphe bzw. meromorphe Funktion $'g(z)$ derart, daß die Beschränkung $'\bar{g}$ von $'g$ auf $'M^n - 'N$ und die Beschränkung \bar{g} von g auf $M^n - N$ analytisch äquivalent sind, $'\bar{g} = \bar{g} T$.

Die entsprechende Frage bezüglich einer in der modifizierten Mannigfaltigkeit $'M^n$ gegebenen Funktion stellen wir zurück, da wir zu ihrer Beantwortung die folgenden Sätze über die Fortsetzung analytischer Mengen heranziehen werden.

Satz 3. $'M^n$ sei eine stetige Modifikation von M^n in der analytischen Menge N . Dann existiert zu jeder analytischen Menge $A \subset M^n$ eine analytische Menge $'A \subset 'M^n$ derart, daß $'A \cap ('M^n - 'N)$ und $A \cap (M^n - N)$ analytisch äquivalent sind.

Beweis. $'M^n$ ist nach Satz 1 eine analytische Modifikation von M^n . Die Menge A ist in M^n lokal als gemeinsame Nullstellenmenge von Systemen holomorpher Funktionen umgebungsweise definiert, etwa in $U \subset M^n$ durch $F_k(z) = 0$, $k = 1, 2, \dots, K$. Nach Satz 2 existieren dann in $'U = T^{-1}U \subset 'M^n$ holomorphe Funktionen $'F_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$, deren Beschränkung auf

¹⁰⁾ Derartige Zusammensetzungen sind von rechts nach links zu lesen.

' $U \cap ('M^n - 'N)$ analytisch äquivalent zu der Beschränkung der Funktionen $F_k(z)$ auf $U \cap (M^n - N)$ ist und deren gemeinsames Nullstellengebilde in ' U eine analytische Menge ' $A \cap 'U$ mit den behaupteten Eigenschaften lokal definiert.

Wir benötigen nun den folgenden

Satz von R. REMMERT¹¹⁾. *Es sei T eine eigentliche analytische Abbildung der komplexen Mannigfaltigkeit ' M^n in die komplexe Mannigfaltigkeit M^n . Dann ist $T('M^n)$ eine in M^n analytische Menge. Hat T den Rang r , so hat $T('M^n)$ in jedem ihrer Punkte die Dimension r . Jede analytische Menge ' $A \subset 'M^n$ wird durch T auf eine analytische Menge A in M^n abgebildet.*

Aus diesem Satz und Satz 1 folgt der

Satz 4. *Ist ' M^n eine eigentliche Modifikation von M^n in der analytischen Menge N , so gibt es zu jeder analytischen Menge ' $A \subset 'M^n$ eine analytische Menge $A \subset M^n$ derart, daß $A \cap (M^n - N)$ und ' $A \cap ('M^n - 'N)$ analytisch äquivalent sind.*

Mit Hilfe des Satzes 4 gewinnen wir nun ein Gegenstück zu Satz 2. Für meromorphe Funktionen gilt

Satz 5. *' M^n sei eine eigentliche Modifikation von M^n in der analytischen Menge N . Dann gibt es zu jeder in ' M^n meromorphen Funktion ' $h(z)$ eine in M^n meromorphe Funktion $\bar{h}(z)$, deren Beschränkung $\bar{h}(z)$ auf $M^n - N$ analytisch äquivalent zu der Beschränkung ' $\bar{h}(z)$ von ' $h(z)$ auf ' $M^n - 'N$ ist, $\bar{h} = 'h T^{-1}$.*

Beweis. Nach Satz 1 liegt eine eigentliche analytische Modifikation vor, und ' N ist eine analytische Menge. Im Rest $M^n - N$ ist die Modifikationsabbildung T eineindeutig, also ist $\bar{h} = 'h T^{-1}$ eine dort meromorphe Funktion. Wäre \bar{h} nicht zu einer in M^n meromorphen Funktion h fortsetzbar, so müßte jede wesentliche Singularität $P \in N$ von h nach einem Satz von E. E. LEVI und F. HARTOGS¹²⁾ in einer Umgebung $U(P) \subset M^n$ einer oder mehreren $n - 1$ -dimensionalen Komponenten K von $N \cap U$ angehören, die nur aus wesentlichen Singularitäten von h bestünden. Wir zeigen, daß es kein derartiges K gibt. Bezeichnet F die Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von h in U , so ist h holomorph in " $U = U - (K \cup F)$ und wesentlich singular in jedem Punkte von $K \cap (U - F)$. Nach einem Satz von P. THULLEN¹³⁾ müßten dann alle a -Stellenflächen von h , mit Ausnahme höchstens eines Wertes $a = a_0$, jeden Punkt von $K \cap (U - F)$ als wesentliche Singularität besitzen. Dies ist unmöglich, weil die Urbilder dieser Flächen analytische Menge in dem Durchschnitt des Urbildes ' U von U mit dem Rest ' $M^n - 'N$ und damit nach Satz 3 in ganz ' U sind und diese nach Satz 4 als Bilder analytische Menge in M^n besitzen. Da P beliebig aus N gewählt war, so ist h nicht wesentlich singular in M^n .

' $P \in N$ heiße ein *nichttrivialer Punkt* bezüglich einer analytischen Modifikation ' M^n von M^n , wenn die Modifikationsabbildung T in keiner Umgebung

¹¹⁾ R. REMMERT: Holomorphe und meromorphe Abbildungen analytischer Mengen. Diss. Münster 1954.

¹²⁾ Vgl. H. BEHNKE und P. THULLEN, siehe Anm. 1, Kap. IV.

¹³⁾ P. THULLEN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 111, 137—157 (1935).

' $U(P)$ eineindeutig ist. Trifft diese Eigenschaft für jeden Punkt von ' N zu, so sagen wir, N wird in nichttrivialer Weise durch ' N ersetzt.

Die Beweise der Sätze 7 und 8 stützen sich auf den folgenden

Hilfssatz 6. *Ist ' M^n eine analytische Modifikation von M^n in N und wird N in nichttrivialer Weise durch ' N ersetzt, so ist ' N eine $n-1$ -dimensionale analytische Menge. Ist die Modifikation außerdem eigentlich, so gilt: a) Die Modifikationsabbildung T ist eine Abbildung von ' M^n auf M^n . b) N ist eine analytische Menge. c) Ist N reduzibel, so ist auch ' N reduzibel.*

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage ist klar. Zu a): ' N wird in N abgebildet. Wir zeigen, daß jeder Punkt Q von N Bildpunkt von Punkten ' Q von ' N ist. (Q_m) sei eine gegen $Q \in N$ konvergierende Folge von Punkten aus $M^n - N$. Diese ist mit Einschluß von Q eine kompakte Menge. Folglich ist $T^{-1}((Q_m) \cup Q)$ kompakt in ' M^n und enthält eine konvergente Teilfolge. Letztere konvergiert wegen der Eineindeutigkeit von T im Rest ' $M^n - N$ und der Separabilität der vorliegenden Mannigfaltigkeiten gegen einen Punkt ' $Q \in T^{-1}Q \subset 'N$ und nicht gegen einen Punkt $T^{-1}Q_m$. b) folgt aus Satz 4. Zu c): Jeder irreduziblen Komponente N_i von $N = \bigcup_i N_i$ entspricht nach

Satz 3 eine analytische Menge ' N_i als Urbild, und ' N_i wird auf N_i abgebildet. Da auch jeder Punkt $P \in N_k$, $P \notin N_i$, $i \neq k$, Bildpunkt von Punkten von ' N sein muß, aber nicht Bildpunkt von Punkten von ' N_i sein kann, so gibt es Punkte von ' N , die nicht zu ' N_i gehören, d. h., ' N muß reduzibel sein.

Die Umkehrung der Aussage c) kann falsch sein; man denke z. B. an den HOPFSCHEN iterierten σ -Prozeß³⁾, bei dem ein Punkt durch eine Anzahl komplexer Mannigfaltigkeiten ersetzt wird, die homöomorph einer komplexen projektiven Geraden sind. Das Gegenstück zu Satz 2 bildet bezüglich holomorpher Funktionen der

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5 gibt es zu jeder in ' M^n holomorphen Funktion ' $f(z)$ eine in M^n holomorphe Funktion $f(z)$, deren Beschränkung auf $M^n - N$ analytisch äquivalent zu der Beschränkung von ' $f(z)$ auf ' $M^n - N$ ist.*

Beweis. Nach Satz 1 liegt eine eigentliche analytische Modifikation vor. Nach Hilfssatz 6 ist die zugehörige Modifikationsabbildung eine Abbildung von ' M^n auf M^n , die ' N auf N abbildet. Nach Satz 5 kann $f(z)$ nicht wesentlich singular, sondern höchstens meromorph sein und hätte dann Pole und Unbestimmtheitsstellen auf N . Ist die Dimension von N kleiner als $n-1$, so ist f holomorph in M^n . Wir zeigen, daß f auch dann holomorph ist, wenn N die Dimension $n-1$ besitzt. Ad absurdum nehmen wir an, $P \in N$ sei ein (beliebiger) Pol von f . Es sei $U(P)$ eine kompakte Umgebung von P und ' $U(P)$ deren Urbild, wobei ' P ein Urbild des Punktes P ist. ' $U(P)$ ist kompakt. Einerseits wüchse nun f bei Annäherung an P gleichmäßig über alle Grenzen, während andererseits ' f in jeder Umgebung von ' P beschränkt bleibt. Dies kann nicht sein, da die Modifikationsabbildung analytisch ist. P kann also nicht Pol von f sein. Da P beliebig gewählt war, so besitzt f überhaupt keine Pole, ist also, wie behauptet, holomorph in M^n .

Man bemerkt, daß in Satz 4, 5 und 7 eine schärfere Voraussetzung als in Satz 2 und 3, nämlich die der Eigentlichkeit der Modifikation, notwendig ist.

Satz 3 und 4 besagen zusammen, daß unter den für ihre Gültigkeit notwendigen Voraussetzungen die natürliche Isomorphie der Verbände der analytischen Mengenkeime von $'M^n - N$ und $M^n - N$ zu einer Homomorphie des genannten Verbandes von $'M^n$ auf denjenigen von M^n erweitert werden kann. Aus Satz 2, 5 und 7 folgt die Isomorphie der Ringe der holomorphen und der Körper der meromorphen Funktionen in $'M^n$ und M^n .

Schließlich wollen wir ein Kriterium für das Vorliegen einer trivialen Modifikation angeben. Hierfür benötigen wir beim Beweis den Begriff des *gewöhnlichen Punktes* P einer m -dimensionalen analytischen Menge $N^m \subset M^n$. Ein solcher liegt vor, wenn das N^m (lokal) definierende Gleichungssystem in der Koordinatenumgebung $U(P)$ von P den Rang $n - m$ besitzt. Es gilt nun

Satz 8. *Ist $'M^n$ eine eigentliche analytische Modifikation von M^n in N und sind $'N$ und N beides irreduzible analytische Mengen gleicher Dimension, so liegt eine triviale Modifikation vor.*

Beweis. Nach Hilfssatz 6 ist die Modifikationsabbildung eine Abbildung von $'M^n$ auf M^n , die $'N$ auf N abbildet. Für Dimensionen von $'N$ (und N), die kleiner als $n - 1$ sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Hilfssatz 6. Es seien nun $'N$ und N beides $n - 1$ -dimensionale Mengen. Die Modifikationsabbildung T ist auf $'M^n - N$ eineindeutig, ihre Jacobische Determinante D könnte also höchstens auf $'N$ verschwinden, und dies müßte dann, da $'N$ irreduzibel sein soll, auf ganz $'N$ eintreten. Wir zeigen, daß dies nicht sein kann. Es gibt gewöhnliche Punkte von N , deren Urbilder gewöhnliche Punkte von $'N$ sind. Denn ist $P \in N$ ein gewöhnlicher Punkt, so liegen in einer (hinreichend kleinen) Umgebung $U(P)$ dieses Punktes nur gewöhnliche Punkte von N . $'P$ sei ein Urbild von P . Zu $'P$ existiert in einer Umgebung $'V('P)$ ein gewöhnlicher Punkt $'Q$ derart, daß $'Q$ samt einer Umgebung $'W('Q)$, die nur gewöhnliche Punkte von $'N$ enthält, in $U(P)$ abgebildet wird, so daß also das Bild $W(Q)$ von $'W('Q)$ ebenfalls nur gewöhnliche Punkte von N enthält. Für Punkte Q mit den soeben angegebenen Eigenschaften ist die Beschränkung der Modifikationsabbildung T auf $'N$ eine analytische Abbildung \bar{T} , und die zugehörige Jacobische Determinante \bar{D} kann, weil $'N$ und N beide $n - 1$ -dimensional sind, nach dem Satz von R. REMMERT (s. vorn) aus Dimensionsgründen nicht identisch verschwinden. Wir können $\bar{D} \neq 0$ im Punkte $'Q \in 'W('Q)$ annehmen. Sind $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n$ lokale Koordinaten in $W(Q)$ und ist $N \cap W$ durch

$$(1) \quad f(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) = 0$$

gegeben, so können wir, da $N \cap W$ aus lauter gewöhnlichen Punkten besteht, die Gleichung (1) z. B. nach \tilde{z}_n auflösen, $\tilde{z}_n = g(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{n-1})$, und in $W(Q)$ neue Koordinaten $z_s = \tilde{z}_s$, $s = 1, 2, \dots, n - 1$, $z_n = \tilde{z}_n - g(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{n-1})$ einführen. Dann ist $N \cap W$ durch $z_n = 0$ gegeben. Entsprechend kann man in $'W('Q)$ Koordinaten $'z_1, 'z_2, \dots, 'z_n$ so einführen, daß $'N \cap 'W('Q)$ durch $'z_n = 0$ gegeben ist und die Abbildung T die Gestalt $z_m = 'z_m$, $m = 1, 2, \dots, n - 1$, $z_n = F('z_1, 'z_2, \dots, 'z_n)$ hat. Hierbei kann aus der Potenzreihe $F('z_1, 'z_2, \dots, 'z_n)$

ein Faktor $'z_n^s$ derart herausgezogen werden, $F = 'z_n^s \bar{F}$, daß \bar{F} keine allen Gliedern gemeinsame Potenz von $'z_n$ mehr enthält. In dem durch $'z_m = 'z_m(0) = \text{konst}$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, gegebenen eindimensionalen Ebenenstück, das $'N \cap 'W$ punkthaft schneidet, muß die Abbildung außerhalb dieses Schnittpunktes eindeutig sein. Dies kann nur eintreten, wenn in

$$F = a_{sn}('z_1, 'z_2, \dots, 'z_{n-1}) 'z_n^s + \dots$$

$s = 1$ ist. Es hat also die zu T gehörige Jacobische Determinante D nun die Gestalt

$$D = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \bar{F} + 'z_n \frac{\partial \bar{F}}{\partial 'z_n} \end{vmatrix} = \bar{F} + 'z_n \frac{\partial \bar{F}}{\partial 'z_n},$$

wobei alle nicht explizit angegebenen oder nicht durch Punkte gekennzeichneten Elemente von D verschwinden. Für $'z_n = 0$ wird $D = \bar{F}$. Damit D überall auf $'N$ verschwindet, müßte \bar{F} einen Faktor $'z_n$ enthalten, was nach obigem nicht zutrifft. D kann also überhaupt nicht verschwinden, die Modifikation ist trivial.

3. Der $\sigma^{n,k}$ -Prozeß.

War das bisherige allgemeiner Natur, so definieren wir nun eine spezielle analytische Modifikation, eine Verallgemeinerung des von H. HOPF³⁾ eingeführten σ -Prozesses, die wir als „ $\sigma^{n,k}$ -Prozeß“ bezeichnen. Dieser Prozeß, der ein Analogon zu der aus der algebraischen Geometrie bekannten monoidalen Transformation darstellt, ist u. a. geeignet, die eingangs formulierte Frage nach der verschiedenartigen Abschließbarkeit des n -dimensionalen affinen komplexen Raumes C^n vom Standpunkt der Modifikationen aus zu beantworten. Wie gezeigt wird, kann man mit seiner Hilfe jede k -dimensionale irreduzible singularitätenfreie analytische Menge N^k , $0 \leq k \leq n-1$, in einer komplexen Mannigfaltigkeit M^n durch einen $n-1$ -dimensionalen Faserraum mit k -dimensionaler Basis und einem $n-k-1$ -dimensionalen projektiven Raum als Faser in der Weise ersetzen, daß das Ergebnis $'M^n$ dieses Vorganges eine analytische Modifikation von M^n in N^k , also insbesondere wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Er gilt entsprechend auch für reell-analytische Mannigfaltigkeiten. Bei der Bezeichnung „ $\sigma^{n,k}$ “ ist also k die Dimension der zu ersetzenden Menge N^k und n die der Mannigfaltigkeit, in der N^k liegt. — Dabei heißt eine analytische Menge $N^k \subset M^n$ *singularitätenfrei*, wenn sie nur aus gewöhnlichen Punkten besteht. Dann gibt es in jeder Umgebung U , $U \cap N^k = N_U^k \neq \emptyset$, Koordinaten, bezüglich deren N_U^k durch $'z_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, n-k$, gegeben ist. Diese nennen wir „*bezüglich N_U^k ausgezeichnete Koordinaten*“.

(A) Die Definition des $\sigma^{n,0}$ -Prozesses.

Wir definieren zuerst den $\sigma^{n,0}$ -Prozeß, der eine Modifikation einer n -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit in einem Punkt 0 ist, und führen später

die Definition für allgemeines k auf diesen Sonderfall zurück. 0 sei der Nullpunkt einer Koordinatenumgebung $U^h \subset M^h$ mit den lokalen Koordinaten z_1, z_2, \dots, z_h . S^{h-1} sei ein $h-1$ -dimensionaler projektiver Raum mit den homogenen Koordinaten p_1, p_2, \dots, p_h . Wir bilden den Produktraum $P^{2h-1} = U^h \times S^{h-1}$, dessen Punkte $P = (U; S)$, $U \in U^h$, $S \in S^{h-1}$, dann die Koordinaten $(z_1, \dots, z_h; p_1, \dots, p_h)$ besitzen. In P^{2h-1} ist durch die Forderung

$$(1) \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_h \\ p_1, p_2, \dots, p_h \end{pmatrix} = 1$$

eine irreduzible analytische Menge H definiert. H ist h -dimensional und ist singularitätenfrei in P^{2h-1} eingebettet, wie man sieht, wenn man (1) in seiner einfachsten Form

$$(1') \quad z_i p_h - z_h p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, h-1,$$

schreibt. Die natürliche Projektion T von P^{2h-1} auf seinen ersten Faktor U^h induziert eine Projektion T_H von H auf U^h . T_H ist eineindeutig für $U^h - 0$ und bildet $0 \times S^{h-1}$ auf 0 ab. Die modifizierte Umgebung $'U^h$ ist definiert als die Menge H , wobei Punkte von H und U^h zu identifizieren sind, die einander vermöge der Projektion T_H entsprechen. Das heißt, durch den $\sigma^{h,0}$ -Prozeß wird der Nullpunkt $0 \in U^h$ durch einen $n-1$ -dimensionalen projektiven Raum S^{h-1} ersetzt und sonst nichts verändert.

Der $\sigma^{h,0}$ -Prozeß läßt die folgende *geometrische Deutung* zu: Er bewirkt, daß der Nullpunkt $0 \in U^h$ durch das Bündel B aller Linienelemente mit dem Trägerpunkt 0 ersetzt wird. B ist einem $h-1$ -dimensionalen projektiven Raum isomorph.

(B) Satz 9. Der durch einen $\sigma^{h,0}$ -Prozeß aus M^h entstehende Raum $'M^h$ ist eine analytische Modifikation von M^h in einem Punkt $0 \in M^h$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß $'M^h$ eine komplexe Mannigfaltigkeit bildet, und die analytische Modifikationsabbildung von $'M^h$ in M^h ist anzugeben. — Es gelten die vorhergehenden Bezeichnungen. — In einer Umgebung $V(P)$ eines Punktes $P \in H \subset P^{2h-1}$ sei etwa $p_h \neq 0$. Dann setzen wir

$$(2) \quad s_j = \frac{p_j}{p_h}, \quad p_h \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, h-1.$$

So gewinnen wir in $V(P)$ lokale Koordinaten $(z_1, z_2, \dots, z_h; s_1, s_2, \dots, s_{h-1})$. Aus (1') folgt dann unmittelbar die koordinatenmäßige Darstellung der Projektion

$$(3) \quad T_H: \quad z_j = z_h s_j = z_h \frac{p_j}{p_h}, \quad p_h \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, h-1.$$

Diese stellt nach Definition zugleich die Modifikationsabbildung von $'U^h$ auf die ursprüngliche Umgebung U^h dar. $(s_1, s_2, \dots, s_{h-1}, z_h)$ ist also ein lokales Koordinatensystem in $'U^h$. Die übrigen der insgesamt h -Systeme in $'U^h$ erhält man, indem man in (2) ein anderes $p_m \neq 0$, $m = 1, 2, \dots, h-1$, annimmt. $U - 0$ ist das Restgebiet der Modifikation. Die Koordinateninvarianz des Modifikationsprozesses wird später und dann gleich für allgemeine Werte von k gezeigt.

(C) Die Definition des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses für allgemeines k , $0 \leq k \leq n-1$.

$N^k \subset M^n$ sei eine singularitätenfreie irreduzible k -dimensionale analytische Menge, $U \subset M^n$ eine Koordinatenumgebung mit den bezüglich $N_U^k = N^k \cap U$ ausgezeichneten Koordinaten z_1, z_2, \dots, z_n , also N_U^k durch

$$(4) \quad z_1 = z_2 = \dots = z_{n-k} = 0$$

in U lokal gegeben. Abkürzend setzen wir im folgenden

$$(5) \quad n - k = h.$$

Da $N^k \subset M^n$ lokal gegeben ist, müssen wir den $\sigma^{n,k}$ -Prozeß, den wir nun definieren, zu Definitionszwecken in eine Anzahl von Teilprozesse aufgliedern, die je in einer Koordinatenumgebung ausgeführt werden, die mit N^k nicht-leeren Durchschnitt hat. Es genügt, eine davon, etwa U , zu betrachten. Den in U ausgeführten Prozeß bezeichnen wir als $\sigma_U^{n,k}$ -Teilprozeß.

Durch die Beziehung $z_{h+1} = z_{h+2} = \dots = z_n = 0$ ist ein h -dimensionales analytisches Ebenenstück $U^h \subset U$ festgelegt, das mit N^k genau den Nullpunkt $0 \in N^k$, gegeben durch $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$, gemeinsam hat. Wir können U als Produkt

$$(6) \quad U = N_U^k \times U^h$$

wählen. Der $\sigma_U^{n,k}$ -Teilprozeß besteht darin, daß in dem Ebenenstück $U^h \subset U$ ein $\sigma^{h,0}$ -Prozeß bezüglich 0 ausgeführt wird, wodurch U^h in das modifizierte Ebenenstück $'U^h$ übergeht, das sich von U^h nur dadurch unterscheidet, daß statt des Punktes $0 \in U$ ein $h-1$ -dimensionaler projektiver Raum S^{h-1} eingesetzt ist. So haben wir vermöge (6) die modifizierte Umgebung $'U$ unmittelbar in der Form

$$(7) \quad 'U = N_U^k \times 'U^h$$

und den statt N_U^k eingesetzten Raum

$$'N_U^{n-1} = N_U^k \times S^{h-1}.$$

Wegen (7) und (4) bildet $(s_1, s_2, \dots, s_{h-1}, z_h, z_{h+1}, \dots, z_n)$ ein lokales Koordinatensystem in der modifizierten Umgebung $'U$, und die übrigen der insgesamt h Systeme erhält man wie in (B).

So wird N^k infolge des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses, d. h. infolge der Gesamtheit der lokalen Teilprozesse, durch einen $n-1$ -dimensionalen Faserraum $'N^{n-1}$ mit der k -dimensionalen Basis N^k und einem $h-1$ -dimensionalen projektiven Raum S^{h-1} als Faser ersetzt. — Im Durchschnitt $U_i \cap U_j$ zweier lokaler Koordinatenumgebungen mit der Eigenschaft $U_i \cap U_j \cap N^k \neq \emptyset$ führen beide Teilprozesse zu Ergebnissen, die analytisch homöomorph sind: Die eindeutige holomorphe Koordinatentransformation in $U_i \cap U_j$, die wir mit B bezeichnen wollen, hat im Rest $(U_i - 'N_{U_i}^{n-1}) \cap (U_j - 'N_{U_j}^{n-1})$ eine ebensolche Transformation A' zwischen den lokalen Koordinaten der modifizierten Umgebungen $'U_i$ und $'U_j$ zur Folge, die sich zu einer in ganz $'U_i \cap 'U_j$ eindeutigen holomorphen Koordinatentransformation fortsetzen läßt, wie sogleich gezeigt wird.

Damit gilt in Erweiterung von Satz 9 der

Satz 9'. Der durch einen $\sigma^{n,k}$ -Prozeß aus M^n entstehende Raum $'M^n$ ist eine analytische Modifikation von M^n in N^k .

Aus (A) folgt, daß sich der $\sigma^{n,k}$ -Teilprozeß geometrisch deuten läßt als der Ersatz der Menge N_U^k durch das Bündel C aller $k+1$ -dimensionalen analytischen Ebenenstücke, die N_U^k enthalten und mit Punkten $Q \in U - N_U^k$ verbinden. C ist isomorph dem $h-1$ -dimensionalen komplexen projektiven Raum S^{h-1} .

(D) Die Koordinateninvarianz des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses.

Satz 10. Der $\sigma^{n,k}$ -Prozeß ist unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten auf M^n .

Beweis. Eine Umgebung eines Punktes $P \in N^k \subset M^n$ versehen wir auf zwei verschiedene Weisen mit bezüglich N^k ausgezeichneten Koordinaten (z_1, z_2, \dots, z_n) bzw. (y_1, y_2, \dots, y_n) und bezeichnen sie dann mit U bzw. \bar{U} . N_U^k ist in U durch

$$(9) \quad z_1 = z_2 = \dots = z_h = 0$$

und in \bar{U} , wo wir diese Menge mit $N_{\bar{U}}^k$ bezeichnen, durch

$$(10) \quad y_1 = y_2 = \dots = y_h = 0$$

gegeben. Es existiert eine eindeutige holomorphe Koordinatentransformation

$$(11) \quad B: y_r = f_r(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Es seien $'U$ bzw. \bar{U} die modifizierten Umgebungen und [vgl. (2)]

$$(12) \quad T_H: z_j = s_j z_h = \frac{p_j}{p_h} z_h, \quad p_h \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, h-1,$$

bzw.

$$(13) \quad \bar{T}_H: y_j = t_j y_h = \frac{q_j}{q_h} y_h, \quad q_h \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, h-1,$$

die zugehörigen Modifikationsabbildungen, wobei q_1, q_2, \dots, q_h die homogenen Koordinaten der Faser \bar{S}^{h-1} des statt N_U^k eingesetzten Raumes $'N_U^{h-1} = N_U^k \times \bar{S}^{h-1}$ bedeuten. Dann gilt folgendes Abbildungsschema:

$$\begin{array}{ccc} 'U & \xrightarrow{A} & \bar{U} \\ T_H \downarrow & & \downarrow \bar{T}_H \\ U & \xrightarrow{B} & \bar{U} \end{array}$$

Anzugeben ist die eindeutige analytische Abbildung A von $'U$ auf \bar{U} . In den Restgebieten der Modifikationen, wo T_H und \bar{T}_H eindeutig sind, liegt eine solche Abbildung unmittelbar vor, und diese ist zu einer in ganz $'U$ eindeutigen holomorphen Abbildung A fortzusetzen. — Hierzu betrachten wir die Abbildung B . Aus (9) und (10) folgt

$$f_m(0, 0, \dots, 0, z_{h+1}, z_{h+2}, \dots, z_n) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, h.$$

Ferner sollen die Nullpunkte beider Koordinatensysteme einander entsprechen, $f_r(0, 0, \dots, 0) = 0, r = 1, 2, \dots, n$. So gilt für (11)

$$(11') \quad y_m = a_{m1} z_1 + a_{m2} z_2 + \dots + a_{mh} z_h + \sum_{i=1}^h z_i P_{mi}(z), \quad m = 1, 2, \dots, h,$$

wobei die $P_{mi}(z)$ Potenzreihen in allen z_1, z_2, \dots, z_n ohne konstante Glieder sind und die Matrix (a_{mi}) den Rang h hat. Außerdem fehlen in sämtlichen $f_i(z)$ ebenfalls die konstanten Glieder. (11') ergibt, in (13) eingesetzt,

$$t_j = \frac{y_j}{y_h} = \frac{\sum_{i=1}^h a_{ji} z_i + z_i P_{ji}(z)}{\sum_{i=1}^h a_{hi} z_i + z_i P_{hi}(z)}.$$

Wir ersetzen hierin die z_i nach (12) und erhalten, indem wir durch z_h kürzen, die Abhängigkeit der Koordinaten in $'U$ von denen in $'U$,

$$(14) \quad t_j = \frac{y_j}{y_h} = \frac{a_{jh} + P_{jh} + \sum_{i=1}^{h-1} (a_{ji} s_i + s_i P_{ji})}{a_{hh} + P_{hh} + \sum_{i=1}^{h-1} (a_{hi} s_i + s_i P_{hi})}.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sich (14) für jeden beliebigen und dann festen Punkt Q der Basis N_U^k auf eine projektive Transformation zwischen den Koordinaten der Fasern $S^{h-1}(Q)$ und $\bar{S}^{h-1}(\bar{Q})$, $\bar{Q} = BQ$, reduziert.

N_U^k ist durch $z_h = 0$ gegeben, womit in den P_{ji} und P_{hi} alle Glieder verschwinden, die z_h als Faktor enthalten. Die übrigen hängen wegen (12) nur von den für festes Q konstanten Koordinaten $z_{h+1}, z_{h+2}, \dots, z_n$ ab, können also zu den a_{ji} und a_{hi} hinzugenommen werden. Übrig bleibt eine projektive Transformation

$$(15) \quad t_j = \frac{q_j}{q_h} = \frac{A_{jh} + \sum_{i=1}^{h-1} A_{ji} s_i}{A_{hh} + \sum_{i=1}^{h-1} A_{hi} s_i}$$

zwischen den lokalen Koordinaten t_j von \bar{S}^{h-1} und den lokalen Koordinaten s_i von S^{h-1} . Dabei sind die Koeffizienten A_{ik} holomorphe Funktionen der Koordinaten $z_{h+1}, z_{h+2}, \dots, z_n$, hängen also von der Wahl des Basispunktes Q ab. Damit ist gezeigt, daß der $\sigma^{n,k}$ -Prozeß in beiden Umgebungen zu analytisch homöomorphen Ergebnissen geführt hat.

(E) Die Wirkung des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses in Teilmannigfaltigkeiten.

Satz 11. M^m sei eine m -dimensionale Teilmannigfaltigkeit der komplexen Mannigfaltigkeit M^n . $N^k \subset M^n$ sei eine k -dimensionale irreduzible singularitätenfreie analytische Menge, die mit M^m einen d -dimensionalen Durchschnitt N^d , $0 \leq d < k$, derart gemeinsam habe, daß für alle Punkte von N^d die k -dimensionale Tangentialebene von N^k nicht in der m -dimensionalen Tangentialebene von M^m enthalten sei oder umgekehrt. Dann induziert die Ausführung eines $\sigma^{n,k}$ -Prozesses in M^n bezüglich N^k einen $\sigma^{m,d}$ -Prozeß in M^m bezüglich N^d .

Beweis. U sei eine Umgebung des Punktes $P \in N^d$ mit den bezüglich $N_U^k = N^k \cap U$ ausgezeichneten Koordinaten z_1, z_2, \dots, z_n , die auf Grund der obigen Voraussetzungen so gewählt werden können, daß N_U^k durch $z_1 = z_2 = \dots = z_{n-k} = 0$ und $U^m = U \cap M^m$ durch

$$(16) \quad z_1 = z_2 = \dots = z_{n-k-m+d} = z_{n-k+1} = z_{n-k+2} = \dots = z_{n-d} = 0$$

gegeben ist. Gemäß (A) und (C) ist die modifizierte Umgebung $'U$ als die Menge H definiert, die im Produktraum $U \times S^{n-k-1}$ durch die Forderung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_{n-k} \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-k} \end{pmatrix} = 1,$$

also z. B. durch

$$(17) \quad z_i p_{n-k} - z_{n-k} p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-k-1,$$

gegeben ist, wobei Punkte von H mit denen von U zu identifizieren sind, die einander vermöge der natürlichen Projektion T_H von H auf U entsprechen. Durch (16) ist zugleich im Produktraum $U \times S^{n-k-1}$ diejenige m -dimensionale Teilmenge $H^m \subset H$ bestimmt, die durch T_H auf U^m abgebildet wird. Wie in (A) und (C) gezeigt wurde, ist T_H eineindeutig außerhalb N_U^k und bildet $'N_U^{n-1} = N_U^k \times S^{n-k-1}$ auf N_U^k ab, also den $m-1$ -dimensionalen Raum $'N_U^{m-1} = (N^d \cap U^m) \times S^{m-d-1}$ auf $N^d \cap U^m$, denn es ist, indem von den in (16) auftretenden z_i nur $z_1, z_2, \dots, z_{n-k-m+d}$ auch in (17) vorkommen, $(n-k-1) - (n-k-m+d) = m-d-1$ die Dimension des projektiven Raumes $S^{m-d-1} \subset S^{n-k-1}$, durch den jeder Punkt von $N^d \subset M^m$ bei der Modifikation ersetzt wird. Das bedeutet aber, der $\sigma_U^{n,k}$ -Teilprozeß in U induziert, wie behauptet, in U^m einen $\sigma_{U^m}^{m,d}$ -Teilprozeß. Entsprechendes gilt in den übrigen Koordinatenumgebungen, die mit N^d nichtleeren Durchschnitt haben.

Schließt man in umgekehrter Richtung, so erhält man entsprechend den

Satz 11'. *Ein $\sigma^{n,k}$ -Prozeß bezüglich $N^k \subset M^n$ läßt sich zu einem $\sigma^{n,r}$ -Prozeß bezüglich $N^r \subset M^n$ erweitern, wenn $N^r \cap M^n = N^k$ und $M^n \subset M^q$ ist und für keinen Punkt von N^k der Tangentialraum von M^n (bezüglich M^q) in demjenigen von N^r enthalten ist oder umgekehrt.*

4. Der Begriff der mehrfachen Modifikation und die Abschließung des affinen Raumes.

Mit Hilfe des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses wollen wir nun die einleitend angedeutete Frage nach der Abschließung des n -dimensionalen (komplexen oder reellen) affinen Raumes zu einem einfach oder mehrfach projektiven Raum vom Standpunkt der Modifikationen aus behandeln. Hierbei wird sich zeigen, daß mehrere Modifikationen notwendig sind, um zum Ziel zu kommen. Deshalb definieren wir:

(Def. 3) Die komplexe Mannigfaltigkeit $^{(R)}M^n$ heißt eine R -fache Modifikation der komplexen Mannigfaltigkeit $^{(0)}M^n$, wenn es eine Folge $^{(0)}M^n, ^{(1)}M^n, \dots, ^{(R-1)}M^n, ^{(R)}M^n$ von komplexen Mannigfaltigkeiten derart gibt, daß jede dieser $^{(i)}M^n$ eine Modifikation der vorhergehenden oder der nachfolgenden ist. Jede einzelne Modifikation bezeichnen wir als *Schritt* der mehrfachen Modifikation und nennen die letztere *stetig* bzw. *analytisch*, wenn jeder Schritt eine stetige bzw. eine analytische Modifikation ist.

Wie sich die Sätze der Abschnitte 2 und 3 auf mehrfache Modifikationen übertragen, ist unmittelbar klar; es gilt zusammenfassend der

Satz 12. *$^{(R)}M^n$ sei eine R -fache stetige Modifikation von $^{(0)}M^n$; alle Modifikationsabbildungen seien eigentlich und es werde bei jedem Schritt bezüglich*

einer analytischen Menge modifiziert. Dann gibt es zu jeder holomorphen Funktion, meromorphen Funktion bzw. analytischen Menge in ${}^{(0)}M^n$ eine ebensolche Funktion bzw. Menge in ${}^{(R)}M^n$, die im Restgebiet von ${}^{(R)}M^n$ zu der Beschränkung der in ${}^{(0)}M^n$ gegebenen Funktion bzw. Menge auf das Restgebiet von ${}^{(0)}M^n$ analytisch äquivalent ist.

Das bedeutet also, daß unter den obigen Voraussetzungen die Ringe der holomorphen und die Körper der meromorphen Funktionen bei mehrfachen Modifikationen isomorph sind.

Aus dem lokalen Charakter des $\sigma^{n,k}$ -Prozesses folgt unmittelbar, daß man in ein und derselben Mannigfaltigkeit σ^{n,k_i} -Prozesse bezüglich beliebig vieler k_i -dimensionaler irreduzibler und singularitätenfreier analytischer Mengen N^{k_i} ausführen kann, wenn diese punktfremd zueinander sind. Diese einfache Tatsache ist wichtig für die Modifikationen mehrfach projektiver Räume, für die folgender Satz gilt:

Satz 13. *Jeder mehrfach projektive Raum $S_{(1)}$ ist eine durch $\sigma^{n,k}$ -Prozesse erzeugbare mehrfache analytische Modifikation jedes anderen mehrfach projektiven Raumes $S_{(2)}$ gleicher Dimension.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein zweifach projektiver Raum, etwa $S^h \times S^k$ eine analytische Modifikation eines einfach projektiven Raumes S^{h+k} ist, die sich durch $\sigma^{n,k}$ -Prozesse erzeugen läßt. Denn daraus folgt, daß man die Faktoren von $S_{(1)}$ und ebenso die von $S_{(2)}$ in aufeinanderfolgenden Schritten vereinigen kann, bis man je einen (einfach) projektiven Raum erhält. Wir geben nur den Gedankengang des weiteren Beweisverlaufes und ersparen uns die relativ einfache Rechnung. Das uneigentliche Gebilde von S^{h+k} besteht aus einer $h+k-1$ -dimensionalen Ebene E , dasjenige von $S^h \times S^k$ ist reduzibel und besteht aus zwei $h+k-1$ -dimensionalen Ebenen E_1 und E_2 . Versucht man die kanonische Abbildung T' von $S^{h+k} \cdot E$ auf $S^h \times S^k - (E_1 \cup E_2)$ zu einer Abbildung T von S^{h+k} in $S^h \times S^k$ fortzusetzen, so sieht man, daß T für zwei Teilmengen A bzw. B von E unbestimmt wird, die $k-1$ - bzw. $h-1$ -dimensional und punktfremd zueinander sind. T ist also keine analytische Abbildung, sondern nur noch eine „meromorphe“. In A ist ein $\sigma^{h+k, k-1}$ -Prozeß und in B ein $\sigma^{h+k, h-1}$ -Prozeß auszuführen, das ergibt die komplexe Mannigfaltigkeit M^{h+k} , und die der Abbildung T entsprechende Abbildung von M^{h+k} in $S^h \times S^k$ ist dann eine analytische Abbildung. Andererseits kann T'^{-1} auch nur zu einer meromorphen Abbildung T^{-1} von $S^h \times S^k$ in S^{h+k} fortgesetzt werden, die für $E_1 \cap E_2$ unbestimmt wird. Ein $\sigma^{h+k, h+k-2}$ -Prozeß in dieser Menge ergibt ebenfalls die komplexe Mannigfaltigkeit M^{h+k} , und die der Abbildung T^{-1} entsprechende Abbildung von M^{h+k} in S^{h+k} ist analytisch. Das bedeutet, daß M^{h+k} eine analytische Modifikation sowohl von S^{h+k} wie auch von $S^h \times S^k$ ist, und man hat damit unmittelbar die mehrfache Modifikation samt den zugehörigen analytischen Modifikationsabbildungen gewonnen: Sie ist von der Gestalt

$$S^{h+k} \leftarrow M^{h+k} \rightarrow S^h \times S^k.$$

(Eingegangen am 1. Juli 1954.)

